

離散スペクトルをもつ

CLASSICAL FLOWS について.

京大 理 丹羽敏雄

§0. 序文

多様体 M 上に定義された、ある連続な測度 μ を保つなめらかな 1 パラメータ変換群を我々は *Classical flow* と呼ぶ。このとき M 上の複素数値二乗可積分な関数全体の作るヒルベルト空間上には、自然にこの *Classical flow* (φ_t) から、ユニタリ作用素の 1 パラメータ群 $\{U_t\}$ が生成される。この $\{U_t\}$ の固有値や、固有関数の微分可能性などは *Classical flow* の *invariants* であるが、ある種の *Class* においてはこれらの *invariants* が *Classical flow* として完全な *inv.* であることがわかる。即ち：

“ *Classical flow* (φ_t) がエルゴード的であり、離散(純点)スペクトルをもち、かつすべての固有関数が微分可能である場合、 (φ_t) はよく知られたトーラス上の概周期運動とみなしうる” (M はコンパクトとする)

のである。又一般に、エルゴード的な *classical flow* (φ_t) が微分可能な固有関数を有する場合、 (φ_t) がその上に定義されている多様体 M は相空間がトーラスであるような局所自明ななめらかなファイバー空間の全空間とみなしうる。この際 (φ_t) は ファイバーを保ち、従って相空間上に自然に引きおこされる変換群は概周期運動となる。

flow は、より抽象的には測度空間上の測度を保つ 1 パラメータ変換群として定義されるが (これを *abstract flow* と呼ぼう) エルゴード的な離散スเปクトルをもつ *class* に対しては固有値が *abstract flow* としての実数 *inv.* であることが von Neumann によって示された。しかしながら *classical flow* に対しては一般的なことはよくわかっていない。例えば、エルゴード的な *classical flow* の固有値全体 — これは実は、実数の加法による (可算な) 部分群となるのであるが、この群のランクが有限であるか否かすら分っていない。上の結果によれば、この問題の特別な場合に対して解答が与えられる。[1], [2] を参照。

ここでエルゴード理論において知られている結果を以下に必要な限りにおいて述べる。なお詳細については、[4], [5], [6], [7] を参照されたい。

定義1 (M, μ, φ_t) : classical flow

$\Leftrightarrow$ (i) M : C^∞ -manifold

(ii) μ : finite measure on M defined by a positive continuous density ($\mu(M) = 1$ とする.)

(iii) (φ_t) : one-parameter group of diffeomorphisms of M which preserve the measure μ .

$H = L^2(M, \mu)$ とし, $\{U_t\}$ と

$$(U_t f)(\lambda) = f(\varphi_t \lambda) \quad \text{for } f \in H$$

によって定まる. U_t は作用素の 1 経数群とある. $\{U_t\}$ の固有値や固有関数などを $\text{flow}(\varphi_t)$ の固有値, 固有関数と呼ぶ. 特に, λ が (φ_t) の固有値であることは ある $f_\lambda \in H$, $f_\lambda \neq 0$ が存在して

$$U_t f = e^{2\pi i \lambda t} f \quad \text{for all } t$$

を意味する.

定義2 (φ_t) : エルゴード的

$\Leftrightarrow \mu(\varphi_t A \ominus A) = 0$ for all t , あるいは $\mu(A) = 0$ あるいは $\mu(A) = 1$.

このとき次の結果はよく知られている.

定理 1 (φ_t) : エルゴード的

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ が単純な固有値

定理 2 (φ_t) : エルゴード的とし, $\Lambda \in (\varphi_t)$ の固有値の全体とし, H^Λ を固有値 λ に属する固有空間とする.

$\Rightarrow$ (i) Λ は実数群 $\mathbb{R}$ の加法的な部分群.

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\exists \varphi_\lambda \in H^\Lambda$ s.t.

$$\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i = 0 \quad (k_i \in \mathbb{Z}) \quad \text{ならば} \quad \prod_{i=1}^n \varphi_{\lambda_i}^{k_i} = 1$$

又 $|\varphi_\lambda| = 1$.

(iii) $H_d \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} H^\Lambda$, $B_d = \mathcal{B}(H_d)$

ならば $H_d = L^2(B_d)$

ここで classical flow としての同型の概念をよえる.

定義 3 $(M, \mu, \varphi_t), (N, \nu, \phi_t)$ を classical flows

(M, μ, φ_t) が (N, ν, ϕ_t) に classical flows として

C^p -isomorphic であるとは M から N の上への C^p -

diffeomorphism ψ があって, $\psi \circ \varphi_t = \phi_t \circ \psi$, $\psi(\mu) = \nu$ が成り立つときをいう. このとき ψ は次のように書

き表わす:

$$(M, \mu, \varphi_t) \underset{C^p}{\simeq} (N, \nu, \phi_t).$$

§ 1. 主な結果

ここで主な結果を述べる為に必要な定義を与える。

定義4 $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R}, \text{mod } 1, i=1, \dots, n \}$
 を普通のルバーク測度 $dm = dx_1 \cdots dx_n$ をもった n 次元
 トーラスとする。 (T^n, m, φ_t) が振動数 $\omega_1, \dots, \omega_n$ を
 もった Jacobi flow であるというのは (φ_t) が

$$\varphi_t x_i = x_i + \omega_i t \pmod{1}, i=1, \dots, n$$

で与えられているときをいう。又振動数 $\omega_1, \dots, \omega_n$ が
 $\mathbb{Z}$ 上1次独立であるときに限り Jacobi flow の軌道は
 T^n 上稠密であるか。このときはよくに 概周期運動
 という。

主定理1 (M, μ, φ_t) をエルゴード的な classical flow
 $\triangleright M$ をコンパクト, Λ^p をそれに属する固有関数 C^p -
 class であるような固有値の全体とする*) このとき、

もし $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda^p (p \geq 1)$ が $\mathbb{Z}$ 上1次独立であれ
 ば、 M は局所自明な C^{p-1} smooth なファイバー空間の全
 空間とみなせる。その座空間は r 次元トーラス T^r であり
 そのファイバーは M の C^{p-1} 部分多様体である。flow (φ_t)
 はファイバーを保ち、座空間 T^r 上に自然にひきおこさ
 れる flow は概周期運動である。又その振動数は $\lambda_1, \dots$

*) Λ^p は 1 の部分群をなす。

λ_r である。ファイバーは連結とできるかこのときは振動数は $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ と異なる。

注意 主定理1において、 $\text{flow}(\varphi_t)$ のエルゴード性の仮定は弱めることができ、 M 上致る所 dense であるような軌道があり本でも存在すればよい。なお (φ_t) がエルゴード的であれば、ほとんどすべての軌道は M 上致る所 dense である。

系 主定理1の仮定の ϕ とで $\text{rank } \Delta^p \leq \dim M$

主定理2 (M, μ, φ_t) をエルゴード的 classical flow , M をコンパクトとする。 ($p \geq 1$)

$$H = \sum_{\lambda \in \Delta^p} H^{(\lambda)} \Rightarrow (M, \mu, \varphi_t) \underset{\mathbb{C}^p}{\sim} (T^{\dim M}_M, m, \varphi_t)$$

§2. 主定理の証明

主定理1の証明にあたっては次の補助定理の証明が本質的である。

補助定理 主定理1の仮定の下で、 $f_1, \dots, f_r$ を夫々固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ に属する $\mathbb{C}^p$ -class の微分可能な固有関数とする。このとき $df_1, \dots, df_r^{(*)} \in T^*(M)$ は M 上致る所 1 次

独立である。

(*) $f_j(x)$ は複素数関数であるが、証明の step 1 でわかるように、 $f_j(x) = e^{2\pi i \theta_j(x)}$, $\theta_j(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とおけるこの $d\theta_j$ のかわりに df_j とかく。

証明

Step 1. $f_j(x)$ ($j=1, \dots, r$) はエルゴード的な flow (φ_t) の連続な固有関数であるから。

$$|f_j(x)| = \text{const.} \quad (\text{したがって } = 1)$$

$$(*) \quad f_j(\varphi_t x) = e^{2\pi i \lambda_j t} f_j(x) \quad \text{for all } x \in M, t.$$

さて、写像 P_k を次のように定義する。 ($1 \leq k \leq r$)

$$P_k: M \longrightarrow \mathbb{T}^k \cong T^k : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} ; |z|=1 \}$$

$\mathbb{T}^k$ 上の flow (ψ_t^k) を $\psi_t^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (e^{2\pi i \lambda_1 t} \alpha_1, \dots, e^{2\pi i \lambda_k t} \alpha_k)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{T}^k$, と定義すれば明らかに次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} \varphi_t: M & \longrightarrow & M \\ \downarrow P_k & & \downarrow P_k \\ \psi_t^k: \mathbb{T}^k & \longrightarrow & \mathbb{T}^k \end{array}$$

M はコンパクトで (φ_t^k) の軌道は $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ の独立性から致密であるから、 P_k は上への写像である。

Step 2. さて $df_1, \dots, df_k$ が致密な 1 次独立、即ち写像 P_k は M 上致密な full rank であると仮定しよう。

よく知られているように、集合 $P_k^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{T}^k$ は M の部分多様体になる。しかも任意の $\alpha_0 \in \mathbb{T}^k$ に対してある α_0 の近傍 $U_0 \subset \mathbb{T}^k$ があって $P_k^{-1}(U_0) \subset M$ には直積の構造が入る。

即ち:

$$\exists \tau_0: U_0 \times P_k^{-1}(\alpha_0) \longrightarrow P_k^{-1}(U_0)$$

$$\text{s.t. } P_k \circ \tau_0(\alpha, y) = \alpha \quad \text{for } \forall \alpha \in U_0, y \in P_k^{-1}(\alpha_0).$$

例えば、このことは M に適当にリーマン計量を定義し、それによって ($P_k^{-1}(\alpha_0)$ はコンパクトに注意して) $P_k^{-1}(\alpha_0)$ における指数写像を少し修正することにより得られる。詳細については R. Bishop & R. Crittenden [3] を見られたい。

これは次のことを示すものである: $(M, P_k, \mathbb{T}^k, P_k^{-1}(\alpha_0))$ は局所自明な C^{p-1} -smooth なファイバー空間であり、各空間は k 次元トーラス、そのファイバーは M の C^p -部分多様体である。

Step 3. 帰納法により $df_1, \dots, df_r$ は M 上致る所 1 次独立であることを示そう。 df_1 が致る所独立であることは (4) から明らかであるから $df_1, \dots, df_k$ の 1 次独立性を仮定して $df_1, \dots, df_k, df_{k+1}$ の 1 次独立性を示そう。

さて df_{k+1} が点 $x_0 \in M$ において $df_1, \dots, df_k$ に 1 次従属であると仮定しよう。すると φ_t は微分同型であり $f_j(x)$ は (*) を満たすから、 df_{k+1} は $\varphi_t x_0 \in M$ において $df_1, \dots, df_k$ に 1 次従属である。よって x_0 を通る軌道の閉包 C_{x_0} :

$$C_{X_0} = \overline{\bigcup_{-\infty < t < \infty} \varphi_t X_0}$$

の上で df_{k+1} は $df_1, \dots, df_k$ に 1 次従属である。これは f_{k+1} を $P_k^{-1}(\alpha)$ (Step. 2) 上の関数と考えるとき、 $(C_{X_0} \cap P_k^{-1}(\alpha))$ の点はおべて f_{k+1} の critical point であることを示す。従って、よく知られた Sard の定理により集合 $f_{k+1}(C_{X_0} \cap P_k^{-1}(\alpha))$ の測度は $\mathbb{R}^1$ において零であること示す。所が C_{X_0} がコンパクトであることと、 Ψ_k^* (Step 1.) の軌道が $\mathbb{R}^k$ 上致密的であることから、 $P_{k+1}(C_{X_0}) = \mathbb{R}^{k+1}$ 。故に $f_{k+1}(C_{X_0} \cap P_k^{-1}(\alpha)) = \mathbb{R}^1$ 。これは明らかに矛盾である。

q. e. d.

主定理 1 の証明は補助定理の証明中にすでに与えてある。

主定理 2 の証明に移ろう：

主定理 2 の証明.

補助定理の証明に見られるように $\text{rank } \Lambda^p = \dim M$ も示せば十分である。

さて $r = \text{rank } \Lambda^p$ とし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda^p \in \mathbb{Z}$ 上 1 次独立としよう。 $f_1, \dots, f_r$ をそれぞれ $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ に属する C^p -class の固有関数とする。今 λ を任意の ($\in \Lambda^p$) 固有値 f_λ とそれに属する C^p -class の固有関数とする。 r は Λ^p の rank

であるから、 $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ は $\mathbb{Z}$ 上 1 次従属。即ち

$$\exists k \neq 0, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$$

$$\text{s. t. } k\lambda = k_1\lambda_1 + \dots + k_r\lambda_r$$

従って定理 2 の (ii) から、

$$f_\lambda^k(x) = f_1^{k_1}(x) \cdot \dots \cdot f_r^{k_r}(x)$$

$f_\lambda(x)$ の連続性から $f_\lambda(x)$ は 各 λ_i に対する $P_i^{-1}(\alpha)$ の各連結成分上で定数でなければならぬ。即ち仮定に矛盾。

$$\sum_{\lambda \in \Lambda^p} H^\lambda = H$$

であったから、これは定理 2 の (iii) に矛盾する。直接示すのも容易である。

q. e. d.

— 文 献 —

1. V. Arnold & A. Avez: Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris (1966).
2. A. Avez.: Ergodic theory of dynamical systems vol. 1, 2. Lecture note at Univ. of Minneapolis, Minnesota (1966, 1967)
3. R. Bishop & R. Crittenden: Geometry of Manifolds, Academic press, New York (1964)

4. P. Halmos : Lectures on ergodic theory, Math. Soc. Japan (1956)
5. N. Ikeda, T. Hida & H. Yoshizawa : Theory of flow, Sem. on Prob, vol. 12 (1962) (in Japanese)
6. В. Рохлин : Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, Т. IV, В. 2 (1949) pp 57-128.
7. H. Totoki : Flow and entropy, Sem. on Prob. vol. 20 (1964) (in Japanese)