

Semi-linear な方程式の解の成長と 分枝マニフォールド

阪大理 池田 信行

1°. R^d , $d \geq 1$, z 方程式

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + G(u) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

を考える。ここで $G: [0, 1] \rightarrow R_+$ は次の条件をみたす。

$$(2) \quad \begin{cases} (i) & G \text{ は } [0, 1] \text{ 上 } C^0 \text{ の関数} \\ (ii) & G(0) = G(1) = 0 \\ (iii) & \xi_1 > \xi_2 \text{ ならば } G(\xi_1)/\xi_1 > G(\xi_2)/\xi_2. \end{cases}$$

この時初期条件 f が

$$(3) \quad 0 \leq f \leq 1, \quad f \neq 0, \quad f: \text{連続},$$

ならば, (1) の解 $u(t, x)$ は

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 1$$

なる性質を持つてゐる。この事実は直接的に通常の解析の手法で証明出来る。

2°. 方法的には大道具を持ち出すとはなる

し、しかもその道具自身から (4) を示すのと同性質のことを用いて示されることであるので証明の方法としては好ましくないが、(4) の現象的な意味を示えるにはつぎのような確率過程論的な方法を用いることが有益のように思える。

系列 $\{p_n\}$ は

$$(5) \quad 0 \leq p_n \leq 1, \quad \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 1$$

を満たすものとする。これに対し関数 F を

$$(6) \quad F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n x^n, \quad x \in [0, 1]$$

によって定める。簡単のため

$$F'(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n p_n < \infty, \quad F''(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n < \infty$$

を仮定する。さうに

$$(7) \quad G(x) = (1-x - F(1-x))k, \quad k \text{ は正の定数,}$$

とあけば、 G は (2) の条件を満たしている。以下二つの場合のみを示す。必要経路

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + k(F(u) - u) \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

を考へれば分枝法則から $\{P_n, R\}$ で決まる分枝ブラウン運動がこれに対応している。(M. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe [17]). もう少し詳しく言えば $S = R^d$ とおき, その n 重対稱積を S^n とし, 位相和

$$S = \sum_n S^n, \quad S^0 = \{\emptyset\} \text{ (一員)}, \quad S^1 = S,$$

を作った時, これを状態空間にするマルコフ過程 $X = \{X_t, t \geq 0, P_x, x \in S\}$ についての条件をみたすものが存在する. 記号として R^d 上の関数 g に対応し

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n g(x_j), & x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in S^n, \\ g(x), & x = x \in S, \\ 1, & x = \emptyset, \end{cases} \quad n=2, 3, \dots$$

を考へる. $z = z^n$

$$(9) \quad u(t, x) = \int \hat{g}(X_t(\omega)) P_x(d\omega), \quad x \in S,$$

とおくとき,

(i) $u(t, x) = \widehat{u(t, \cdot)}_{|S}(x), \quad x \in S, \quad \Rightarrow z^n \mid S$ は S への制限を表わす.

(ii) $u(t, x), \quad x \in R^d$, は (8) の解である. ただし g は $0 \leq g \leq 1$ なる連続関数とする. これが目的の分枝ブラウン運動である.

D を R^d のボレル集合でその Lebesgue 測度 $|D|$ が正のものとする。さらに $\bar{D}$ とし

$$Z_t^D(\omega) = \sum_{j=1}^{\xi_t(\omega)} I_D(X_t^{(j)}(\omega)), \quad X_t(\omega) = (X_t^{(1)}(\omega), \dots, X_t^{(\xi_t(\omega))}(\omega)),$$

とおく。ここで I_D は D の特性関数。また $Q = R(F'(1) - 1)$

とおく。このとき S. Watanabe [3] によれば確率変数 W が存在し、 $t \rightarrow \infty$ の時、確率 1 で

$$(10) \quad \frac{Z_t^D(\omega)}{e^{at} t^{-\frac{d}{2}}} \longrightarrow (2\pi)^{-\frac{d}{2}} |D| W$$

が成り立つ。ここで (3) のような f があれば

$$\text{Supp}(f) \supset D$$

なる D 上にのべた性質を持つものがとれる。いま

$$g = e^{\log(1-f)}, \quad u(t, x) = \int \hat{g}(X_t(\omega)) P_x(d\omega),$$

とおけばつぎの断言が成り立つ。

$$u(t, x) \leq \int e^{\log c Z_t^D(\omega)} P_x(d\omega),$$

$$c = \sup_{x \in D} (1-f)(x).$$

(10) の性質を用いると、有界収束の性質を使って

$$(11) \quad \lim_{t \uparrow \infty} u(t, x) = \int e^{\log c \lim_{t \uparrow \infty} z_t^D(\omega)} P_x(d\omega) = 0$$

が言える。一方

$$v(t, x) = 1 - u(t, x)$$

とおけば v は (1) の一意的な解であるので、(11) より

(4) が示されたことになる。

したがって、分枝ブラウン運動で時刻 t における集合 D に這入っている粒子数（道 X_t の成分の数） $z_t^D(\omega)$ が $t \rightarrow \infty$ の時無限になることが (4) が成立つ背景になっているとわかる。

3°. 分枝ブラウン運動と比較して粒子が有界集合の外に早く出て行く場合は (4) が必ずしも成立しない。いま R^1 で、

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + R G(u), & G(z) = 1 - z - F(1 - z), \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

を考えると $0 \leq f \leq 1$, $\text{supp}(f) : \text{compact}$ ならば

$$(13) \quad R < \frac{1}{2} \text{ ならば } \lim_{t \uparrow \infty} u(t, x) = 0,$$

となってしまう。この時対応する分枝マルコフ過程を考えると有界集合に小さくなる粒子数は $t \rightarrow \infty$ の時 0 に近づく。

ている。ただしこの場合は空間全体における粒子数 $N(u)$ は 2^0 のベテ分枝ブラウン運動の時と同じである。

S. Watanabe [3] にはこの他にも多くの典型的な場合について粒子数の漸近的な法則が与えられていて、それに対応して対応する方程式の解の成長問題についての解答が与えられる。

なお (12) に対応する定常な方程式

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + kG(u) = 0$$

については Kolmogorov - Petrovsky - Piscounoff [2] で与えられている。

- [1] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe: Branching Markov processes. I, II, III. J. Math. Kyoto. Univ. 8 (1968) 233-277, 365-410; 9 (1969), 97-162.
- [2] A. Kolmogorov, I. Petrovsky et N. Piscounoff: Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Bulletin de l'Université d'État à Moscou, 1 (1937), 1-25.

- [3] S. Watanabe: Limit theorem for a class of branching processes. Markov processes and potential theory edited by J. Chover. John Wiley & Sons. 1967.