

対称空間上の固有函数の境界値と積分表示

日本女子大 峰村 勝弘

§ 1. Helgason の結果と予想

周知の様は, S. Helgason は, 1970 年の Nice Congress で, 単位円内部 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ における laplacian

$$\Delta = (1 - x^2 - y^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad z = x + iy$$

の固有函数はすべて, 単位円周 $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の上の hyperfunction φ とある複素数 μ により, 次の Poisson 積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} \right)^\mu \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

として得られることを示し, 一般の (non-compact) 対称空間での成立を予想した ([1]). 以下これを Helgason 予想と呼ぶことにする。まず上の定理を簡単に説明しよう。

Lie group $G = SU(1, 1) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$ の $P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の作用を

$$g(z) = (\alpha z + \beta) / (\bar{\beta} z + \bar{\alpha}), \quad z \in P_1(\mathbb{C})$$

により定まる。 $K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ とおくと、 K は $0 \in D$ の isotropy subgroup となる。 G は D に推移的に作用するから、 $G/K \ni gK \mapsto g(0) \in D$ に同型となる。 以下、 G/K と D を同一視する。 G の subgroups M, A, N を

$$M = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1+i\epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & 1-i\epsilon \end{pmatrix} \mid \epsilon \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義し、 $P = MAN$ とおく。 P は $1 \in S$ の isotropy subgroup となる。 従って、 $G/P \cong S$ となる。 S 上の hyperfunction 全体を $\mathcal{B}(S)$ と書く。

次に、 S 上の real-analytic functions 全体を $\mathcal{A}(S)$ で表わす。 U を、 S を含む $\mathbb{C}$ における開集合とし、 $H(U)$ を U 上の holomorphic functions 全体がなす空間とし、 U 内の compact sets 上の一様収束で位相を入れた top. vector space を表わす。 $\mathcal{A}(S)$ の strong dual を $\mathcal{A}(S)'$ とおくと

$$\mathcal{B}(S) \cong \mathcal{A}(S)'$$

が成立する。 この同型対応については後に述べる。

1.2 $\varphi \in \mathcal{A}(S)$ を一つとり固定しよう。 任意の $\psi \in \mathcal{A}(S)$ に対して

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) \psi(e^{i\theta}) d\theta$$

とおくと、 $\mathcal{A}(S) \ni \varphi \mapsto \psi(\varphi) \in \mathbb{C}$ は $\mathcal{A}(S)'$ に属する。 従って 以下は「対応」 $\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{A}(S)'$ とみなす。

$n \in \mathbb{Z}$ に対し $\varphi_n \in A(S)$ を

$$\varphi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$$

で定める。任意の $\varphi \in A(S)'$ は $A(S)'$ の位相で

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi_n$$

と展開される。そこで a_n の満たすべき条件は

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| r^{|n|} < \infty \quad (1 > r \geq 0)$$

D 上の G -不変な differential operators を $\mathcal{D}(D)$ と書くことにすれば、 $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ であり、 $\mathcal{D}(D)$ は Δ により生成される。すなわち、 $\mathcal{D}(D) \cong \mathbb{C}[\Delta]$ 。 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$A(D, \lambda) = \{ u \in \mathcal{B}(D) \mid \Delta u = \lambda(u+1)u \}$$

と置く。ここで $\mathcal{B}(D)$ は D 上の hyperfunctions 全体のなす空間である。 Δ は elliptic であるから、 $A(D, \lambda)$ の元は real analytic である。

$$P(z, e^{i\theta}) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2}$$

と置く。任意に θ を固定し、 $P_\lambda(z, e^{i\theta}) = P(z, e^{i\theta})^{\lambda+1}$

は $A(D, \lambda)$ に属することを容易に確かめられる。従って $\varphi \in A(S)'$

に対し D 上の函数 $P_\lambda(\varphi)$ を

$$(P_\lambda(\varphi))(z) = \varphi(P_\lambda(z, \cdot))$$

で定義すると、 $P_\lambda(\varphi) \in A(D, \lambda)$ と存在する。

また、 $u \in A(D, \lambda)$, $g \in G$ に対し

$$(\pi(g)u)(z) = u(g^{-1}(z)) \quad , \quad z \in D$$

と取れば: π に對し $A(D, \lambda)$ は G -module と成る。 — ③

$\varphi \in B(S)$ に對し

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(\omega) = |\alpha\omega - \beta|^{2\lambda} \varphi(g^{-1}(\omega)),$$

$$\omega \in S, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

と取れば: π_λ に對し $B(S)$ は G -module と成り, P_λ は

$B(S)$ から $A(D, \lambda)$ への G -homomorphism と成る。 — ④

と成る。 — ⑤

$$\begin{array}{ccc} B(S) & \xrightarrow{P_\lambda} & A(D, \lambda) \\ \pi_\lambda(g) \downarrow & & \downarrow \pi(g) \\ B(S) & \xrightarrow{P_\lambda} & A(D, \lambda) \end{array} .$$

②. $\varphi_n \in A(S)$ に對し $f_\lambda^n = P_\lambda(\varphi_n)$ と取れば。 ③を

$$A(S) \ni \varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi_n \quad \text{に對し}$$

$$P_\lambda(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f_\lambda^n$$

と成り, 又 f_λ^n は (12) に對し

$$\begin{cases} f_\lambda^n(e^{i\theta}z) = e^{in\theta} f_\lambda^n(z) \\ f_\lambda^n(r) = (1-r^2)^{\lambda+1} r^{|n|} \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|+1)} \end{cases}$$

$$\times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, |n|+1; r^2) \quad (0 \leq r < 1)$$

と成る。 — ⑥ 任意の $f \in A(D, \lambda)$ は

$$f(e^{i\theta}z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z) e^{-in\theta} d\theta$$

と展開されるから、 $\lambda \notin -\mathbb{N}$ ならば $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z) e^{-in\theta} d\theta$
は f_λ^n の scalar 係数に等しいことがわかる。従って

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n f_\lambda^n \quad (b_n \in \mathbb{C})$$

という展開が得られる。ここで、元の f_λ^n の具体的な形を見ることが出来る。このとき、この係数 b_n は S 上の hyperfunction の φ_n による展開の係数の満たす条件

$$(1) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n| r^{|n|} < \infty \quad (1 > r \geq 0)$$

を満足するもの。 $\varphi = \sum b_n \varphi_n$ と $\alpha < 1$ と $\varphi \in \mathcal{O}(S)'$ があり、

$P_\lambda(\varphi) = f$ となることは容易にわかる。故に、 $\lambda \notin -\mathbb{N}$ ならば P_λ が全射であることが結論される。

実は、この方法で、Lorentz group の場合は全く同様に、同じ定理が証明出来るのだが、 $SU(n, 1)$, $Sp(n, 1)$, FII では弱い形の定理しか証明出来ない。又この方法は f_λ^n の explicit な形を必要とするため、対称空間の rank が 2 以上の場合は実行不可能である。

§ 2. 固有函数の境界値

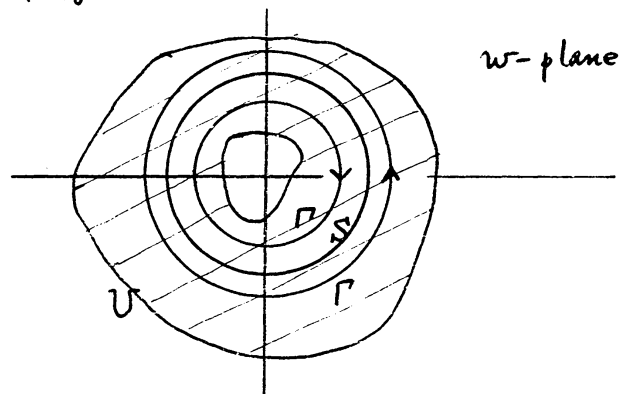
この § では, § 1 とは見方を変えて, 同じ問題を考へてみる。まず § 1 での $\beta(S) \cong \alpha(S)'$ の同型対応について述べよう。(詳しくは [])。定義より

$$\beta(S) = \lim_{U \supset S} H(U-S)/H(U)$$

である。 $F \in H(U-S)$ の定める $\beta(S)$ の元 φ を $\varphi = [F, U]$ ある。 $\varphi(w) = [F(w)]_{w=w}$ として記す。 φ の S 上の積分 $\int_S \varphi(w) dw$

$$\int_S \varphi(w) dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(w) \frac{dw}{w}$$

で定まる。但し Γ は



で与えられる積分路である。積分は代表元 F と積分路 Γ の取り方に依る。 $\psi \in \alpha(S)$ と $\varphi \in \beta(S)$ に対して, ある $U \supset S$, $F \in H(U-S)$ が存在して, $\varphi = [F]$, $\psi \in H(U)$ となる。 $\tau = \tau^*$, $[\psi(w)F(w)]$ により ψ と φ の積 $\psi\varphi$ を定義する。この積により $\beta(S)$ は $\alpha(S)$ -module となる。 $U \supset S$ に対して

$U_0 = \{w \in U \mid |w| < 1\}$, $U_\infty = \{w \in U \mid |w| > 1\}$ とおく。

$E_0, E_\infty \in H(\mathbb{C}-S)$ を $|w| < 1$ のとき $E_0(w)=1$, $E_\infty(w)=0$ とし $|w| > 1$ のとき $E_0(w)=0$, $E_\infty(w)=-1$ とし定義する。

$\psi \in A(S)$ に対し $\psi \in H(U)$ なる ψ をとり, $G \in H(U-S)$ を $G(w) = E_0(w)\psi(w)$ で定めれば $\psi \mapsto [G]$ は $A(S)$ から $B(S)$ への injection を与える。以下 $\cong$ を用いて $A(S) \subset B(S)$ と考へる。 $\psi \in H(D)$ に対し $[E_0\psi] = [E_\infty\psi]$ であることは注意する。

また $\varphi \in B(S)$ と $\psi \in A(S)$ に対し pairing (φ, ψ) を

$$(\varphi, \psi) = \int_S (\varphi\psi)(w) dw$$

で定める。この pairing により φ は $A(S)'$ の元とみなせ、

$$B(S) \cong A(S)'$$

が得られる。容易に

$$\begin{array}{c} B(S) \cong A(S)' \\ \uparrow \quad \curvearrowright \\ A(S) \end{array}$$

が可換であることはわかる。従って、上の同一視により $\varphi \in B(S)$ の Poisson 積分は

$$(\mathcal{P}_S(\varphi))(z) = \int_S P_\lambda(z, w) \varphi(w) dw$$

$$= (\varphi(w), P_\lambda(z, w))$$

で与えられる。

次に, $\varphi \in \mathcal{B}(S)$ の Poisson 積分を φ の定義函数を使って,
具体的に書き下してみよう。

$$P(z, w) = \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2}$$

は $w \in S$ に関して real analytic である。 $w^* = \bar{w}$ によって

$$\frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} = \frac{w}{w - z} - \frac{w}{w - \frac{1}{\bar{z}}}$$

と書き直せる。 $z = z^*$

$$Q(z, w) = \frac{w}{w - z} - \frac{w}{w - \frac{1}{\bar{z}}}$$

とすれば, $z \in D$ を fix すると $Q(z, w)$ は S の近傍で正則で, $Q(z, w) = P(z, w)$ ($w \in S$) を満たす。

$Q(z, w) = P(z, w) > 0$ であるから $Q_\lambda(z, w) = Q(z, w)^{\lambda+1}$

が S の近傍で正則で, $Q_\lambda(z, w) = P_\lambda(z, w)$ なるように定義出来る。従って $\varphi = [F, U] \in \mathcal{B}(S)$ に対して, Γ を次の様にとれば

$$(P_\lambda(\varphi))(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q_\lambda(z, w) F(w) \frac{dw}{w}.$$

例 13.4 $P_0(\varphi_n) \quad \varphi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$

① $n > 0$ の場合

$$\varphi_n(\omega) = [\varepsilon_0(\omega) \omega^n]_{\omega=\omega}$$

$$\begin{aligned} (P_0(\varphi_n))(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{w}{w-z} - \frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}} \right) \varepsilon_0(w) \omega^n \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \frac{w^n}{w-z} dw = z^n \end{aligned}$$

② $n < 0$ の場合

$$\varphi_n(\omega) = [\varepsilon_0(\omega) \omega^{-|n|}]_{\omega=\omega} = [\varepsilon_\infty(\omega) \omega^{-|n|}]_{\omega=\omega}$$

$$\begin{aligned} (P_0(\varphi_n))(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{w}{w-z} - \frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}} \right) \varepsilon_\infty(w) \omega^{-|n|} \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(D)} \left(\frac{w}{w-z} - \frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}} \right) \omega^{-|n|} \frac{dw}{w} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \left(\frac{w}{w-z} - \frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}} \right) \omega^{-|n|} \frac{dw}{w} \\ &= \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^{-|n|} = \bar{z}^{|n|} \end{aligned}$$

$$\text{従って } P_0(\varphi_n) = \begin{cases} z^n & n \geq 0 \\ \bar{z}^{|n|} & n < 0 \end{cases}$$

この結果は確かに $f_\lambda^n(z)$ の $\lambda = 0$ の場合と一致している。

2. $f_\lambda^n = P_\lambda(\varphi_n)$ の hyperfunction としての境界値が次の様

に1を取るととが出来る。超幾何函数に対する Gauss の変換
公式 ($\alpha+\beta-\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ とする。)

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; z) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z) \\ &+ \Gamma(\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z) \end{aligned}$$

に γ

$$\begin{aligned} f_{\lambda}^{\eta}(x) &= (1-x^2)^{\lambda+1} x^{|\eta|} \frac{\Gamma(|\eta|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|\eta|-\lambda)\Gamma(-\lambda)} \\ &\quad \times F(\lambda+1, |\eta|+\lambda+1, 2\lambda+2; 1-x^2) \\ &+ (1-x^2)^{-\lambda} x^{|\eta|} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} F(|\eta|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; 1-x^2) \end{aligned}$$

$$(-2\lambda-1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と表わされる。 $z \in D - \{0\}$ に 2 個の異なる parameter λ が
ある。

$$\begin{aligned} D - \{0\} &\approx S \times (0, 1) \\ &\Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G/K - \{eK\} &\approx K/M \times (0, 1) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ kaK &\longleftrightarrow (kM, y) \qquad y = e^{-\alpha(\log a)} \end{aligned}$$

容易に $D \ni z = x e^{i\theta}$ とする $x = (1-y)/(1+y)$ とすると
わかる。従って

$$f_{\lambda}^n(x) = y^{\lambda+1} \left(\frac{2}{1+y}\right)^{2\lambda+2} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|} \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|-\lambda)\Gamma(-\lambda)} \\ \times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, 2\lambda+2; \frac{4y}{(1+y)^2}) \\ + y^{-\lambda} \left(\frac{2}{1+y}\right)^{-2\lambda} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} F(|n|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; \frac{4y}{(1+y)^2})$$

$z = z''$

$$\varphi(e^{i\theta}, y) = \left(\frac{2}{1+y}\right)^{2\lambda+2} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|} \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|-\lambda)\Gamma(-\lambda)} \\ \times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, 2\lambda+2; \frac{4y}{(1+y)^2}) \times e^{in\theta}$$

$$\psi(e^{i\theta}, y) = \left(\frac{2}{1+y}\right)^{-2\lambda} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \\ \times F(|n|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; \frac{4y}{(1+y)^2}) \times e^{in\theta}$$

とある。 $f_{\lambda}^n(re^{i\theta}) = e^{in\theta} f_{\lambda}^n(r)$ には注意が必要;

$$f_{\lambda}^n(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta}, y) y^{\lambda+1} + \psi(e^{i\theta}, y) y^{-\lambda}$$

から導かれる。 $z = z''$ $\varphi(e^{i\theta}, 0)$, $\psi(e^{i\theta}, 0)$ には意味がある。

$z = z''$ $\varphi(\omega) = \varphi(\omega, 0)$, $\psi(\omega) = \psi(\omega, 0)$ とある。

$$\beta_{\lambda}(f_{\lambda}^n) = \varphi$$

$$\beta_{-(\lambda+1)}(f_{\lambda}^n) = \psi$$

と定まる。 直ちに

$$\int \beta_{\lambda}(f_{\lambda}^n) = 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \varphi_n$$

$$(2) \quad \left\{ \beta_{-(\lambda+1)}(f_\lambda^n) = 2^{2\lambda+2} \frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(1n+\lambda+1)}{\Gamma(1n-\lambda)} \varphi_n \right.$$

がわかる。一方任意の $f \in A(D, \lambda)$ は

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n f_\lambda^n$$

と展開出来る。 $z = z'$

$$F(w) = \varepsilon_0(w) \sum_{n \geq 0} b_n w^n + \varepsilon_\infty(w) \sum_{n < 0} b_n w^n$$

$$G(w) = \varepsilon_0(w) \sum_{n \geq 0} b_n \frac{\Gamma(1n+\lambda+1)}{\Gamma(1n-\lambda)} w^n \\ + \varepsilon_\infty(w) \sum_{n < 0} b_n \frac{\Gamma(1n+\lambda+1)}{\Gamma(1n-\lambda)} w^n$$

とあると、 $\{b_n\}$ の(1)の条件を満たし($z'' = z'$) F, G は $H(\mathbb{C}-S)$ に属する z' である。 $z = z''$

$$\beta_\lambda(f) = 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} [F(w)]_{w=z}$$

$$\beta_{-(\lambda+1)}(f) = 2^{2\lambda+2} \frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} [G(w)]_{w=z}$$

とある $A(D, \lambda)$ の $\beta(S)$ への map. β_λ と $\beta_{-(\lambda+1)}$ は定義する。明かには(2)の拡張に及ぶ。 $z'' = z'$

z' は Poisson kernel の $\omega = 1$ の場合。 z' は $P(z, 1)$ に対

2 $\beta_\lambda(P(z, 1))$ を求めよう。まず、 $w=1$ における delta function は $\delta = \left[\frac{1}{1-w} \right]$ であることに注意しておく。

$$f_\lambda^n(z) = P_\lambda(\varphi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\lambda(z, e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta$$

より

$$P_\lambda(z, e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta} f_\lambda^n(z)$$

が得られる。従って $\theta=0$ と

$$P_\lambda(z, 1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_\lambda^n(z)$$

とある。 $\beta_\lambda(P_\lambda(z, 1))$ の定義函数 F は

$$\begin{aligned} F(w) &= 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \left\{ \varepsilon_0(w) \sum_{n \geq 0} w^n + \varepsilon_\infty(w) \sum_{n > 0} w^{-n} \right\} \\ &= 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \left\{ \varepsilon_0(w) \frac{1}{1-w} + \varepsilon_\infty(w) \frac{1}{w-1} \right\} \\ &= 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \cdot \frac{1}{1-w} \end{aligned}$$

とある。故に $\beta_\lambda(P_\lambda(z, 1)) = 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \delta$ が得られる。

ここで省略するが、 $\beta_\lambda, \beta_{-(\lambda+1)}$ は共に $\mathcal{A}(\mathcal{D}, \lambda)$ の

$\beta(S)$ への $\mathbb{C}$ -homomorphism である。すなわち

$$\begin{array}{ccc}
 Q(D, \lambda) & \xrightarrow{\beta_\lambda} & B(S) \\
 \pi(q) \downarrow & & \pi_\lambda(q) \downarrow \\
 Q(D, \lambda) & \xrightarrow{\beta_\lambda} & B(S)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Q(D, \lambda) & \xrightarrow{\beta_{-(\lambda+1)}} & B(S) \\
 \pi(q) \downarrow & & \pi_{-(\lambda+1)}(q) \downarrow \\
 Q(D, \lambda) & \xrightarrow{\beta_{-(\lambda+1)}} & B(S)
 \end{array}$$

は互に可換である。 $\beta_\lambda = \text{id}$ を認めれば

$$\beta_\lambda \beta_\lambda = 2^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} \text{id}.$$

(id は恒等作用素) と存在 β_λ の逆元 $\beta_{-(\lambda+1)}$ を導くことができる。

$$\begin{aligned}
 \beta_\lambda \beta_\lambda(\varphi)(\omega) &= \beta_\lambda \int_S P_\lambda(z, \omega_0) \varphi(\omega_0) d\omega_0 \\
 &= \int_S \beta_\lambda P_\lambda(z, \omega_0) \varphi(\omega_0) d\omega_0 \\
 &= \int_S \beta_\lambda P_\lambda(\omega_0^T z, 1) \varphi(\omega_0) d\omega_0 \\
 &= \int_S \delta(\omega_0^T \omega) \varphi(\omega_0) d\omega_0 = \varphi(\omega)
 \end{aligned}$$

2.2. $\beta_\lambda = \text{id}$ Harish-Chandra の球函数の理論を援用する。 $\beta_\lambda, \beta_{-(\lambda+1)}$ は injective であることは容易に導かれる。(但し $\lambda \notin \mathbb{Z}$ は仮定している。) それを示そう。

$u \in Q(D, \lambda)$ とし $u \neq 0, \beta_\lambda(u) = 0$ とし矛盾を出す。 β_λ の $\mathbb{C}$ -hom. であることは $u(0) = 1$ と仮定してよい。

$\Rightarrow$ $u_k(z) = \int_K u(k(z)) dk$ とおく。明らかに $u_k(0) = 1$ である。従って Harish-Chandra の球函数の理論より

$$u_k = p_\lambda(1)$$

と表わされる。従って $\beta_\lambda(u_k) = z^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$ が得られるが、一方 z は

$$\beta(u_k) = \int_K \pi_\lambda(k) \beta_\lambda(u) dk = \int_K 0 dk = 0$$

であるので矛盾。

$\Rightarrow$ $z^{-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$ は Harish-Chandra の c -function を用いて、 $C(-\sqrt{1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)$ と表わされることにも注意しておく。

22. 以上の β_λ の性質をまとめると

- (3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z} \text{ のとき } \beta_\lambda: A(\mathcal{D}, \lambda) \rightarrow B(S) \text{ が定義} \\ \quad \text{出来て、} G\text{-homomorphism} \\ \text{(ii)} \quad \beta_\lambda \circ p_\lambda = C(-\sqrt{1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha) \cdot i\lambda \\ \text{(iii)} \quad \beta_\lambda \text{ は injective} \end{array} \right.$

(3) から、 $\lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき p_λ が surjective であることがこのように示される。 $u \in A(\mathcal{D}, \lambda)$ に対し

$$\varphi = C(-\sqrt{1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)^{-1} \beta_\lambda(u)$$

とある。すなわち $\beta_\lambda p_\lambda(\varphi) = C(-\sqrt{-1}(\lambda + \frac{1}{2})\alpha)\varphi = \beta_\lambda(u)$. β_λ は injective であるから $p_\lambda(\varphi) = u$ となる。

最後に、 $\lambda=0$ の場合の $\beta_{-1} p_0$ について述べておこう。 β_{-1} は $\mathfrak{sl}_2$ の定義上からいえないが、次のように $\beta_{-1} p_0$ に意味がつけられる。 $\beta_{-(\lambda+1)} p_\lambda$ を考えよう。

$$\beta_{-(\lambda+1)} p_\lambda : \varphi_n \mapsto f_\lambda^n \mapsto 2^{2\lambda+2} \frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} \varphi_n$$

すなわち $\lambda \rightarrow 0$ とし、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$2^{2\lambda+2} \frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} \rightarrow -2|n|$$

となる。すなわち $\beta_{-1} p_0(\varphi_n) = -2|n|\varphi_n$ と考えよう。

$\beta_{-(\lambda+1)} p_\lambda$ は $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G -hom. である。すなわち $\beta_{-1} p_0$ も $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G -hom. である。すなわち intertwining operator である。すなわち、 D は $\mathfrak{sl}_2$ の作用 $(e^{i\theta}, y)$ を与える。すなわち、容易に、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$n \geq 0 \text{ ならば } \left(\frac{\partial z^n}{\partial y} \right)_{y=0} = -2|n| e^{in\theta}$$

$$n < 0 \text{ ならば } \left(\frac{\partial \bar{z}^{|n|}}{\partial y} \right)_{y=0} = -2|n| e^{in\theta}$$

となる。すなわち、前記述のとおりである。

$$Z^n = P_0(\varphi_n) \quad (n \geq 0), \quad \bar{Z}^{|n|} = P_0(\varphi_n) \quad (n < 0)$$

であるから

$$Z^n|_{y=0} = \varphi_n \quad (n \geq 0), \quad \bar{Z}^{|n|}|_{y=0} = \varphi_n \quad (n < 0)$$

に注意すれば β, P_0 は $Z^n, \bar{Z}^{|n|}$ の Dirichlet data に対して Neumann data を対応させていることがわかる。

§3. 一般の対称空間における Helgason 予想の肯定的解決

§2 において、任意の固有函数に対して、その境界値をとる写像が構成された。そこで、固有函数の球函数展開を用いた。しかし実は一般の (higher rank の) 対称空間において各不変微分作用素が Martin 境界に関して確定対偶型であることより、generic な固有値に関しては (球函数展開することなしに) 固有函数の境界値をとる写像が構成され、§2 の (3) の (i) ~ (iii) と同様の性質を持つことが示され、従って積分表示出来ることが証明される。これらに関しては 岡本-嵯峨 [5] 嵯峨 [4], $SL(3, \mathbb{R})$ に関しては 大島 [6], 一般の対称空間での完全な証明は [3], 写像 β の構成については (確定対偶型微分方程式の理論についても) 大島 [7], 柏原-大島 [2] を参照された。

文献

- [1] Helgason, S. Group Representations and Symmetric Spaces, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, 313-319.
- [2] 柏原正樹-大島利雄, The boundary value problem for the systems of differential equations with regular singularity, to appear.
- [3] 柏原正樹-木幡篤孝-峰村勝弘-岡本清郷-大島利雄-田中誠, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.
- [4] 峰村勝弘, 対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数, 数理論究録 "超函数と線型微分方程式 IV" に掲載予定.
- [5] 岡本清郷-峰村勝弘, 対称空間上の境界値問題について, 数理論究録 227 (1975), 70-74.
- [6] 大島利雄, 対称空間上の境界値問題について, 数理論究録 "対称空間上の不変微分方程式" に掲載予定.
- [7] ———, 確定係数型境界値問題について, 数理論究録 "超函数と線型微分方程式 IV" に掲載予定.