

/

高次元代数多様体の contraction と
cone theorem

川又 雄二郎

高次元の代数多様体を双有理同値類により分類しようという問題を考えます。まず小平次元と食害ファイバリング定理によって荒い分類ができますが、更に詳しく調べるとすると極小モデル (minimal model) の理論が必要になってきます。2次元の場合、つまり曲面論について復習してみよう。非特異完備曲面 S から出発します。 S 上の既約曲線 E は $(E)^2 = (K_S \cdot E) = -1$ (但し K_S は canonical 因子) をみたすとき第1種例外曲線 (又は (-1) -curve) といいます。 S が (-1) -curve を含まないとき S は minimal といいます。もしも (-1) -curve があつたら 双有理正則写像 $S \rightarrow S'$ があつてこれをつぶすことができます。 $P(S') \geq P(S) - 1 > 0$ (P は Picard 数) なので有限回このような "contraction" をやれば minimal model に到達できるわけですが。即ち任意の代数曲面には どれと双有理同値な minimal 曲面が存在するわけですが。ここで 小平次元 etc. は 双有理不変量であることをおもひ出しておきます。さて S を minimal 曲面とすると、まず

$$\kappa(S) \geq 0 \iff K_S \text{ は nef}$$

がわかります。ここで nef というのは numerically effective を短く言ったもので、 $(K_S \cdot C) \geq 0 \quad \forall C \text{ curves on } S$ を意味します。正しいは numerically semi-positive と言った方がよいでしょう。更に K_S nef の場合は linear system $|mK_S|$ ($m \in \mathbb{N}$) の構造がよく調べられていて大変よくわかっています (Enriques-Kodaira の

分類理論)。このことから有名な曲面の分類表が得られます。minimal model は曲面論の出発点であつたわけですが、

さて、これを高次元の場合に拡張しようとするといつても113113と困難が出てきます。以下の議論で最小型"の消滅定理を使うので基礎体の標数は0とします。また簡単のため身体上で考えます。身体でないときも実は同様の結果が成立します。詳しくは拙著 "Cone of curves of algebraic varieties" を参照して下さい。高次元の困難には次の2つがあります。森本氏の画期的な理論により、3次元非特異射影多様体 X から出発して、1回だけつづける contraction $X \rightarrow X'$ の存在が証明されました。これは2次元の場合の (1)-curve の contraction の自然な拡張になっているわけですが、この段階で既に5種類(もしくは8 or 10種類 — 教える方は113113ある)もあり、更に X' は必ずしも非特異とならないうという新現象が出てきました。第2の困難は、 X から極小モデルへの双有理写像が必ずしも正則とならないうということです。これはまた Francia 氏が例をつくりましたが、Reid 氏によりかなり一般化されています。角田氏の曲面の退化の理論もこの現象を扱っています。この論文ではこのホーの困難を解決するのが目的です。即ち、 X (非特異とは限らない) が minimal でなければ "good extremal ray" が存在し (cone theorem), しかもそれはつづける (contraction theorem) ということです。minimal model に至るには更に "elementary transformation" に関する "定理" が必要となります。また X が一般型の minimal model のときはその canonical ring が

convex cone in $N_1(X/Z)$.

$D \in N^1(X)$ が nef $\Leftrightarrow_{\text{def}} (D, z) \geq 0$ for $\forall z \in \overline{NE}(X)$

または big $\Leftrightarrow_{\text{def}} (D^n) > 0$, $n = \dim X$

$D \in N^1(X/Z)$ が relatively nef

$\Leftrightarrow_{\text{def}} (D, z) \geq 0$ for $\forall z \in \overline{NE}(X/Z)$.

Kleiman's criterion [4]

$H \in N^1_{\mathbb{Q}}(X/Z)$ が relatively ample

$\Leftrightarrow (H, z) > 0$ for $\forall z \in \overline{NE}(X/Z) - \{0\}$.

$\text{Div}(X) = X$ 上の Weil 因子の群

$K_X = X$ 上の canonical 因子

$D \in \text{Div}(X)$ に $\tilde{\iota}$ 対して $\mathcal{O}_X(D) = \tilde{\iota}^* \mathcal{O}_{X_{\text{reg}}}(D|_{X_{\text{reg}}})$

但し, $\tilde{\iota}: X_{\text{reg}} \hookrightarrow X$.

例) $\tilde{\iota}$ は $\mathcal{O}_X(K_X) = \omega_X = \text{canonical sheaf}$.

$\mathbb{Q}$ -divisor $\Leftrightarrow_{\text{def}} \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の元

これが $\mathbb{Q}$ -Cartier $\Leftrightarrow$ 何倍かすれば Cartier になる

X が $\mathbb{Q}$ -Gorenstein $\Leftrightarrow K_X$ が $\mathbb{Q}$ -Cartier

$\mathbb{Q}$ -Cartier divisor = $\mathbb{Q}$ -Cartier な $\mathbb{Q}$ -divisor

$\mathbb{Q}$ -divisor $D = \sum r_i D_i$ ($r_i \in \mathbb{Q}$, D_i : 素因子)

に $\tilde{\iota}$ 対して,

$[D] = \sum [r_i] D_i$ (切り捨て)

$\{D\} = D - [D]$ (分数部分)

$\lceil D \rceil = -[-D]$ (切り上げ)

消滅定理 X は 非特異射影多様体, $D \in \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$,

D は nef で big, $\{D\}$ の台は 正規交叉とする。このとき

$H^i(X, \mathcal{O}_X(\lceil D \rceil + K_X)) = 0$ for $i > 0$.
([2][10])

序文で述べましたように以下の議論ではある種の特異点をもった多様体が必然的に登場してきます。Reid氏は次のような定義をしました: X が canonical (resp. terminal) な特異点をもつとは

(1) X は $\mathbb{Q}$ -Gorenstein

(2) ある特異点除去 $f: Y \rightarrow X$ が存在して

$$K_Y = f^*K_X + \sum a_i F_i \quad (a_i \in \mathbb{Q})$$

ここで $\forall a_i \geq 0$ (resp. $\forall a_i > 0$) が成立.

(F_i は X でつづける Y 上の全体的素因子について考える).

[1]より K_X は $\mathbb{Q}$ -Cartier なので $\mathbb{Q}$ -divisor としてひき戻せることに注意しておきます.

X が一般型で, しかもその canonical ring

$$R = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

が有限生成のときは その canonical model

$X_{\text{can}} = \text{Proj } R$ は丁度上記の canonical singularities

をもつことがわかります. terminal singularities

というのはその特殊な場合ですが, minimal

model 上に現われる特異点であると信じられています.

これがうまくいくかどうかは minimal model

の理論が完成するまでは何とも言えません. Elkies

氏は canonical singularities は全て rational sing.

になることを示しました ([1])

次に extremal ray について説明します. これは (-1)-

curve も高次元に拡張したものに相当します. 証明

上の都合から全て relative な場合を考えます. $Z = \text{point}$

とすると relative のときは absolute case になります.

$L \in N^1(X)$ が good relative supporting function

L が relatively nef で
 であるとは $F = L^\perp \cap NE(X/Z) - \{0\}$ が空でなくしかも半空間 $\{z \in N_1(X/Z); (K_X, z) < 0\}$ に完全に含まれることをします。ここで L の直交 $L^\perp$ は $\{z \in N_1(X/Z); (L, z) = 0\}$ です。このとき F を good relative face と言います。 F の次元 (つまり F が生成する $N_1(X/Z)$ の部分空間の次元) が 1 のとき 特に good relative extremal ray と呼びます。ここで good というのは F が cone $NE(X/Z)$ の面であるというだけでなくちゃんとそれを支持する関数 L が存在するということを示しています。残りの半空間 $\{z \in N_1(X/Z); (K_X, z) \geq 0\}$ については何も言いません。曲面の場合には good extremal ray は (-1) -cune, 0 -cune, 1 -cune のいずれかで知られることが知られています (cf. Mori).

最後に minimal model を "定義" します。 X が minimal model であるとは

(1) X は $\mathbb{Q}$ -factorial で terminal singularities をもつ

(2) K_X は nef

ここで $\mathbb{Q}$ -factorial とは X 上の任意の $\mathbb{Q}$ -divisor が $\mathbb{Q}$ -Cartier になるときにいいます。この条件は結果的にそうなっているらしいということであり根拠はありません。 $\mathbb{Q}$ -factorial でない多様体は扱いが難かしく議論がうまくいきません。またこの条件は代数幾何学所環の条件ですが、その下にある複素構造には遺伝しません。今一つよくわからない条件ですが、もう少しよくわかるようになると思います。上の X はこの § の初めから仮定しているように射影的とします。非射影的多様体がたくさん出てくるのも高次元の現象ですが、Kleiman の判定法を使うこともあり射影性が基本的で、

§2. 主定理その他

Contraction Theorem

X : 正規射影多様体で canonical singularities のみをもつ

D : X 上の nef な Cartier 因子で $aD - K_X$ も nef^{big} ($a \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ linear system $|mD|$ は $m \gg 0$ のとき free (RP5, fixed component をもたず base point もない)

Weak Cone Theorem

$\pi: X \rightarrow Z$ 正規射影多様体の全射正則写像

X : canonical singularities のみをもつ

$\Rightarrow \overline{NE}(X/Z) = (\overline{NE}_{K_X}(X/Z) + \sum R_i)^-$

ここで R_i は good relative extremal ray で $-$ は普通の real topology による closure.

特に K_X が relatively nef でなければ少なくとも1つの good extremal ray が存在する.

$\star$ = 主定理で weak としたのは, R_i が locally finite つまり $\overline{NE}(X/Z)$ が K_X が負の側で locally polyhedral になることを主張していないからです (cf. 森理論). しかしここで重要なのは good extremal ray の存在だけでこれは OK です. 証明の順序は森理論のときのように cone をまず求めるわけではなく, contraction の方が先になります.

(1) non-vanishing (2) contraction (3) rationality (4) stability (5) cone の順にやります. 実は一番初めに証明できたのは contraction で, あとは同じ論法のくり返いです. 読者

の中には 1つの定理にまとめられないかと思われ方もあるかもしれません。

まあ contraction theorem をどう使うかを示します。2つの応用があります。

系1 R を $\overline{NE}(X)$ の good extremal ray とする。
 このとき 全射正則写像 $\varphi: X \rightarrow W$ で 連続なファイバーをもつ 次の条件を満たすものが唯一存在する:
 C curve on X , $\pi(C) = \text{point} \iff cl(C) \in R$.

系2 X は canonical singularities をもつ 射影多様体で $K(X) = \dim X$ かつ K_X は nef とする。このとき canonical ring $R = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ は有限生成。

系1は R のかわりに good face F でも OK です。Kleiman の判定条件を使えば contraction theorem より φ が得られます。系2が実は初めに得られた結果でした。あとに述べる stability theorem をつかえば good relative face もつづけることがわかります。このことは 角田氏のやっている退化理論に応用されます。

Non-vanishing

X : 非特異射影多様体

$D_1, D_2, D_3 \in \text{Div}(X)$; $A \in \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$

$r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $r \notin \mathbb{Q}$; $\varepsilon_0 > 0$, $a \in \mathbb{N}$

条件 (1) D_3 は nef

(2) $\forall p, q \in \mathbb{N}$ s.t. $q - pr < \varepsilon_0$, $q \geq a$

$\exists s \in \mathbb{N}$, $pD_1 + qD_2 + sD_3 + A - K_X$ nef & big

(3) $\lceil A \rceil \geq 0$, $\{A\}$ の台は正規交叉
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$
 $H^0(X, \mathcal{O}_X(pD_1 + qD_2 + sD_3 + \lceil A \rceil)) \neq 0$
 for $q - pr < \varepsilon$, $0 \ll q \ll s$.

系3(Shokurov):

X 非特異射影多様体
 $D \in \text{Div}(X)$; $A \in \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$; $a \in \mathbb{N}$
 D は nef, $aD + A - K_X$ は nef & big
 $\lceil A \rceil \geq 0$, $\{A\}$ の台は正規交叉
 $\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(pD + \lceil A \rceil)) \neq 0$ for $p \gg 0$.

($\because$) 上の定理で $D = D_1 = D_2 = D_3$ とおけばよい.

Rationality

$\pi: X \rightarrow Z$ 正規射影代数多様体の全射正則写像で連結ファイバーをもつもの
 X : canonical singularities のみをもつ
 K_X は relatively nef でないとする
 H : X 上の ample 因子
 $\Rightarrow r_{\text{def}} = \max \{t \in \mathbb{R}; H + tK_X \text{ relatively nef}\} \in \mathbb{Q}$.

Stability

$\pi: X \rightarrow Z$ 正規射影多様体の全射正則写像
 X : canonical singularities のみをもつ
 F : good relative face
 $\Rightarrow F$ は good face になる.

系4 $\varphi: X \rightarrow W$ を good face 1) に対応した contraction とする。このとき

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi^*: \text{Pic } W \rightarrow \text{Pic } X) \\ = \{ D \in \text{Pic } X; (D, z) = 0 \text{ for } \forall z \in F \} \end{aligned}$$

特に次は完全列:

$$0 \rightarrow N^1(W) \rightarrow N^1(X) \rightarrow N^1(X/W) \rightarrow 0.$$

このことは cone $\overline{NE}(X)$ が good face F で角をもつことを示しています。だから $\overline{NE}(X)$ は polyhedral に非常に近いわけですね。

上に述べた主定理と minimal model の関係は以下の通りです。このプログラムは Reid 氏によるものですが、最近森氏は別の方向で minimal model を 3次元の場合に作ることに成功したというわけがあります。何はともあれ Reid 式のやり方は次のようなものです。まず非特異射影多様体 X_0 から出発します。求める minimal model はカテゴリ $\mathcal{C}(X_0) = \{ X: \text{正則射影多様体; } \mathbb{Q}\text{-factorial で terminal singularities をもつ, } X_0 \text{ と双有理同値} \}$ の中にあるはずだと考えます。 $X \in \mathcal{C}(X_0)$ について、 K_X が nef ならばこれが minimal model です。もしもそうでなければ weak cone theorem により good extremal ray R が存在し contraction theorem により R の contraction $\varphi: X \rightarrow W$ をつくります。 $A \subset X$, $B \subset W$ を $\varphi|_{X-A}: X-A \xrightarrow{\sim} W-B$ となるような最小の代数的部分集合にとります。 $a = \dim A$, $b = \dim B$ としたとき R は type (a, b) とよばれる。

(イ) $a = n$ のとき: このときは $\dim W < \dim X$ であり、 φ の一般ファイバー X_w は $\mathbb{Q}$ -Fano 多様体 (即ち、

$-K_{X_W}$ は ample) になるので, $\varphi: X \rightarrow W$ を minimal $\mathbb{Q}$ -Fano ファイバー空間と呼びます. このとき X_W は uniruled になると予想されています. この予想が正しいければ X も uniruled になるのび, これで満足することになります.

(ロ) $a = n-1$ のとき: これは good case です. このときは再び $Z \in \mathcal{C}(X_0)$ となりしかも Picard 数は 1 下がります: $P(Z) = P(X_0) - 1$. つまり曲面の場合の (-1) -curve の contraction と同じになります.

(イ) $a < n-1$ のとき: これは X が 3次元以上で特異点をもつか, また X が 4次元以上のときに起こる全く新しい現象で, まだよくわかってはいません. Reid 氏は X が toric 多様体 (つまり代数的トーラスが dense に act しているとき) のときを調べて次のように予想しました: $\bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{O}_Z(mK_Z)$ は $\mathcal{O}_Z$ -多元環の層として有限生成で $X_1 = \text{Proj}(\bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{O}_Z(mK_Z))$ とおくと $X_1 \in \mathcal{C}(X_0)$ となり, しかも X_1 は X よりも "改善" されている. X が 3次元で曲面の semi-stable な退化から来ているときはこの予想が正しいことを角田氏が示しました.

結局 (ハ) の場合の予想が正しいければ, $\mathcal{C}(X_0)$ の中に minimal model か又は minimal $\mathbb{Q}$ -Fano ファイバー空間が存在することになります. 上記の話は relative な場合 $\pi: X_0 \rightarrow Z$ から出発しても同様です. (角田氏の理論はこれに相当します.) また射影多様体の双有理正則写像の分解についても応用できます. (cf [3]).

§3. 証明のスケッチ

詳しくは "Cone of curves ..." を御覧下さい。

Contraction の証明

定義より 特異点除去 $f_i: Y_i \rightarrow X$ が存在して

$$K_{Y_i} = f_i^* K_X + \sum \phi_i G_i, \quad \phi_i \geq 0$$

$$G = \sum G_i \text{ は正規交差}$$

とできる。 $A_1 = K_{Y_1} - f_1^* K_X$, $D_1 = f_1^* D$ とおくと系3より

$$H^0(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(p f_1^* D + \lceil A_1 \rceil)) \neq 0$$

for $p \gg 0$. 従って $H^0(X, \mathcal{O}_X(pD)) \neq 0$ for $p \gg 0$.

従って linear system $|pD|$ を考えることができます。その base locus $B_S |pD|$ を考察します。 p を 1 に fix し $B_S |pD| \neq \emptyset$ と仮定します。再び特異点除去 $f: Y \rightarrow X$ をとり

$$K_Y = f^* K_X + \sum a_i F_i, \quad a_i \geq 0$$

$$f^* |pH| = |L| + \sum r_i F_i, \quad |L| \text{ free}$$

$$\sum r_i F_i \text{ fixed part}$$

$$f^*(aH - K_X) - \sum \delta_i F_i \text{ ample } (0 < \delta_i \ll 1)$$

$$F = \sum F_i \text{ は正規交差}$$

となるようにします。ここで Kodaira の lemma: nef & big ならば "ample より大きい" を使っています。次の量を定義します。(これがキーです。"log" との関係があります。)

$$C = \min \left\{ \frac{a_i + 1 - \delta_i}{r_i} \right\}$$

δ_i は小さいので $C > 0$ となります。 ample というのは open condition ですから δ_i をうまくとて、

$$-Cr_0 + a_0 - \delta_0 = -1$$

$$-Cr_i + a_i - \delta_i > -1 \quad \text{for } i \neq 0$$

とできます。 $A = \sum_{i \neq 0} (-Cr_i + a_i - \delta_i) F_i$, $B = F_0$ とはす。

次の $\mathbb{Q}$ -divisor を考えます:

$$N = p'f^*D + A - B - K_Y$$

$$\cong cL + f^*((p' - cp)D - K_X) - \sum \delta_i F_i$$

ここで $p' \geq cp + \alpha$ とすると N は ample になり 消滅定理より

$$H^1(Y, \mathcal{O}_Y(p'f^*D + \lceil A \rceil - B)) = 0$$

が得られます。従って

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(p'f^*D + \lceil A \rceil)) \rightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B(p'f^*D + \lceil A \rceil))$$

再び 系 3 を使って最後の H^0 は 0 でないことがわかります。 $f^*\lceil A \rceil = 0$ に注意すると $B \not\subset B_S/pD$ となります。一方 $B \subset B_S/pD$ でしたから p/p' ならば $B_S/pD \not\subset B_S/pD$ が得ました。あとは *noetherian induction* を使って簡単に $B_S/pD = \emptyset$ for $p \gg 0$ が得られます。(証明終)

Non-vanishing の証明

これも実は上の contraction の証明と同様にできます。 X の次元に関する帰納法を使います。まず $D_3 \neq 0$ とします。仮定 (2) で $pD_1 + qD_2 + sD_3 + A - K_X$ が ample といえることがわかります。 $\alpha \in \mathbb{N}$ を $\alpha A \in \text{Div}(X)$ となるようにとります。Serre の消滅定理と Riemann-Roch の定理 (最高次のみ) を使って、十分大きな整数 k をとると

linear system $|\alpha k(p_1D_1 + q_1D_2 + s_1D_3 + A - K_X)|$ の元 M であって ある点 $x \notin \text{Supp}(A)$ での multiplicity が $\alpha k(n+1)$ 以上のものがとれることがわかります。ここで

$q_i - p_i r < \varepsilon$ で s_i は十分大きくとります。そして contraction の証明のときと同じような特異点除去 $f: Y \rightarrow X$ をとります。但し L, r_i はこの場合

$$f^*M = L + \sum r_i F_i$$

ととります。また $f^*A + \sum a_i F_i = \sum c_i F_i$ として

$c = \min \{ (c_i + 1 - \delta_i) / r_i \}$ と定義します。すると M の

作り方から $0 < c\alpha_k < n/(n+1)$ となります。

$$A' = \sum_{i=0}^n (-cr_i + d_i - 1) F_i, \quad B = F_0$$

とします。次の $\mathbb{Q}$ -divisor を考えます：

$$\begin{aligned} N &= f^*(pD_1 + qD_2 + sD_3) + A' - B - K_Y \\ &\cong cL + f^*((p - c\alpha_k p_1)D_1 + (q - c\alpha_k q_1)D_2 \\ &\quad + (s - c\alpha_k s_1)D_3 + (1 - c\alpha_k)(A - K_X)) - \sum d_i F_i \end{aligned}$$

再び N は ample になり消滅定理を使って全射

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(f^*(pD_1 + qD_2 + sD_3) + A'))$$

$$\longrightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B(f^*(pD_1 + qD_2 + sD_3) + A'))$$

を得ます。帰納法の仮定から最後の H^0 は 0 でなく、 $f_* A' \leq A$ に注意すると結局

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pD_1 + qD_2 + sD_3 + A)) \neq 0.$$

次に $D_3 \cong 0$ の場合を考えます。仮定(2)を使うと今度は D_1 と $D_1 + rD_2$ が nef になることがわかります。 $D_1 + rD_2 \neq 0$ であれば上と同様の議論が成立します。もしも $D_1 + rD_2 \cong 0$ ならば結局 $D_1 \cong D_2 \cong D_3 \cong 0$ となります。消滅定理と Riemann-Roch の定理 (X は numerically class のみによるということ) より

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(pD_1 + qD_2 + sD_3 + A)) \\ = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(A)) \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

Rationality の証明

これもまた contraction theorem の証明と同様に行います。 $\forall \mathbb{Q}$ とし矛盾を導きます。 H は very ample としてよい。また M を Z の ample 因子とします。まず non-vanishing を使って

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pH + q\alpha K_X + s\pi^*M)) \neq 0$$

for $q\alpha - pr < \varepsilon$, $0 \leq q \leq s$ を導きます。ここで $\alpha \in \mathbb{N}$ は αK_X が Cartier になるようにとります。次に

前の手法を使って ある p, δ があって $0 < \delta\alpha - p\gamma < \varepsilon$ であつ $B_S | pH + \delta\alpha K_X + S\pi^*M | = \emptyset$ となることを示します。このとき $pH + \delta\alpha K_X + S\pi^*M$ は nef, 従つて $pH + \delta\alpha K_X$ は relatively nef になります。これは r のとり方と矛盾します。 (証明終)

Stability の証明

L を F に対応した good relative supporting function とします。Kleiman の判定条件から $pL - K_X$ は ample for $p \gg 0$ となります。 M を Z の ample 因子とします。このとき non-vanishing theorem を適用して

$H^0(X, \mathcal{O}_X(pL + S\pi^*M)) \neq 0$, $0 \ll p \ll S$ を得ます。前と同様にして ある p, S に対して

$B_S | pL + S\pi^*M | = \emptyset$ を出します。更に S を大きくして $L' = pL + S\pi^*M$ が nef であつ $L' - K_X$ が ample なようにとります。このとき L' が F の good supporting function になります。 (証明終)

Weak cone theorem の証明

$\varphi: X \rightarrow W$ を good face F に対応した contraction とすると容易に $F = \overline{NE}(X/W) - \{0\}$ がわかります。従つて次の補題を示せば十分です。(F の次元を "順" に下げっていく)

補題 $\dim N_1(X/Z) \geq 2$ のとき,

$$\overline{NE}(X/Z) = \left(\overline{NE}_{K_X}(X/Z) + \sum_{L \neq 0} F_L \right)^-$$

ここで L は全ての $N_{\mathbb{Q}}^1(X/Z)$ で 0 にならないう good relative supporting functions を亘る。

証明 右辺 = B とする. 明らかに $\overline{NE}(X/Z) \supset B$. 両辺が一致しないとして矛盾を導びきます. $\dim N_1(X/Z) \geq 2$ なので分離関数 $M \in N_1^1(X/Z)$ があり,

$$\begin{cases} M \text{ は } K_X \text{ の 定数倍でない} \\ M > 0 \text{ on } B - \{0\} \\ (M, z) < 0 \text{ for some } z \in \overline{NE}(X/Z). \end{cases}$$

M は $\overline{NE}_{K_X}(X/Z)$ 上 正なので ある relatively ample な $\mathbb{Q}$ -Cartier divisor H と 非負有理数 a があて $M = H + aK_X$ となる. Rationality より good relative supporting function $L = H + bK_X$ ($b \in \mathbb{Q}$) を得る. M は K_X の定数倍でないから $L \neq 0$. $F \subset B$ で $M > 0$ on $B - \{0\}$ より $a < b$. 従って M は relatively ample となり矛盾. (証明終)

参考文献

1. R. Elkies, Rationalité des singularités canoniques, Invent. Math., 64 (1981), 1-6
2. Y. Kawamata, A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann., 261 (1982), 43-46
3. Y. Kawamata, Cone of curves of algebraic varieties, preprint
4. S. Kleiman, Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math., 84 (1966), 293-344
5. S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., 116 (1982), 133-176
6. M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, Algebraic Varieties and Analytic Varieties,

紀國屋, 1983, 131-180

7. M. Reid, *Decompositions of Toric morphisms*,
Arithmetic and Geometry II (Shafarevich volume),
Birkhäuser, 1983, 395-418
8. M. Reid, *Projective morphisms according to*
Kawamata, preprint
9. V. V. Shokurov, *Theorem on non-vanishing*,
preprint
10. E. Viehweg, *Vanishing theorems*, *J. reine angew.*
Math., 335 (1982), 1-8.