

Flat Cauchy 問題の well-posedness の必要条件と 解の regularity-loss

京大 数理研 萬代 武史

§. 1 Introduction

目標を説明するために、まず次の例を考える。

$$P = D_t^2 - t^{2k} D_x^2 + t^{k-1} a(t, x) D_x + b(t, x) D_t + c(t, x)$$

(k は正整数, $a, b, c \in C^\infty$, $D_t = -i\partial_t$ etc.)

この作用素については、次のことがわかってゐる。すなわち、 $D_t^2 - t^{2k} D_x^2$ を主部とする作用素の ($t=0$ を初期面とする) Cauchy 問題が C^∞ -well-posed になるには、低階項が上の形をしていることが必要十分であり、このとき $|\operatorname{Im} a(0, x)|$ が解の regularity-loss を決定する。このように『well-posedness のための条件のぎりぎりの所が解の regularity-loss を支配してゐる。』という現象が我々の興味の対象である。七方向のふるまいのみに注目することによって、特性根のいろいろな接触のしかたを抜いて、次の形の定理を求めることをここでの目標とする。『主部を fix したとき、Cauchy 問題が well-posed になるためには低階項はあ

る種の条件を満たすことが必要であり、そのぎりぎりの所から決まってくるある種の量が、解の *regularity-loss* に影響する』

我々は次の理由によって、係数を C^∞ には限らないで、もっと広い class で考える。($t=0$ で *singular* な係数をもつ作用素に対して、*well-posedness* の必要条件を求めたりすることは、それ自体、もちろん意味のあることであるが、筆者にとっての最大の理由は次のことである。)

次の *Tricomi* 型的作用素を考えよう。

$$P = D_t^2 - t^{2k-1} D_x^2 + t^{k-1} a(t, x) D_x + b(t, x) D_t + c(t, x)$$

(k は正整数, $a, b, c \in C^\infty$)

この作用素についても、 $D_t^2 - t^{2k-1} D_x^2$ を主部とする作用素の *Cauchy* 問題が *well-posed* になるには低階項が上の形をしていることが必要十分であるが、このときは上に述べたような現象はおこさない。すなわち、低階項によらず、一定の *regularity-loss* しかおこさない。しかし、視点を広げて、 C^∞ 以外の係数も考えると、 $P = D_t^2 - t^{2k-1} D_x^2 + t^{k-\frac{3}{2}} a(t, x) D_x + b(t, x) D_t + c(t, x)$ ($a, b, c \in C^\infty$) に対しても、ある意味で *Cauchy* 問題が *well-posed* になり、 $|\operatorname{Im} a(0, x)|$ が解の *regularity-loss* に影響を与える。又 *Fuchsian type* の作用素でも同様の現象がおこるはずである。したがって、このような $t=0$ で *singular* な係数をもつ作用素をも統一的に扱いたいわけである。

§ 2. 定義と結果

我々の考える作用素は

$$P = \sum_{k=0}^m P_{m-k} = \sum_{k=0}^m \sum_{|f+d|=m-k} a_{f,d}(t,x) D_t^f D_x^d$$

において、

$$(A-\mu_0, M) \quad \begin{cases} a_{m,0}(t,x) \equiv 1 \\ a_{f,d} \in t^{-m+|f+\mu_0 d|} \times E_M \end{cases}$$

を満たすものである。但し、 μ_0 は fix した正有理数、 M は fix した正整数で、 $E_M = \{ \varphi ; \varphi(t^M, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n) \}$ かつ、 $M\mu_0$ は整数。いいかえると、

$$t^m P(t, x; \tau, \xi) = \sum_{|f+d| \leq m} \tilde{a}_{f,d}(t, x) (t\tau)^f (t^{-\mu_0} \xi)^d, \quad \tilde{a}_{f,d} \in E_M$$

となる作用素である。

こういう作用素に対しては、普通の意味の初期値問題は考えにくい。が、 $t=0$ で flat な右辺を与えて、 $t=0$ で flat な解を求めるという flat Cauchy 問題 を考えることができる。ここでは次の意味の well-posedness を考える。

定義

P に対する flat Cauchy 問題が 原点で μ_0 -well-posed とは、ある原点の近傍 Ω と正定数 C_0 があって、次の2条件を満たすこととする。

$$(E) \quad \begin{cases} \forall f \in C_{\text{flat}}^\infty(\Omega^+) , \exists u \in C_{\text{flat}}^\infty(\Omega^+) \\ \text{s.t. } Pu = f \text{ in } \Omega^+ \end{cases}$$

$$(U) \begin{cases} \Gamma = \Gamma_{\mu_0}(\hat{t}, \hat{x}; C_0) \subset \Omega^+ \text{ となるような任意の } (\hat{t}, \hat{x}) \in \Omega^+ \\ \text{にして、} \\ u \in C_{\text{flat}}^\infty(\Omega^+), \quad Pu = 0 \text{ in } \Gamma \Rightarrow u = 0 \text{ in } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{但し、} \begin{cases} \Omega^+ = \{(t, x) \in \Omega; t \geq 0\} \\ C_{\text{flat}}^\infty(\Omega^+) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \subset \Omega^+\} \\ \quad = \{\varphi \in C^\infty(\Omega^+) : \varphi \text{ は } t=0 \text{ で flat}\} \\ \Gamma_{\mu_0}(\hat{t}, \hat{x}; C_0) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - \hat{x}| \leq C_0(\hat{t}^{\mu_0} - t^{\mu_0}), 0 \leq t \leq \hat{t}\} \end{cases}$$

(注)

1. $\mu_0 = 1$ のときは、(U) は有限伝播速度の存在であり、
 $\mu_0 < 1$ のときは、それよりも弱い条件である。
2. C^∞ -係数のときの初期値問題や、Fuchsian type の初期値問題は容易に flat Cauchy 問題に reduce できる。
3. 上の意味で well-posed のとき、 $P_m(t, x; \tau, \xi)$ は $t > 0$ で双曲型になる。すなわち、 $P_m(t, x; \tau, \xi) = 0$ は τ につき、実根のみをもつ。

さて、ここでは簡単のために $(\tau, \xi) = (0, e_n) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ の方向を考える。

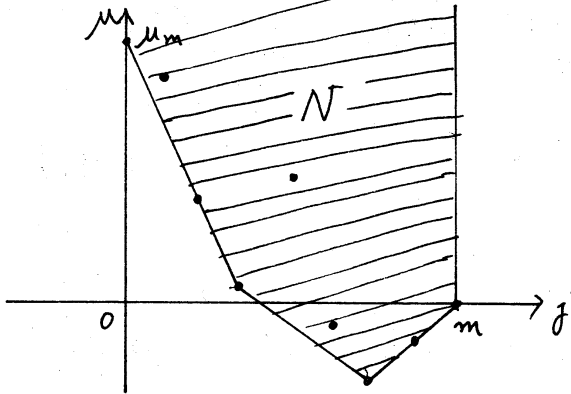
$$\mu_{\hat{t}, \hat{x}}^{(k)} = \sup \left\{ \mu \in \mathbb{R}; \text{ある } g \in E_n \text{ があって、原点の近傍で、} \right. \\ \left. \partial_{\hat{t}}^k \partial_{\hat{x}}^k P_{m-k}(t, x; 0, e_n) = t^{-\mu} g(t, x) \right\}$$

とし、点列 $\{(\hat{t}, \mu_{\hat{t}, \hat{x}}^{(0)})\}_{\hat{t}=0}^m$ を $(\hat{t}, \mu)$ -平面にとり、これから

Newton polygon N をつくる。すなわち、

$$\nu(k) = \min \{ \mu_{j,0}^{(k)} + k j \ ; \ j=0, 1, \dots, m \} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ とし、}$$

$$N = \{ (j, \mu) \in \{0, 1, \dots, m\} \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \ ; \ \mu \geq \nu(k) - k j \text{ for } k \in \mathbb{R} \}$$



この N は P_m のみで決まる図形である。(この図形の意味については、補題 4.3 参照。)

このとき、低階項の条件として、

定理 1

$(A - \mu_0, M)$ と、 P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0 -well-posed であることを仮定すると、

$$(h + j + |d|, h + \mu_{j,d}^{(h)} + (1 - \mu_0)|d|) \in N \quad (h=0, 1, \dots, m; j + |d| \leq m - h)$$

特に、 $\{(j, \mu_{j,0}^{(h)})\}_{j=0}^{m-h}$ から作られる Newton polygon は N を $(-h, -h)$ だけ平行移動したものに含まれる。

次に N の垂直でない一边 $L: \mu = \nu - k j$ に注目する。定理 1 によって

$$\partial_z^{\beta'} \partial_{z'}^{\alpha'} P_{m-h}(t, x; 0, e_n) = j! d'! t^{\nu - k(j + |d'| + h) - h - (1 - \mu_0)|d'|} b_{j,d'}^{(h)}(t, x) \dots \quad (1)$$

$b_{j,d'}^{(h)} \in E_M$ ($h=0, 1, \dots, m; j + |d'| \leq m - h$) と表わせる。但し、

$$\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}), \quad \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$$

$$f_{\alpha'}^{(h)}(\tau) = \sum_{l=0}^{m-h-|\alpha'|} b_{l,\alpha'}^{(h)}(0,0) \tau^l \dots \dots \dots (2)$$

とし、 $f_0^{(0)}(\tau) = 0$ の d 重根 τ_0 を 1 つ考える。これに対して、

$$B_{j,\alpha'}^{(h)} = \frac{1}{j!} \sum_{s=0}^h \sum_{\mu=0}^{h-s} \overbrace{\sum_{\substack{g_1+\dots+g_\mu=h-s+\mu \\ g_a \geq 2 \ (k_a)}}}^{\tau_0^\mu} \frac{\tau_0^\mu}{\mu! g_1! \dots g_\mu! i^{h-s}} \left(\partial_\tau^{h-s+\mu} f_{\alpha'}^{(s)} \right)(\tau_0) \\ \times \prod_{a=1}^{\mu} \{k(k-1)\dots(k-g_a+2)\} \dots \dots \dots (3) \quad \text{と定義する。}$$

$$\left(\begin{array}{l} B_{j,\alpha'}^{(0)} = \frac{1}{j!} (\partial_\tau^j f_{\alpha'}^{(0)})(\tau_0) \\ B_{j,\alpha'}^{(1)} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{\tau_0 k}{2i} (\partial_\tau^{j+2} f_{\alpha'}^{(0)})(\tau_0) + (\partial_\tau^j f_{\alpha'}^{(1)})(\tau_0) \right\} \quad \text{etc.} \end{array} \right)$$

このとき、

定理 2

定理 1 と同じ仮定のもとで、

$$\begin{cases} B_{j,\alpha'}^{(h)} = 0 & \text{for } h+j+|\alpha'| \leq d-1 \\ B_{d,0}^{(0)} \neq 0. \end{cases} \dots \dots \dots (4)$$

(注)

$\partial_\tau^j \partial_{\alpha'}^{\alpha'} P_{m-h}(t,x;0,e_n)$ は $\tau^j \partial_{\alpha'}^{\alpha'} \sum_n^{m-h-j-|\alpha'|}$ の係数である。我々の結論は、係数のことばで書けるが、 e_n は $\mathbb{R}^n$ の 1 つの標準的な単位ベクトルのしてとっていいわけだから、 $\partial_\tau^j \partial_{\alpha'}^{\alpha'} P_{m-h}$ として扱うことにする。

次に、 $\sum_{h=0}^d B_{d-h,0}^{(h)} \lambda(\lambda - \frac{1}{i}) \dots (\lambda - \frac{d-h-1}{i}) = 0$ の根を、 $\lambda_1, \dots$

λ_d とする。このとき、

定理 3

$(A-\mu_0, M)$, ①, ④ を仮定すると、ある定数 C_0 (M, m, ν, κ により depend する) が存在して、次のことが成立する。

$$\begin{aligned} \square \quad & \|u\|_{H^p(\Omega_a^+)} \leq C \|Pu\|_{H^g(\Omega_a^+)} \\ & \text{for } \forall u \in C_{\text{flat}}^\infty(\Omega^+), 0 \leq a \leq T (>0) \end{aligned}$$

が成立するとすると、

$$-\text{Im} \lambda_l \leq C_0 (g+m-p) \quad \square$$

但し、 $\left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ は原点の近傍, } \Omega_a^+ = \{(t, x) \in \Omega; 0 \leq t \leq a\}, \\ p, g \text{ は整数, } \|\cdot\|_{H^p(\Omega_a^+)} \text{ は } \Omega_a^+ \text{ 上の } p \text{ 次 Sobolev norm} \\ C \text{ は } u, a \text{ に independent な定数。} \end{array} \right.$

(④ 上の不等式が成立するとき、 $g+m-p \geq 1$ である。)

この定理 3 は、 $\max \{-\text{Im} \lambda_l; l=1, \dots, d: \tau_0 \text{ は } f_0^{(0)}(\tau)=0 \text{ の } d \text{ 重根}\}$ なる量が大きくなると、必然的に解の *regularity-loss* が大きくなることを示している。

§ 3. 例

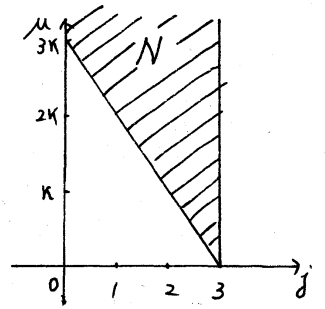
ここであげる例はすべて、 $n=1$ である。

例 1.

$$m=3, \quad P_3 = (\tau - t^\kappa \xi)(\tau - 2t^\kappa \xi)(\tau - 3t^\kappa \xi)$$

$$= \tau^3 - 6t^k \tau^2 \xi + 11t^{2k} \tau \xi^2 - 6t^{3k} \xi^3$$

なる主部をもつ作用素を考える。(kは有理数で、 $k > -1$)。Newton polygon は右図のようになる。



定理1により、低階項は次の形をしている。

$$\begin{cases} P_2 = A t^{-1} \tau^2 + B t^{k-1} \tau \xi + C t^{2k-1} \xi^2 \\ P_1 = E t^{-2} \tau + F t^{k-2} \xi \\ P_0 = G t^{-3} \end{cases}, \quad A, B, \dots, G \in E = \bigcup_{M \in \mathbb{Z}} E_M$$

N の辺 $\mu = 3k - k j$ ($\nu = 3k$) を考えると、

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - 6\tau^2 + 11\tau - 6 = (\tau-1)(\tau-2)(\tau-3).$$

したがって、単根 ($d=1$) を $\tau_0 = 1, 2, 3$ と3つ持つ。それ
ぞれの τ_0 に対して、

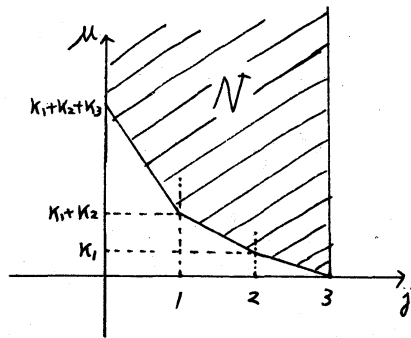
$$B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{3k}{2} + A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) & \text{(i) } \tau_0 = 1 \text{ のとき} \\ 4A(0,0) + 2B(0,0) + C(0,0) & \text{(ii) } \tau_0 = 2 \text{ のとき} \\ \frac{9k}{2} + 9A(0,0) + 3B(0,0) + C(0,0) & \text{(iii) } \tau_0 = 3 \text{ のとき} \end{cases},$$

$$B_{1,0}^{(0)} = \begin{cases} 2 & \text{(i)} \\ -1 & \text{(ii)} \\ 2 & \text{(iii)} \end{cases} \quad \text{となる。定理3の } \lambda_1 \text{ は } -\frac{B_{0,0}^{(1)}}{B_{1,0}^{(0)}} \text{ である。}$$

例 2

$$\begin{aligned} m=3, \quad P_3 &= (\tau - t^{k_1} \xi)(\tau - t^{k_2} \xi)(\tau - t^{k_3} \xi) \\ &= \tau^3 - (t^{k_1} + t^{k_2} + t^{k_3}) \tau^2 \xi + (t^{k_1+k_2} + t^{k_1+k_3} + t^{k_2+k_3}) \tau \xi^2 \\ &\quad - t^{k_1+k_2+k_3} \xi^3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ は有理数で } k_3 > k_2 > k_1 > -1) \end{aligned}$$

を考える。Newton polygon は右図のようになり、定理1によって近階項は次の形をしている。



$$\begin{cases} P_2 = A t^{-1} \tau^2 + B t^{k_1-1} \tau \xi + C t^{k_1+k_2-1} \xi^2 \\ P_1 = E t^{-2} \tau + F t^{k_1-2} \xi \\ P_0 = G t^{-3} \end{cases}, \quad A, B, \dots, G \in E$$

Newton polygon の辺は $L_1: \mu = 3k_1 - k_1 j$, $L_2: \mu = k_1 + 2k_2 - k_2 j$, $L_3: \mu = k_1 + k_2 + k_3 - k_3 j$ の3本がある。それぞれに対して $B_{i,0}$ を計算しよう。

• L_1 について。

$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - \tau^2 = \tau^2(\tau - 1)$ となり、2重根 ($d=2$), 0 と単根 ($d=1$), 1 とをもつ。

$d=2, \tau_0=0$ のとき。

$$B_{2,0}^{(0)} = -1, \quad B_{0,0}^{(1)} = 0,$$

$$B_{1,0}^{(1)} = B(0,0), \quad B_{0,0}^{(2)} = F(0,0).$$

$d=1, \tau_0=1$ のとき。

$$B_{1,0}^{(0)} = 1,$$

$$B_{0,0}^{(1)} = A(0,0) + B(0,0) + \frac{2k_1}{i}.$$

$B_{0,0}^{(1)} = 0$ だから定理2はすでに満たされている。

• L_2 について。

$f_0^{(0)}(\tau) = -\tau^2 + \tau = -\tau(\tau - 1)$ となり、 $d=1, \tau_0=0, 1$ 。

$$B_{1,0}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{(i) } \tau_0=0 \\ -1 & \text{(ii) } \tau_0=1 \end{cases}$$

$$B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} C(0,0) & \text{(i)} \\ -\frac{k_2}{i} + B(0,0) + C(0,0) & \text{(ii)} \end{cases}$$

• L_3 について.

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau - 1 \quad \text{となり, } d=1, \tau_0=1.$$

$$B_{1,0}^{(0)} = 1, \quad B_{0,0}^{(1)} = C(0,0)$$

L_3 のところででてきたように、この作用素に関しては、 $m-2=1$ 階項まで *regularity-loss* に影響する。

• 以上の例 1, 2 では、定理 2 は意味がなく、定理 1 で必要条件として与えた条件は実は十分条件でもある。(R. Sakamoto [2])

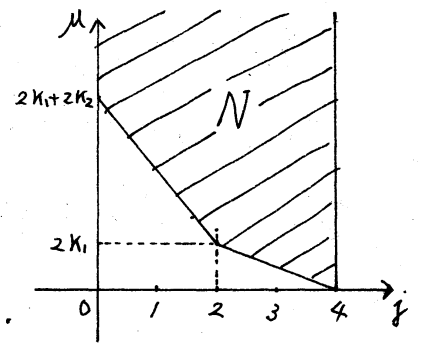
例 3

$$\begin{aligned} m=4, \quad P_4 &= (\tau - t^{\kappa_1} \xi)^2 (\tau - t^{\kappa_2} \xi)^2 \\ &= \tau^4 - 2(t^{\kappa_1} + t^{\kappa_2})\tau^3\xi + (t^{2\kappa_1} + 4t^{\kappa_1+\kappa_2} + t^{2\kappa_2})\tau^2\xi^2 \\ &\quad - 2(t^{2\kappa_1+\kappa_2} + t^{\kappa_1+2\kappa_2})\tau\xi^3 + t^{2\kappa_1+2\kappa_2}\xi^4 \quad (\kappa_1, \kappa_2 \text{ は有理数,} \\ &\quad \kappa_2 > \kappa_1 > -1) \quad \text{を考える。} \end{aligned}$$

Newton polygon は右図のようになり、

定理 1 によって低階項は次の形。

$$\begin{cases} P_3 = A t^{-1} \tau^3 + B t^{\kappa_1-1} \tau^2 \xi + C t^{2\kappa_1-1} \tau \xi^2 + E t^{2\kappa_1+\kappa_2-1} \xi^3 \\ P_2 = F t^{-2} \tau^2 + G t^{\kappa_1-2} \tau \xi + H t^{2\kappa_1-2} \xi^2 \\ P_1 = I t^{-3} \tau + J t^{\kappa_1-3} \xi \\ P_0 = K t^{-4} \end{cases} \quad A, B, \dots, K \in E$$



N の辺は、 $L_1: \mu = 4\kappa_1 - \kappa_1 j$, $L_2: \mu = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_2 j$ の 2 本が

ある。それぞれに対して B_n を計算しよう。

• L_1 について.

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^4 - 2\tau^3 + \tau^2 = \tau^2(\tau-1)^2 \quad \text{となり, } d=2, \tau_0=0, 1.$$

$$\begin{cases} B_{2,0}^{(0)} = 1 \\ B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{(i) } \tau_0 = 0 \text{ のとき} \\ A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) + \frac{\kappa_1}{i} & \text{(ii) } \tau_0 = 1 \text{ のとき} \end{cases} \\ B_{1,0}^{(1)} = \begin{cases} C(0,0) & \text{(i)} \\ 3A(0,0) + 2B(0,0) + C(0,0) + \frac{6\kappa_1}{i} & \text{(ii)} \end{cases} \\ B_{0,0}^{(2)} = \begin{cases} H(0,0) & \text{(i)} \\ \kappa_1 B(0,0) + F(0,0) + G(0,0) + H(0,0) - 7\kappa_1^2 + 4\kappa_1 & \text{(ii)} \end{cases} \end{cases}$$

定理 2 によって, $A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) + \frac{\kappa_1}{i} = 0$

• L_2 について.

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^2 - 2\tau + 1 = (\tau-1)^2 \quad \text{となり, } d=2, \tau_0=1.$$

$$\begin{cases} B_{2,0}^{(0)} = 1 \\ B_{0,0}^{(1)} = C(0,0) + E(0,0) + \frac{\kappa_2}{i} \\ B_{1,0}^{(1)} = C(0,0) \\ B_{0,0}^{(2)} = H(0,0) \end{cases}$$

定理 2 によって, $C(0,0) + E(0,0) + \frac{\kappa_2}{i} = 0$

この例では, $t > 0$ では constant multiplicity になっているので
定理 1 と, constant multiplicity のときの結果から, もっと強い
条件が導びけ, それが同時に十分条件にもなる。

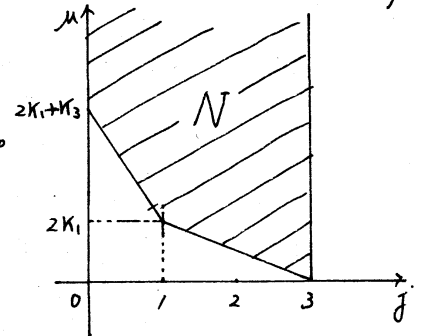
例 4.

$$\begin{aligned}
 m=3, \quad P_3 &= (\tau - t^{k_1} \xi)(\tau - t^{k_1} \xi - t^{k_2} \xi)(\tau - t^{k_3} \xi) \\
 &= \tau^3 - (2t^{k_1} + t^{k_2} + t^{k_3})\tau^2 \xi + (t^{2k_1} + t^{k_1+k_2} + 2t^{k_1+k_3} + t^{k_2+k_3})\tau \xi^2 \\
 &\quad - (t^{2k_1+k_3} + t^{k_1+k_2+k_3})\xi^3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ は有理数で, } \frac{k_2}{k_3} > \frac{k_1}{k_3} > -1)
 \end{aligned}$$

を考へる。Newton polygon は右図のように

なり。定理 1 によつて、低階項は次の形。

$$\begin{cases}
 P_2 = A t^{-1} \tau^2 + B t^{k_1-1} \tau \xi + C t^{2k_1-1} \xi^2 \\
 P_1 = E t^{-2} \tau + F t^{k_1-2} \xi \\
 P_0 = G t^{-3}
 \end{cases}, \quad A, B, \dots, G \in E$$


 N の辺は $L_1: \mu = 3k_1 - k_1 j$, $L_2: \mu = 2k_1 + k_3 - k_3 j$ の 2 本ある。
。 L_1 について。

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - 2\tau^2 + \tau = \tau(\tau-1)^2 \quad \text{となり。} \quad d=2, \tau_0=1 \text{ と } d=1, \tau_0=0.$$

 $d=2, \tau_0=1$ のとき。

$$\begin{cases}
 B_{2,0}^{(0)} = 1 \\
 B_{0,0}^{(1)} = A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) + \frac{k_1}{i} \\
 B_{1,0}^{(1)} = 2A(0,0) + B(0,0) + \frac{3k_1}{i} \\
 B_{0,0}^{(2)} = \frac{k_1}{i} A(0,0) + E(0,0) + F(0,0) - k_1(k_1-1)
 \end{cases}$$

 $d=1, \tau_0=0$ のとき

$$\begin{cases}
 B_{1,0}^{(0)} = 1 \\
 B_{0,0}^{(1)} = C(0,0)
 \end{cases}$$

定理 2 により、 $\underline{A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) + \frac{k_1}{i} = 0} \quad \text{----- (5)}$

。 L_2 について。

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau - 1 \quad \text{となり。} \quad d=1, \tau_0=1.$$

$$B_{1,0}^{(0)} = 1, \quad B_{0,0}^{(1)} = C(0,0).$$

⑤の条件は、主部において $\tau - t^{k_1}$ と $\tau - t^{k_1}(1 + t^{k_2-k_1})$ とが $t \rightarrow 0$ のとき、 t^{k_1} の order ではあってもまだくっつくことか
らくるのであるが、このくっつき方は $t^{k_2-k_1}$ の order である。
 k_2 がかわれば当然このくっつき方の order がかわるから、こ
れを反映した必要条件があるはずである。これを求めるには
 $\tau - t^{k_1}$ を τ にもっていくような変数変換をする。結果のみ
著くと、必要条件としては、

$$\frac{k_1}{i} + A(t, x) + B(t, x) + C(t, x) - \frac{k_1}{i} t^{k_2-k_1} \in t^{k_2-k_1} \times E.$$

この条件は実は十分条件でもある。

§ 4. 定理の証明のための準備

定理 1, 2 の証明のため、operator P に対する 2 つの変換を
考える。

まず、正有理数 p に対して、 $(T_p u)(t, x) = u(t^{\frac{1}{p}}, x)$ により、

$$T_p: C_{flat}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow C_{flat}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$$

を定義すると、簡単な計算によって次のことがわかる。

命題 4.1

$(A - \mu_0, M)$ をみたす P に対して、

$$P(t, x; \tau, \xi) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} t^{\nu-k(j+|\alpha|+h)-k-(1-\mu_0)|\alpha|} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha,$$

$a_{j,\alpha} \in E_M$ とする。(但し、 $k \geq \mu_0 - 1$, $h = m - j - |\alpha|$)。このとき、

$$T_p(P) = p^m t^{m(p-1)} T_p^{-1} \circ P \circ T_p \in \tilde{\mathcal{M}}_0 = p \mathcal{M}_0, \quad \tilde{M} = p \frac{M}{p} \quad (p \text{ は } p \cdot \frac{M}{p} \text{ が})$$

整数となるような正整数) に対して, $(A-\mu_0, \tilde{M})$ を満たし,

$$\mathcal{I}_p(P) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} t^{\tilde{\nu} - \tilde{K}(j+|\alpha|+h) - h - (1-\tilde{\mu}_0)|\alpha|} \tilde{Q}_{j,\alpha}(t,x) D_t^j D_x^\alpha$$

となる。但し, $\tilde{Q}_{j,\alpha} \in E_{\tilde{M}}$, $\tilde{\nu} = p\nu - m + pm$, $\tilde{K} = pK + p - 1$ 。

又, $\mathcal{I}_{\frac{1}{p}}(\mathcal{I}_p(P)) = \mathcal{I}_p(\mathcal{I}_{\frac{1}{p}}(P)) = P$ である。

④

このような変換がゆるされるのは, 考える作用素の class を広げているからである。P の係数が C^∞ でも, $\mathcal{I}_p(P)$ はそうとは限らない。

次に座標変換でひきおこされる作用素の変換を考えよう。次の命題は, §2 で定義した $B_{j,\alpha'}^{(h)}$ のある種の不変性を示すもので, それ自身面白いものである。

命題 4.2

$(A-\mu_0, M)$ をみたす作用素 P に対して, 1組の (ν, K) について, ① が成立しているとし, $f_{\alpha'}^{(h)}(\tau)$ を②で定義する。 $f_0^{(0)}(\tau) = 0$ の d 重根 τ_0 に対して, $B_{j,\alpha'}^{(h)}$ を③で定義するとき,

$$\begin{cases} S=t \\ y_j = x_j + t^{\mu_0 + \varepsilon} f_j(t, x) \\ y_n = x_n + \frac{1}{K+1} t^{K+1} \tilde{c}(t, x) \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon > 0, \varepsilon M \text{ は整数} \\ f_j, \tilde{c} \in E_M \end{pmatrix}$$

なる変数変換で P を $\tilde{P}(s, y; D_s, D_y)$ に変換すると, $\tilde{P} \in (A-\mu_0, M)$ を満たし,

$$(\partial_\sigma^\alpha \partial_\gamma^{d'} \tilde{P}_{m-h})(s, y; 0, e_n) = j! d'! S^{\mu - K(j+|d'|+h) - h - (1-\mu_0)|d'|} \tilde{b}_{j,d'}^{(h)}(s, y), \dots \quad (6)$$

$\tilde{b}_{j,d'}^{(h)} \in E_M$ と表わせる。さらに、 $\tilde{b}_{j,d'}^{(h)}(0,0)$ かつ、②で $\tilde{f}_{d'}^{(h)}(\sigma)$ を定義すると、 $\tilde{f}_0^{(0)}(\sigma) = 0$ は $\sigma_0 = \tau_0 - \tilde{c}(0,0)$ を d 重根にもち、③で $f_{d'}^{(h)}, \tau_0$ のかわりに、 $\tilde{f}_{d'}^{(h)}, 0$ にした式で $\tilde{B}_{j,d'}^{(h)}$ を定義すると、 $\tilde{B}_{j,d'}^{(h)} = B_{j,d'}^{(h)}$ ($h=0,1,\dots, m: j+|d'| \leq m-h$)。特に、 $\tilde{c}(0,0) = \tau_0$ とすると、 $\tilde{b}_{j,d'}^{(h)}(0,0) = B_{j,d'}^{(h)}$ 。

証明の概略

$\tilde{P}$ を直接計算すると、⑥が成立して

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{j,d'}^{(h)}(0,0) &= \frac{1}{j!} \sum_{s=0}^h \sum_{\mu=0}^{h-s} \sum_{\substack{g_1+\dots+g_\mu=h-s+\mu \\ g_a \geq 2(K_a)}} \frac{\tilde{c}(0,0)^\mu}{\mu! g_1! \dots g_\mu! 2^{h-s}} (2^{\mu h-s+\mu} f_{d'}^{(s)})(\tilde{c}(0,0)) \\ &\quad \times \prod_{a=1}^{\mu} \{K(K-1)\dots(K-d_a+2)\} \end{aligned}$$

となることかわかる。

この式によって、 $\tilde{b}_{j,d'}^{(h)}(0,0)$ は $b_{j,d}^{(h)}(0,0)$ と $\tilde{c}(0,0)$ のみで表わることと、 $\tilde{f}_0^{(0)}(\sigma) = f_0^{(0)}(\sigma + \tilde{c}(0,0))$ がわかる。又、 $\tilde{c}(0,0) = \tau_0$ のとき、 $B_{j,d'}^{(h)} = \tilde{b}_{j,d'}^{(h)}(0,0)$ である。さて、

$$\begin{cases} u = S (= t) \\ w_j = y_j (= x_j + t^{\mu_0+\varepsilon} f_j(t, x)) \\ w_n = y_n + \frac{1}{K+1} S^{K+1} (\tau_0 - \tilde{c}(0,0)) = x_n + \frac{1}{K+1} t^{K+1} (\tau_0 + \tilde{c}(t, x) - \tilde{c}(0,0)) \end{cases}$$

なる座標変換を考えると、これにより、 $\tilde{P}$ が $\tilde{\tilde{P}}$ に変換される

としたとき、 $\tilde{\tilde{P}}$ に対して、 $\tilde{\tilde{b}}_{j,d'}^{(h)}, \tilde{\tilde{B}}_{j,d'}^{(h)}$ を同様に定義すると、

上でみたことにより、 $\tilde{\tilde{B}}_{j,d'}^{(h)} = \tilde{\tilde{b}}_{j,d'}^{(h)}(0,0)$ 、 $B_{j,d'}^{(h)} = \tilde{\tilde{b}}_{j,d'}^{(h)}(0,0)$ 。

したがって、 $\tilde{B}_{j,d'}^{(h)} = B_{j,d'}^{(h)}$

次に定理 1, 2 の結論のうち、 $h=0$ のときを示そう。これは well-posedness というよりも、双曲型であることからの帰結である。まず、Newton polygon と多項式の零点との関係を示す次の補題を述べる。(証明は省略する。)

補題 4.3

$$f(t; \tau) = \sum_{j=0}^m a_j(t) \tau^j, \quad a_m(t) \equiv 1, \quad a_j \in F_{\mu_j} \quad (\mu_j \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

とする。但し、 $F_{\mu} = \{ t^{\mu} \varphi(t); \varphi \in C^0[0, T], \varphi(0) \neq 0 \} \quad (\mu < \infty)$,

$$F_{\infty} = \{ \varphi \in C^0[0, T]; \forall N, \exists \varphi_N \in C^0[0, T] \text{ st. } \varphi(t) = t^N \varphi_N(t) \}.$$

$\{(j, \mu_j)\}_{j=0}^m$ から §2 のようにして、Newton polygon N を引き、その辺の $j = m-k$ と $j = m-k+1$ の間の部分の傾きを $-\overline{\kappa}_k$ とする。

(但し、 $j = j_0 (\geq 1)$ が N の垂直な辺のときは、 $\overline{\kappa}_{m-j_0+1} = \dots = \overline{\kappa}_m = \infty$ とする。) このとき、 $\sigma_k(t) \in F_{\overline{\kappa}_k}$ が存在して、

$$f(t; \tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \sigma_k(t)) \quad \text{とできる。}$$

逆に、 $\sigma_k \in F_{\overline{\kappa}_k}$ によって、こう分解されるとすると、 f から作られる Newton polygon の辺の傾きは $\{\overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\kappa}_m\}$ 。

(注)

上のように $\overline{\kappa}_1 \leq \dots \leq \overline{\kappa}_m$ とすると、 N の辺は

$$\mu = \mu(j) = \sum_{k=1}^{m-j} \overline{\kappa}_k.$$

定理 1, 2 の $k=0$ の部分は次の命題よりしたかう。

命題 4.4

$P_m(t, x; \tau, \xi) = \sum_{j+|d|=m} a_{j,d}(t, x) \tau^j \xi^d$ において、

$(A - \mu_0, M)$ と、 $(\partial_t^j P_m)(t, x; 0, e_n) \in t^{\nu - \kappa_j} \times E_M$ ($j=0, 1, \dots, m$)

を仮定する。 P_m が τ について、 $t > 0$ で双曲型とすると、

$$(\partial_t^j \partial_\xi^\alpha P_m)(t, x; 0, e_n) \in t^{\nu - \kappa(j+|\alpha|) - (1-\mu_0)|\alpha|} \times E_M$$

証明の概略

$x = \hat{x}$ を fix する。 $\eta \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}$ に対して、 τ の多項式

$$P_m(t, \hat{x}; \tau, e_n + p\eta) \text{ を考える。}$$

(t, η) を fix するとこれは (p, τ) につき多項式で、 τ について双曲型だから $p=0$ の近傍で analytic な m 個の根 $\tau_j(t, \eta; p)$ ($j=1, \dots, m$) をもつ。 $(A - \mu_0, M)$ により、 (η, p) が有界な範囲を動くとき、 $|\tau_j(t, \eta; p)| \leq C \cdot t^{\mu_0 - 1}$ である。

一方、 $P_m(t, \hat{x}; \tau, e_n)$ を t を parameter とする τ の多項式とみて、補題 4.3 を使うと、 $\bar{\kappa}_1 \leq \dots \leq \bar{\kappa}_m$ がきまって、根 $\sigma_j(t)$ を

$$|\sigma_j(t)| \leq C \cdot t^{\bar{\kappa}_j} \quad (j=1, \dots, m) \text{ ととれる。}$$

この二つのことをあわせると、

$$\left\{ \begin{array}{l} P_m(t, \hat{x}; \tau, e_n + p\eta) = \prod_{j=1}^m (\tau - \sigma_j(t, \eta; p)) \quad \text{--- (7)} \\ \sigma_j(t, \eta; p) \text{ は } (t, \eta) \text{ をとめるごとに } p \text{ につき, analytic} \\ |\sigma_j(t, \eta; p)| \leq C \cdot t^{\mu_0 - 1} \\ |\sigma_j(t, \eta; 0)| \leq C \cdot t^{\bar{\kappa}_j} \end{array} \right\} \quad \text{--- (8)}$$

Cauchy の積分公式によって、

$$|\partial_p^R \phi_j(t, \gamma; 0)| \leq C_R t^{\mu_0-1} \quad (\forall j, R) \quad \text{--- (9)}$$

$\mu = \nu - k_j$ なる直線は $\{K_1, \dots, K_m\}$ できる Newton polygon の下にあるから、(7), (8), (9) により、

$$\left| \partial_t^j \partial_p^R (P_m(t, x; \tau, e_n + p\gamma)) \right|_{p=0, \tau=0} \leq C \cdot t^{\sum_{\ell=1}^{m+R} K_\ell} \cdot t^{R(\mu_0-1)} \\ \leq C \cdot t^{\nu - k(j+R) + (\mu_0-1)R}$$

左辺は $(\partial_t^j \langle \gamma, \partial_x \rangle^R P_m)(t, x; \tau, e_n)$ だから、これより結論がしたがう。 $(\langle \gamma, \partial_x \rangle = \sum_{j=1}^n \gamma_j \partial_{x_j})$ ▲

§ 5. 定理 1, 2 の証明の概略

定理 1, 2 の証明は Ivrii-Petrov [1] の定理 4.1 の証明の方法を Newton polygon の 1 辺ごとに使うことによってなされる。

Newton polygon N において、点 $(m, 0)$ から順に垂直でない辺を $L_1, \dots, L_\ell$ とし、 L_ℓ を $\mu = \nu_\ell - K_\ell$ とする。命題 4.1 で p を十分大きくとることによって、 $M=1$, μ_0, ν_ℓ, K_ℓ は正整数としてよい。簡単のために、 $\mu_{m,0}^{(0)} < \infty$ としよう。定理 1 のために示すべきことは、 $\ell=1, \dots, \ell$ に対して、

$$[W]_{\ell} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^j \partial_x^{\alpha'} P_{m-k} (t, x; 0, e_n) \in t^{\nu_\ell - K_\ell(j+k'+h) - h + (\mu_0-1)|\alpha'|} \times C^\infty \\ (h=0, \dots; m; j+k' \leq m-k) \end{array} \right.$$

である。 $h=0$ に対しては、命題 4.4 によってすでに示されているから、次の命題を示せばよい。

命題 5.1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \partial_t^j \partial_{x'}^{d'} P_m(t, x; 0, e_n) = j! d'! t^{\nu - \kappa(j+|d'|) + (\mu_0 - 1)|d'|} b_{j, d'}^{(0)}(t, x) \\
 & \partial_t^j \partial_{x'}^{d'} P_{m-h}(t, x; 0, e_n) = j! d'! t^{\nu - \kappa(j+|d'|+h) - h + (\mu_0 - 1)|d'| - \varepsilon_{h, j, d'}} b_{j, d'}^{(h)}(t, x), \\
 & b_{j, d'}^{(h)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \quad (h = 0, 1, \dots, m; j + |d'| \leq m - h) \text{ であり,} \\
 & 0 < \tilde{\nu} < \nu, \mu_0 - 1 \leq \tilde{\kappa} < \kappa, 0 \leq j_0 < m \text{ なる整数 } \tilde{\nu}, \tilde{\kappa}, j_0 \\
 & \text{があって} \begin{cases} \tilde{\nu} - \tilde{\kappa}(m - j_0) = \nu - \kappa(m - j_0) \\
 b_{j, d'}^{(0)} \in t^{(\tilde{\kappa} - \kappa)(m - j_0 - j - |d'|)} \times C^\infty \quad (j + |d'| > m - j_0) \\
 b_{m-j_0, 0}^{(0)}(0, 0) \neq 0, b_{j, d'}^{(h)}(0, x) \neq 0 \quad \text{--- --- --- } \textcircled{10} \\
 \varepsilon_{h, j, d'} \leq (\kappa - \tilde{\kappa})(m - j_0 - h - j - |d'|) \quad (h \geq 1),
 \end{cases}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

以上のことを仮定するとき、 P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0 -well-posed ならば、

$$\varepsilon_{h, j, d'} \leq 0 \quad (h = 1, \dots, m; j + |d'| \leq m - h)$$

$\kappa_1 = \mu_0 - 1$ のときの $[N]$, はすでに示されている。 $((A - \mu_0, M)$ による)。 $\kappa_1 > \mu_0 - 1$ のときは、命題 5.1 において、 $\kappa = \kappa_1, \nu = \nu_1, \tilde{\kappa} = \mu_0 - 1, \tilde{\nu} = m(\mu_0 - 1), j_0 = 0$ とすると、仮定がすべて満たされて、したがって $[N]$, がいえる。以下、 $[N]_2, [N]_3, \dots$ の順に命題 5.1 をくりかえし使うことで $[N]_n$ ($n = 1, \dots, \ell$) が証明できる。 $(\textcircled{10})$ を仮定してよいことについては実は少し議論が必要であるが、細かいことなので省略する。)

定理 2 については、命題 4.2 によって、 $\tau_0 = 0$ としてよい

ことに注意すると、次の命題が示せばよい。(k=0 の場合の結論は命題 4.4 から導びける。)

命題 5.2

$$\partial_t^j \partial_{x'}^{d'} P_{m-k}(t, x; 0, e_n) = j! d'! t^{\nu-k(j+d'+k)-k+(\mu_0-1)|d'|} b_{j,d'}^{(k)}(t, x),$$

$$b_{j,d'}^{(k)} \in C^\infty \quad (k=0, 1, \dots; m; j+|d'| \leq m-k) \text{ とする。}$$

$$b_{j,d'}^{(0)}(0,0) = 0 \quad \text{for } j+|d'| \leq d-1$$

$$b_{d,0}^{(0)}(0,0) \neq 0$$

とすると、P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0 -well-posed なる、 $b_{j,d'}^{(k)}(0,0) = 0$ for $k+j+|d'| \leq d-1$.

上の命題 5.1, 5.2 が key point であるから、この証明を書かねばならないのであるが、紙数の関係と、Ivni-Petrov [1] の定理 4.1 の証明を少し modify するだけなので省略させていただく。

§ 6. 定理 3 の証明の概略

命題 4.2 によって、 $\tau_0 = 0$ としてよい。

$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ なる正整数を M, m, k, ν, d により depend して適当にとり、

$$\begin{cases} t = SP^{-\omega_0} \\ x_j = y_j P^{-\omega_j} \quad (j=1, \dots, n) \end{cases} \quad (P > 0)$$

なる座標変換をすると、P は P_P へうつり、任意の正整数 N

に於いて.

$$P_p = p^{\alpha\omega_0} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \left\{ S^{\nu-\kappa d-d} \prod_{\ell=1}^d (s\partial_s - i\lambda_\ell) D_{y_n}^{m-d} \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N p^{-j} R_j(s, y; D_s, D_y) + p^{-(N+1)} \tilde{R}_{N+1,p}(s, y; D_s, D_y) \right\}$$

となる。但し、 α は M, m, κ, ν, d のみで定まる定数で、 R_j は m 次の微分作用素で係数は $S^{-m} \times E_M$ に入る。又 $\tilde{R}_{N+1,p}$ は m 次作用素で係数は $p \rightarrow \infty$ のとき、 $S^{-m} \times E_M$ で有界。さらに、 $D_{y_n}^{m-d+1}, \dots, D_{y_n}^m$ は $R_1, \dots, R_d$ にでてこない。このとき、

$$e^{-i p y_n} \cdot P_p \cdot e^{i p y_n} = p^{\alpha\omega_0+m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \left\{ S^{\nu-\kappa d-d} \prod_{\ell=1}^d (s\partial_s - i\lambda_\ell) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N p^{-j} S_j(s, y; D_s, D_y) + p^{-(N+1)} \tilde{S}_{N+1,p}(s, y; D_s, D_y) \right\}$$

となる。 $(S_j, \tilde{S}_{N+1,p}$ は $R_j, \tilde{R}_{N+1,p}$ と同様の作用素)

$$\max_{1 \leq \ell \leq d} \operatorname{Re} i\lambda_\ell = \operatorname{Re} i\lambda_1 = -\operatorname{Im} \lambda_1, \quad \text{としてよい。}$$

$$\alpha = i\lambda_1, \quad \mu_\ell = \lambda_1 - \lambda_\ell \quad (\ell = 1, \dots, d) \quad \text{とすると}$$

$$s^{-\alpha} \cdot e^{-i p y_n} \cdot P_p \cdot e^{i p y_n} \cdot s^\alpha = p^{\alpha\omega_0+m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \left\{ S^{\nu-\kappa d-d} \prod_{\ell=1}^d (s\partial_s + i\mu_\ell) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N p^{-j} T_j(s, y; D_s, D_y) + p^{-(N+1)} \tilde{T}_{N+1,p}(s, y; D_s, D_y) \right\} \\ \Rightarrow p^{\alpha\omega_0+m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}}{i^d} \cdot L_p \quad \text{となる。}$$

但し、 $T_j, \tilde{T}_{N+1,p}$ は $R_j, \tilde{R}_{N+1,p}$ と同様の作用素。

$$L_0 = S^{\nu-\kappa d-d} \prod_{\ell=1}^d (s\partial_s + i\mu_\ell) \quad \text{とする。}$$

$L_p u = 0$ を漸近的に解くため、次の補題を用意する。

補題 6.1

$K \subset \mathbb{R}^n$ の compact set とするとき, $f \in E_M$, $\text{supp } f \subset [0, T] \times K$ に対して, $(S\partial_s + i\mu)v = S^{-d}(\log S)^j f(s, y)$ の解として,

$$v(s, y) = S^{-d} \sum_{h=0}^j g_h(s, y) (\log S)^{j-h} + S^{-i\mu} \sum_{h=0}^j A_h(y) (\log S)^{jH-h},$$

$g_h \in E_M$, $\text{supp } g_h \subset [0, T] \times K$, $A_h \in C_0^\infty(K)$ がとれる。

さらに, $\text{Re } \alpha < \text{Re } i\mu$ のときは, $A_h \equiv 0$ ($\forall h$) とできる。

系 6.2

$$\prod_{l=1}^d (S\partial_s + i\mu_l)v = S^{-d}(\log S)^j f(s, y) \quad (f \in E_M, \text{supp } f \subset [0, T] \times K)$$

の解として,

$$v = S^{-d} \sum_{h=0}^j g_h(s, y) (\log S)^{j-h} + \sum_{\substack{\text{Re } i\mu_l \leq \text{Re } \alpha \\ 1 \leq l \leq d}} S^{-i\mu_l} \sum_{h=0}^{j+d-1} A_{l,h}(s, y) (\log S)^{j+d-h},$$

$g_h, A_{l,h} \in E_M$, $\text{supp } g_h, \text{supp } A_{l,h} \subset [0, T] \times K$

がとれる。

さて, $L_p \left(\sum_{j=0}^N u_j p^{-j} \right) = O(p^{-(N+1)})$ とする。

まず, $u_0(s, y) \equiv u_0(y) \in C_0^\infty(K)$, $u_0(0) = 1$ とすると,

$$L_0 u_0 = 0 \quad \text{となる。}$$

次に, $T_1 u_0 \in S^{-m} \times E_M$ だから,

$L_0 u_1 = -T_1 u_0$ の解として,

$$u_1 \in S^{-m-d+(N+1)d} \times E_M + \sum_{\text{Re } i\mu_l \leq m+d-(N+1)d} S^{-i\mu_l} \sum_{h=0}^{d-1} E_M (\log S)^{d-h}$$

がとれる。以下、順に系 6.2 を使って

$$u_j = \sum_{l=1}^{jd+1} S^{-d_l^{(j)}} \sum_{h=0}^{jd-1} (\log S)^{jd-h} \gamma_{j,l,h}(s, y),$$

$$\tilde{h}_{j,l,k} \in E_M, \quad \text{supp } \tilde{h}_{j,l,k} \subset [0, T] \times K,$$

$$0 \leq \text{Re } d_l^{(j)} \leq (2j-1)m + j\nu - j(k+1)d \quad (l=1, \dots; j \geq 1).$$

ととれる。

$$\begin{cases} V_p^{(N)} = \sum_{j=0}^N u_j p^{-j} \\ U_p^{(N)} = e^{i p y_n} S^0 \tilde{\chi}_p(s) V_p^{(N)} \end{cases}$$

とかく。但し、 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi(t) \leq 1$,

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq \frac{1}{2}) \\ 1 & (t \geq 1) \end{cases}, \quad \tilde{\chi}_p(s) = \chi(sp^{\frac{1}{2\Delta}}), \quad \Delta = 2m + \nu - (k+1)d.$$

$$\begin{aligned} \text{このとき、} \quad (\partial_s^\nu \tilde{\chi}_p)(s) &= p^{\frac{\nu}{2\Delta}} (\partial_s^\nu \chi)(sp^{\frac{1}{2\Delta}}) \\ &= s^{-\nu} \tilde{\chi}_\nu(sp^{\frac{1}{2\Delta}}), \quad \text{supp } \tilde{\chi}_\nu \subset [\frac{1}{2}, 1], \\ &\quad (\nu = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

となっている。求める結果は次の2つの補題から出る。

補題 6.3

定理3の仮定の不等式が成立するとき、ある定数 $\tilde{C} > 0$ があって、

$$\|\tilde{u}\|_{p,t} \leq \tilde{C} \cdot p^{(q-p)\omega_n} \|P_p \tilde{u}\|_{q,t}^{(*)}$$

$$\text{for } p \gg 1, \quad \forall t \in (0, 1], \quad \forall \tilde{u} \in C_0^\infty(B^+)$$

$$\text{但し、} \begin{cases} B^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad t^2 + |x|^2 \leq 1, \quad 0 \leq t\} \\ \|v\|_{p,t} = \begin{cases} \|D_{y_n}^p v\|_{L^2(B_t^+)} & (p \geq 0 \text{ のとき}) \\ \|v\|_{H^p(B_t^+)} & (p \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|v\|_{g,t}^{(*)} = \begin{cases} \|v\|_{H^g(B_t^+)} & (g \geq 0) \\ \sup_{w \in C_0^\infty(B_t^+)} \frac{|(v, w)_{L^2(B_t^+)}|}{\|D_{y_n}^{|\delta|} w\|_{L^2(B_t^+)}} & (g \leq 0) \end{cases} \\ B_t^+ = \{(s, y) \in B^+; s \leq t\} \end{array} \right.$$

補題 6.4

$0 < t_0$ と原点の compact 近傍 K を適当にとると, $\delta > 0, C > 0$ があって,

$$\begin{cases} \|U_p^{(N)}\|_{p,t_0} \geq \delta \cdot p^p \\ \|P U_p^{(N)}\|_{g,t_0}^{(*)} \leq C p^{\alpha \omega_0 + \frac{m}{2\Delta} + g - \frac{Re \varrho}{2\Delta}} \end{cases}$$

この2つの補題によって,

$$p \leq (\delta - p)\omega_n + \alpha \omega_0 + \frac{m}{2\Delta} + g - \frac{Re \varrho}{2\Delta}$$

$$\therefore Re \varrho \leq C_0(\delta + m - p)$$

(C_0 は M, m, κ, ν, d により δ depend する.)

文 献

- [1] V.Y. Ivniĭ - V.M. Petkov: Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys, 29 (1974), 1-70.
- [2] R. Sakamoto: Cauchy problem for degenerate hyperbolic

equations, Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), 785-816.

- [3] T. Mandai : On energy inequalities and regularity of solutions to weakly hyperbolic Cauchy problems, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.
- [4] T. Mandai : Necessary conditions for the well-posedness of flat Cauchy problems and regularity-loss of solutions, in preparation.