
講義ノート

メゾスコピック系の物理

上智大学理工学部物理学科 大槻 東巳

(1997年8月18日受理)

目次

1	はじめに	584
1.1	半導体ナノ構造の物理	584
1.2	考えている系に関する基礎知識	585
1.3	2次元電子系	587
1.4	伝導度を計算する道具立て	590
1.4.1	Drude 公式	590
1.4.2	久保公式	591
1.4.3	Thouless 公式	593
1.4.4	Landauer 公式	594
2	バリスティック伝導	598
2.1	共鳴トンネリング	598
2.2	量子ポイントコンタクト	601
2.3	十字路	603
2.4	量子ドットとクーロンブロッケード	607
3	拡散領域における伝導	609
3.1	コンダクタンスの揺らぎ	609
3.2	ランダム行列理論による解釈	610
3.2.1	ランダム行列理論	611
3.2.2	Thouless 公式による解釈	613
3.3	Landauer 公式による解釈	614
4	量子ホール効果	617
4.1	エッジ状態	617
4.2	乱れた端子	620
4.3	非平衡分布	620
	参考文献	622

講義ノート作成者：吉田 順司（上智大学理工学部物理学科D1）

Chapter 1

はじめに

1.1 半導体ナノ構造の物理

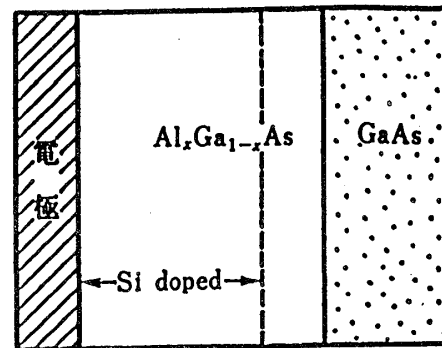
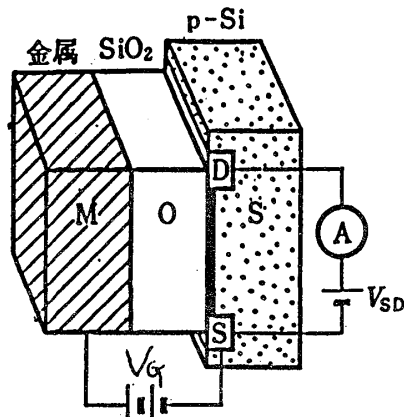
近年、微細構造技術の発展により、半導体ナノ構造と呼ばれるものが作られるようになり、非常に短いスケールでの電気伝導度が調べられるようになった。こうした系は基板上の界面に作られ、界面と垂直な方向の運動は抑制され、電子の運動としては界面に沿ったものだけが重要となる。この2次元電子系は単に薄い膜というのではない。この系は以下のような特筆すべき性質を持っている。

- 1) 電子密度が小さく、これが電場をかけるなどして、変えられる
- 2) 電子密度が小さいため、フェルミ波長が長く (40nm 程度) なり、系の形状と同じ程度になりうる
- 3) 弾性散乱長が非常に長い (10 μ m 程度までなる)
- 4) フェルミ面が丸いとしてよい
- 5) 磁場を垂直方向にかけると、ランダウ量子化の効果が顕著に現れる

大きさが数十ナノメートルの系では、系よりもフェルミ波長、平均自由行程が長いので量子効果が見やすい。このときは不純物による散乱が全くないバリスティック (ballistic) 伝導という現象がみられる。人工的なポテンシャルを作ることにより、系の形状を反映した新奇な伝導度を示す点がたいへん面白い。本講義ではこれについて最初に述べる。

系の大きさがマイクロメートル程度になると、不純物散乱の効果が重要になる。このとき、試料は普遍的な伝導度の揺らぎ (universal conductance fluctuation, UCF) を示す。これは量子干渉効果によるもので、アンダーソン局在と深い関連がある。本講義では、次にこの UCF について説明する。特にランダム行列理論を用いて簡潔に記述する。

最後に量子ホール系について述べる。量子ホール効果とはホール伝導度 σ_{yx} が e^2/h の整数倍に正確に量子化される現象である。系がメゾスコピックになるとこうした系で何が起るかを、実験の例を上げて説明する。



1.2 考えている系に関する基礎知識

これから考える系は2次元電子系である。これからは主に二つの系を念頭におく。一つはSi-MOS、もう一つはGaAs/AlGaAs ヘテロ接合である。図に二つの系の模式図と、何故2次元電子系が形成されるかを示す。

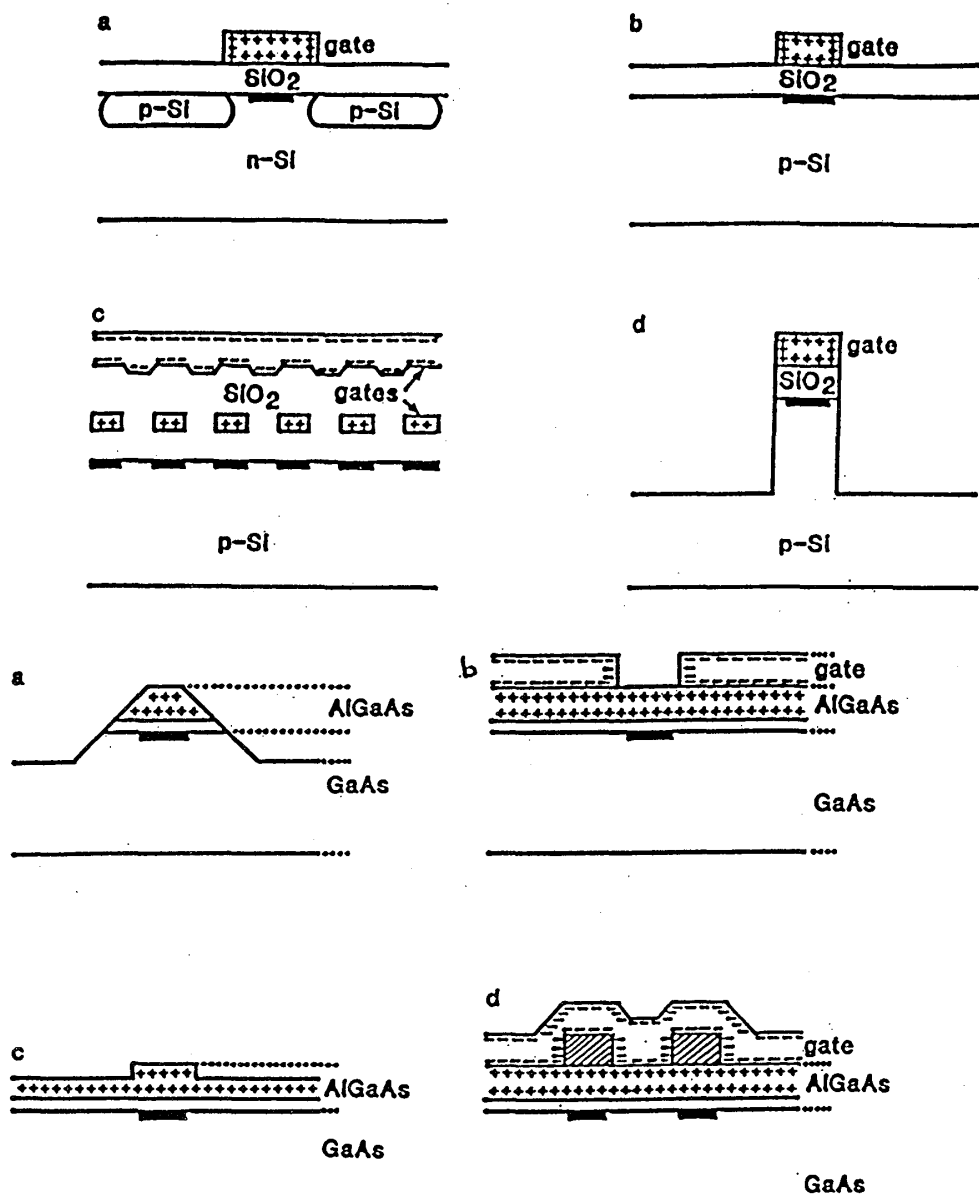
こうした系における典型的なパラメータを表にしておく。ヘテロ接合は格子定数が近い物質をサンドイッチしている。これによって滑らかな界面が出来る。GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}$ と書くと $x \approx 0.3$ である。ドーパントによる散乱が小さくなるように、ドーピングは界面から離れたところにする。こうしてヘテロ接合は不規則ポテンシャルによる散乱が少なくなり、移動度が大きくなる。

	Si	GaAs
m_{eff}	$0.19m$	$0.067m$
ϵ_r	11.9	13.1
n_e	$1 - 10 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$	$4 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$
k_F	$0.56 - 1.77 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$	$1.58 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$
λ_F	37-118 nm	40 nm
E_F	0.63-6.3 meV	14 meV
μ	$10^4 \text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$	$10^4 - 10^6 \text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$
$l(\text{m.f.p.})$	$\sim 40 \text{ nm}$	$10^2 - 10^4 \text{ nm}$
$k_F l$	2.1-21	15.8-1580
$\omega_c \tau$	$\sim 1 \text{ (B/T)}$	1-100 (B/T)

課題 1.1

これらの数値のいくつかは m_{eff} と n_e から計算できる。どれがそうか？ 実際に計算して見よ。

Si-MOS でどのように微細構造を作るかを、図で説明する。黒い領域が2次元電子系が



できているところである [1]。

a) p-Si に電圧をかけてこの間にこられる電子の領域、電子数密度を変える

b) 電子ビームリソグラフィでゲート電極を削る

c) 二つのゲートをいじってより細線幅と電子密度を制御しやすくしたもの

d) ドライエッチング法で作ったもの。幅の最大値がわかるメリットがある

GaAs/AlGaAs ではゲート電極がなくても 2 次元電子系が形成されるので、細線を作り、微細構造を得るのはかえってややこしい。実際は以下のようにやる。

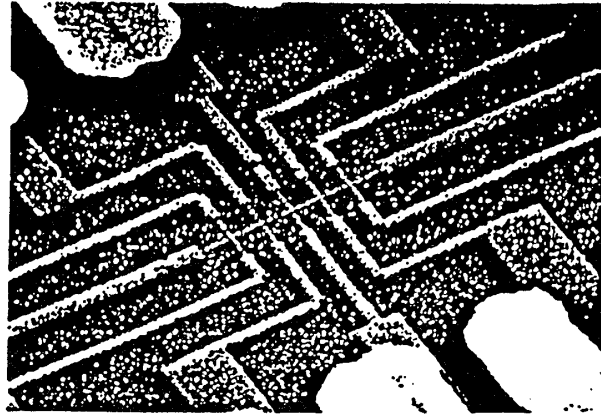
a) 1 μ m 以上の幅なら、化学エッチングでけずる。

もっと幅の細い系を作りたければ、b) から d) のようにする。

b) スプリットゲート法。ゲート部分に負の電極をつけて、電子がきづらいようにする。

c) shallow-mesa depletion 法。

d) スプリットゲート法を改良したもの。



こうして作った GaAs-AlGaAs のナノ構造の SEM 画像を以下に示す。図は上記の方法、c) を使って作った幅 75nm の細線のホールバー [2]。

1.3 2次元電子系

これから扱う 2 次元電子系の理論について、ここで復習しておく。不純物ポテンシャル、電子間相互作用などを無視したハミルトニアンは、

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V_c(z) \quad (1.1)$$

となる。 $V_c(z)$ は 2 次元面に垂直な z 方向の閉じこめポテンシャルである。波動関数はこのとき、

$$\psi(x, y, z) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y)\right) \varphi_n(z) \quad (1.2)$$

となる。 $\varphi_n(z)$ は閉じこめポテンシャルにより、指数関数的に減衰しており、減衰長は数十 Å である。 n は z 方向の波動関数の量子数で、最低準位の E_0 と次にエネルギーの低い E_1 は 20meV 以上離れているので、前出の表にあるようにフェルミエネルギーよりもこの差の方が大きい。よって全ての電子は数 K の低温では $n=0$ にあるとしてよい。今後、 $n=0$ として話を進める。

まずエネルギー E は運動量 p_x, p_y の関数として、

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.3)$$

で与えられる。運動量の大きさが p 以下の位相空間の大きさ Ω は、系の面積を S として

$$\Omega = \pi S p^2 = 2\pi m S E \quad (1.4)$$

となる。これより単位面積あたりの状態密度 $\rho(E)$ は

$$\rho(E) = 2 \frac{1}{h^2 S} \frac{d\Omega}{dE} = \frac{m}{\pi \hbar^2} \quad (1.5)$$

となる。ここで2倍しているのは、スピン縮退を考慮したためである。

課題 1.2

Si-MOS、GaAs ヘテロ接合における状態密度を計算せよ。

次に2次元面と垂直な方向に磁場をかけるとどうなるか、復習しておく。 z 方向の磁場 $(0, 0, B)$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ で表せるので(ランダウゲージ)、2次元電子に対するハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2) \quad (1.6)$$

となる。これは y を含んでいないので波動関数を $\psi = e^{iky} \phi_k(x)$ とおいて $\phi_k(x)$ に対するシュレーディンガー方程式を書き下すと

$$\frac{\hbar\omega_c}{2} \left[-\ell^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{x - X_k}{\ell} \right)^2 \right] \phi_k(x) = E \phi_k(x) \quad (1.7)$$

をうる。ここでいくつか新しい変数が出てきたので説明しておく。 $\omega_c := \frac{eB}{m}$ はサイクロトロン振動数で、これは電子が磁場中でサイクロトロン運動しているときの振動数を表す。 $\ell := \sqrt{\hbar/eB}$ は磁氣的長さで最低ランダウ準位におけるサイクロトロン半径に対応する。 $X_k := -k\ell^2$ は中心座標と呼ばれるもので、(1.7)が原点が X_k にシフトした調和振動子を表していることからそう名付けられている。結局波動関数は規格化条件を考慮して

$$\psi_{n,k}(x, y) = \sqrt{\frac{1}{L_y}} e^{iky} \times \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} \ell}} e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} H_n((x-X_k)/\ell) \quad (1.8)$$

となる。 H_n はエルミート多項式である。

十分広い平面では、調和振動子の中心がどこにあっても物理的には同じなので、固有エネルギー E は X_k によらないはずである。よって

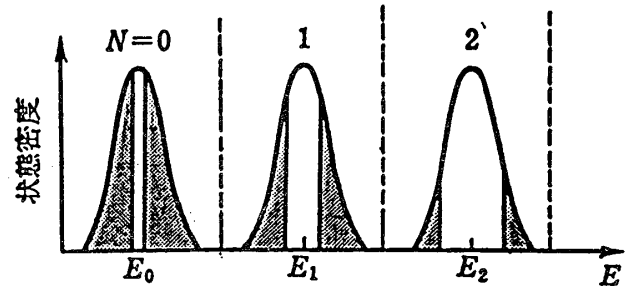
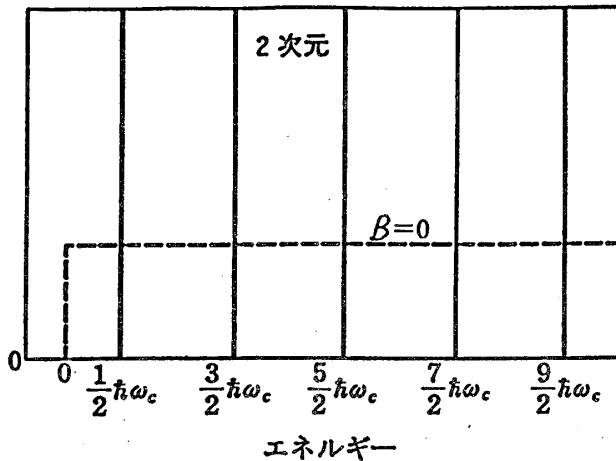
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c \quad (1.9)$$

は強く縮退している。縮退度を計算してみよう。これは取りうる中心座標の数を勘定すればよい。系を $L_x \times L_y$ の平面として y 方向に周期境界条件を課すと

$$kL_y = 2\pi m$$

となるので、中心座標 X_k は間隔 $2\pi\ell^2/L_y$ をおいて並ぶことになる。よって0から L_x の間に中心座標は $L_x L_y / 2\pi\ell^2$ 入ることになる。これが一つのランダウ準位の縮退度である。結局、電子密度 n_e が

$$n_e = \frac{1}{2\pi\ell^2} \quad (1.10)$$



になるまで一つのランダウ準位にはいり、これよりも大きくなると次のランダウ準位に電子は入っていくことになる。この式は電子が磁氣的長さくらいの円に一つずつつまっていく様子を表している¹。

結局、状態密度 $\rho(E)$ は磁場が0だとフラットで $\frac{m}{2\pi\hbar^2}$ 、磁場がかかると $(n+1/2)\hbar\omega_c$ にデルタ関数的なスパイクをもった構造

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n) \quad (1.11)$$

になる。もちろん、実際の系では不純物があるのでこのデルタ関数はなまってしまい、ガウス関数の様になる。

今までは X_k を動かしてもエネルギーは変わらないとした。これは x 方向の並進対称性を仮定したからである。メゾスコピック系では端があることが無視できなくなる。端があると電子は壁のポテンシャルによりエネルギーが上がり、またサイクロトロン運動中に壁で散乱されながら電子は壁に沿って運動する。これはエッジ状態と呼ばれる。この状態が強磁場中でのメゾスコピック系での伝導現象を記述するのに大きな役割を果たすことを授業の後半で述べる。

課題 1.3

10Tの磁場中では一つのランダウ準位を占めることのできる電子数密度はいくつか？ これより、Si-MOS、GaAs/AlGaAsはそれぞれどれくらいのランダウ準位までつまっているかを計算せよ。

¹今スピンの縮退は無視した。多くの系ではゼーマン分離により1方向のスピンしか最低準位には入れないからである。

1.4 伝導度を計算する道具立て

1.4.1 Drude 公式

まず Drude 公式を復習する。抵抗を受けているときの電子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.12)$$

である。定常状態では $\mathbf{v}$ は一定なので

$$\begin{aligned} m \frac{v_x}{\tau} + ev_y B &= -eE_x \\ m \frac{v_y}{\tau} - ev_x B &= -eE_y \end{aligned} \quad (1.13)$$

となり、 $\mathbf{j} = n_e(-e)\mathbf{v}$ より

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

がえられる。零磁場では電気伝導度は

$$\sigma(0) = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \quad (1.15)$$

弱磁場中 $\omega_c \tau \ll 1$ では電気伝導度 σ_{xx} が B^2 に比例する補正を受けて減少し、また強磁場中($\omega_c \tau \gg 1$)では σ_{xx} は小さく、ホール伝導度 σ_{yx} は ne/B という散乱時間 τ や有効質量 m によらないことが分かる。

課題 1.4

抵抗テンソル $R = \sigma^{-1}$ を(1.14)から求めよ。これよりホール抵抗 $R_H = R_{xy}$ が B/ne となることを示せ。medskip

問題は Drude の公式では量子効果が一部しか取り入れられないこと、そもそも τ をどうミクロなモデルから決めるかということである。この点をふまえ以下のように改良する。

まず不規則ポテンシャルがあるような系では電子は拡散運動をしている。この運動は拡散定数 D で記述される。この拡散定数を電気伝導度と結びつけよう。定常状態では、ドリフト電流密度と拡散電流密度が打ち消しあっている。即ち、

$$-\frac{\mathbf{j}}{e} - D\nabla n_e = 0 \quad (1.16)$$

となっているとする。化学ポテンシャル μ はこのとき、一定である。 μ はフェルミエネルギー E_F と電場のポテンシャルエネルギーの和、

$$\mu = -eV + E_F \quad (1.17)$$

であることに注意すると、

$$\nabla E_F = \nabla n_e dE_F/dn_e = \nabla n_e \frac{1}{\rho} \quad (1.18)$$

を用いると、電気伝導度と拡散定数は

$$\sigma = e^2 \rho D \quad (1.19)$$

という関係で結びついていることがわかる。これをアインシュタインの関係式と呼ぶ。 $(\rho$ は単位体積あたりの状態密度である)

拡散定数は定性的に以下のように見積もられる。電子は平均時間 τ ごとに1回散乱される。1回に進む距離は散乱長、 $l = v_F \tau$ 程度である。 t 秒間には散乱は t/τ 回生じる。散乱されて飛んでいく方向はでたらめなので、これは酔歩の問題となり原点からの距離は $l\sqrt{t/\tau}$ と評価できる。これが拡散長 L_D である。拡散定数は拡散長から

$$L_D = \sqrt{2dDt} \quad (1.20)$$

と定義されるので、2次元で

$$D = \frac{v_F^2 \tau}{2} \quad (1.21)$$

となる²。アインシュタインの関係式から

$$\sigma = e^2 \rho \frac{v_F^2 \tau}{2} = e^2 \frac{n_e}{E_F} = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \quad (1.22)$$

となり、Drude の公式を再現する。

1.4.2 久保公式

こうした電気伝導度の議論をいちばん一般に扱うのが久保公式である。久保公式はミクロなハミルトニアンから、電気伝導度を計算する処方箋を与えるものである。これを導出してみよう。

平衡状態の系に外から摂動を加える。このとき、系はほんの少し、熱平衡状態からずれる。このずれを密度行列 $\rho(H)$ で記述する³。平衡系での密度行列 ρ_{eq} は

$$\hat{\rho} := \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tre}^{-\beta \hat{H}}} \quad (1.23)$$

で定義される。ハミルトニアンが時間に依存する場合、密度行列は

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (1.24)$$

という運動方程式を満たす(ハイゼンベルクの運動方程式と符号が逆なことに注意)。この解は

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{\text{eq}} + \int_{-\infty}^t dt' e^{(t-t')\hat{H}/i\hbar} \frac{[\hat{H}_{\text{ext}}, \hat{\rho}_{\text{eq}}]}{i\hbar} e^{-(t-t')\hat{H}/i\hbar} \dots \quad (1.25)$$

²係数1/2はまじめに計算すると出てくる

³状態密度と混同しないこと

となる (微分して確かめればよい。 $t = -\infty$ で系に外力は働いていないと仮定する)。
 外力がかかることによって現れる物理量の変化 $\delta\hat{B}(t)$ は、この密度行列によって

$$\begin{aligned}\delta B(t) &= \text{Tr}\hat{\rho}(t)\hat{B} - \text{Tr}\hat{\rho}_{\text{eq}}\hat{B} \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \text{Tr} e^{(t-t')\hat{H}/i\hbar} \frac{[\hat{H}_{\text{ext}}, \hat{\rho}_{\text{eq}}]}{i\hbar} e^{-(t-t')\hat{H}/i\hbar} \hat{B}\end{aligned}\quad (1.26)$$

となる。

$$\hat{B}(t) := e^{it\hat{H}/\hbar} \hat{B} e^{-it\hat{H}/\hbar} \quad (1.27)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\delta B(t) &= \int_{-\infty}^t dt' \text{Tr} \frac{[\hat{H}_{\text{ext}}, \hat{\rho}_{\text{eq}}]}{i\hbar} \hat{B}(t-t') \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \rho \frac{[\hat{B}(t-t'), H_{\text{ext}}]}{i\hbar}\end{aligned}\quad (1.28)$$

となる。

具体的に $\hat{H}_{\text{ext}}$ として

$$\hat{H}_{\text{ext}} := -\hat{A}X(t) \quad (1.29)$$

を代入すると、

$$\delta B(t) = \int_{-\infty}^t dt' \Phi_{BA}(t-t') X(t') \quad (1.30)$$

とかける。ここで

$$\Phi_{BA}(t) := \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{eq}}, \hat{A}] \hat{B}(t) \quad (1.31)$$

は応答関数と呼ばれる。さて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar} [e^{-\beta\hat{H}}, \hat{a}] &= \frac{1}{i\hbar} e^{-\beta\hat{H}} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda\hat{H}} [\hat{a}, \hat{H}] e^{-\lambda\hat{H}} \\ &= e^{-\beta\hat{H}} \int_0^\beta d\lambda \hat{a} (-i\hbar\lambda)\end{aligned}\quad (1.32)$$

という恒等式を使うと、 Φ_{BA} は

$$\Phi_{BA}(t) = \text{Tr}\hat{\rho}_{\text{eq}} \int_0^\beta d\lambda \hat{A}(-i\hbar\lambda) \hat{B}(t) \quad (1.33)$$

となる。

電気伝導度とは外場、 $\sum_i e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_i$ がかったときの電流の応答である。 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ を用いると、

$$\Phi_{BA}(t) = \text{Tr}\hat{\rho}_{\text{eq}} \int_0^\beta d\lambda e \sum_i \hat{\mathbf{v}}_i(-i\hbar\lambda) \hat{J}(t) \quad (1.34)$$

なので、

$$\sigma_{\mu\nu} = V \int_0^\infty dt' \langle \int_0^\beta d\lambda \hat{J}_\nu(-i\hbar\lambda) \hat{J}_\mu(t) \rangle_{\text{eq}} \quad (1.35)$$

をうる。 μ, ν は電流と電場の方向である。これが久保公式による電気伝導度の表式である。 $\langle \dots \rangle_{\text{eq}}$ は平衡状態における平均を表す⁴。

久保公式を用いて伝導度の Drude の表式を求めてみよう。 J と λH が交換すると仮定する。

$$\sigma = V \int_0^\infty dt \int_0^\beta d\lambda \langle J(0)J(t) \rangle_{\text{eq}} \quad (1.36)$$

となる。今、 $J(t) = e^{-t/\tau} J(0)$ とおくと

$$\sigma = V\beta\tau \langle J^2 \rangle_{\text{eq}} \quad (1.37)$$

となる。 $J = \frac{\sum_i -ev_i}{V}$, $\langle J^2 \rangle_{\text{eq}} = \left(\frac{e}{V}\right)^2 \sum_i \langle v_i^2 \rangle_{\text{eq}}$ を代入すると、

$$\sigma = \frac{e^2}{V} \tau \beta \sum_i \langle v_i^2 \rangle = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1.38)$$

をうる。

1.4.3 Thouless 公式

久保公式は

1. 数値計算にむかない
2. 端子の効果が明かではない
3. 現象論的に実験を解釈できない

等の欠点がある。この点を改良したのが以下に述べる Thouless 公式と Landauer 公式である。

まず電気伝導度のサイズ依存性を解析しよう。電気伝導度は3次元で $1/\Omega \cdot \text{m}$ の次元をもつ。一般の次元では $1/\Omega \cdot \text{m}^{d-2}$ となるので、この長さの次元を消すためにコンダクタンス

$$G := \sigma L^{d-2} \quad (1.39)$$

を定義する。電気伝導度の表式 (1.19) を用いると

$$G = e^2 (\rho L^d) \frac{D}{L^2} \quad (1.40)$$

をうる。 ρL^d は状態密度である。ここで escape time δt_c を電子が拡散して系の端まで逃げる時間、

$$\delta t_c := \frac{L^2}{D} \quad (1.41)$$

⁴このように σ は電流の揺らぎでかける。統計力学でやったように、比熱は内部エネルギーの揺らぎで、帯磁率は磁化の揺らぎでかけるのと同じである

と定義し、不確定性関係から

$$E_c := \frac{\hbar}{\delta t_c} \quad (1.42)$$

を定義する。 E_c は Thouless エネルギーと呼ばれる。すると

$$G = \frac{e^2}{h} (\rho(E_F) L^d) E_c \quad (1.43)$$

がえられる。これが Thouless 公式である。つまりコンダクタンスは Thouless エネルギーの幅にあるエネルギー準位の数ということがわかる。

Thouless 公式の利点はコンダクタンスがエネルギー準位の数で議論できることである。久保公式を数値的に計算しようとするときエネルギー分母が0になり発散が出てしまうとか、電流の行列要素の計算が複雑だとかの困難があるが、これがエネルギー準位の分布だけで議論できてしまうところがよい。

実際に Thouless 公式を使う場合、 E_c としては周期境界条件でのエネルギー固有値と反周期境界条件のもとでエネルギー固有値の差から評価する。状態が局在している場合、固有エネルギーは境界条件によらないはずである。これより $E_c = 0$ となり、フェルミ面の状態が局在状態だと電流を運ばないことがわかる。

1.4.4 Landauer 公式

今までは端子の効果を考えてこなかった。しかしメゾスコピック系では端子の効果が非常に重要となる。これを取り入れるように工夫したのが多チャンネルタイプの Landauer 公式である [3, 4]。この考え方は以下のようなものである。

まず電流、電圧計のついた熱浴 j を考える。 j には不純物ポテンシャルを含まない細線がついているとする。この細線は y 方向に伸びていて、 x 方向に閉じこめられているとすると、波動関数は

$$e^{iky} \phi_{jn}(x) \quad (1.44)$$

という形になり、そのエネルギーは

$$E_{jn} = E_n^{(j)} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.45)$$

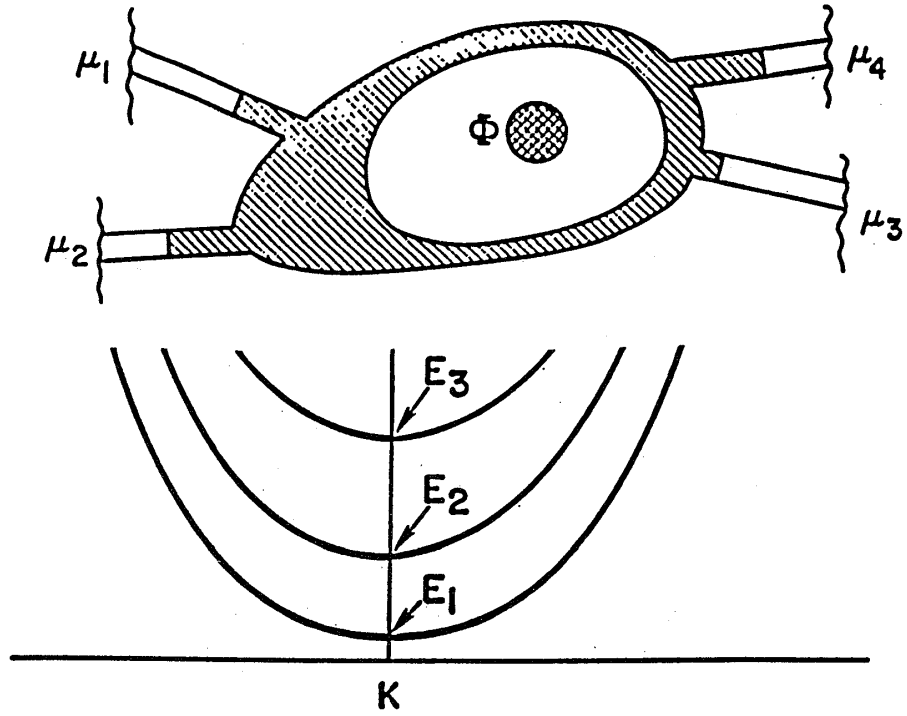
となる (図参照)。

この波が散乱領域を通して熱浴 i に到達し、チャンネル m に入ったとし、その波動関数を散乱行列 S を用いて

$$\sqrt{\frac{v_{jn}}{v_{im}}} s_{ij,mn} e^{ik_{im}y} \phi_{im}(x) \quad (1.46)$$

とかく。透過係数 $T_{ij,mn}$ ($i \neq j$)、反射係数 $R_{ii,mn}$ は

$$T_{ij,mn} = |s_{ij,mn}|^2, \quad R_{ii,mn} = |s_{ii,mn}|^2 \quad (1.47)$$



となる。例えば j 番目の熱浴の n 番目のチャンネルから i 番目の熱浴の m 番目のチャンネルに入る電流 I_{im} は $I_{im} = (-e)v_{im}(v_{jn}/v_{im})|s_{ij,mn}|^2 = -ev_{jn}T_{ij,mn}$ となる。なお v_{jn} は群速度なので

$$v_{jn} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_{jn}(k)}{dk} \Big|_{E_F} \quad (1.48)$$

と計算すればよい。

S 行列のユニタリ性から $S^{-1} = S^\dagger$ が成立する。また運動量と磁場を同時に反転させると、散乱過程は逆になることから $S^*(-B) = S^{-1}(B)$ が成立する。結局、

$$S^T(B) = S(-B), \quad s_{ij,mn}(B) = s_{ji,nm}(-B) \quad (1.49)$$

がえられる。こうして

$$T_{ij,mn}(B) = T_{ji,nm}(-B), \quad R_{ii,mn}(B) = R_{ii,nm}(-B) \quad (1.50)$$

がえられる。これは実験事実を解釈する上でたいへん重要な式である。例えば、磁場を反転させるとき、端子も反転させて始めて対称性が成り立つのである。

次のこの透過係数、反射係数を用いて電気伝導度を計算してみよう。熱浴が化学ポテンシャル μ_i をもっていたとする。熱浴の中で最小の化学ポテンシャルを μ_0 とおく。 μ_0 から μ_i までのエネルギーをもつ状態が運ぶ電流は

$$I = (-e) \int_{\mu_0}^{\mu_i} dE \rho(E) v_{in} = \frac{-e}{h} (\mu_i - \mu_0) \quad (1.51)$$

となりチャンネル番号 n にはよらない。これをふまえて

$$T_{ij} := \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{n=1}^{M_j} T_{ij,mn} \quad R_{ii} := \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{n=1}^{M_i} R_{ii,mn} \quad (1.52)$$

を定義する。

i 番目の熱浴が M_i 個のチャンネルをもっていると、ここから出ていく電流は $(-e)M_i(\mu_i - \mu_0)/h$ で、入ってくる電流は $(-e)(R_{ii}(\mu_i - \mu_0) + \sum_{j \neq i} T_{ij}(\mu_j - \mu_0))/h$ である。電流の保存則より、

$$M_i = R_{ii} + \sum_{j \neq i} T_{ij} \quad (1.53)$$

が成立する。よって

$$I_i = \frac{-e}{h} [(M_i - R_{ii})\mu_i - \sum_{j \neq i} T_{ij}\mu_j] \quad (1.54)$$

がえられる。磁場に関する反転性

$$R_{ii}(\mathbf{B}) = R_{ii}(-\mathbf{B}), \quad T_{ij}(\mathbf{B}) = T_{ji}(-\mathbf{B}) \quad (1.55)$$

から

$$M_i = R_{ii} + \sum_{j \neq i} T_{ji} \quad (1.56)$$

も成立する。これから結局

$$I_i = \frac{-e}{h} \sum_{j \neq i} T_{ij}(\mu_i - \mu_j) \quad (1.57)$$

が導かれる。 $\mu = -eV$ を用いると

$$I_i = \frac{e^2}{h} \sum_{j \neq i} T_{ij}(V_i - V_j) \quad (1.58)$$

となる。

端子が 2 個の場合をまず考えてみよう。この場合、 $M_1 = R_{11}(\mathbf{B}) + T_{12}(\mathbf{B})$, $M_2 = R_{22}(\mathbf{B}) + T_{21}(\mathbf{B})$ である。磁場を反転させると $M_1 = R_{11}(\mathbf{B}) + T_{12}(-\mathbf{B})$, $M_2 = R_{22}(\mathbf{B}) + T_{21}(-\mathbf{B})$ となるので $T_{12} = T_{21} := T$ は磁場を反転させても変わらない。(1.59) より 2 端子抵抗は

$$R_{12,12} := -(\mu_1 - \mu_2)/eI = \frac{h}{e^2} \frac{1}{T} \quad (1.59)$$

となる。これが Landauer 公式である。Landauer はチャンネルが一つの場合を考察したのでこれは multi-channel Landauer 公式とも呼ばれる。

次に 4 端子抵抗を測定を考える。このとき、電流端子を k, l 、電圧端子を m, n とおく。端子 k から電流 I が流れ出て、 l に流れ込む。端子 m, n では電流は 0 である。このとき、(1.55) は $\tilde{I} = -hI/e$ として

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= (M_k - R_{kk})\mu_k - T_{kl}\mu_l - T_{km}\mu_m - T_{kn}\mu_n \\ -\tilde{I} &= -T_{lk}\mu_k + (M_l - R_{ll})\mu_l - T_{lm}\mu_m - T_{ln}\mu_n \\ 0 &= -T_{mk}\mu_k - T_{ml}\mu_l + (M_m - R_{mm})\mu_m - T_{mn}\mu_n \\ 0 &= -T_{nk}\mu_k - T_{nl}\mu_l - T_{nm}\mu_m + (M_n - R_{nn})\mu_n \end{aligned} \quad (1.60)$$

となる。単純な 4×4 行列を解けばよいように見えるが、実際これらは独立ではない。そこで μ_k, μ_l, μ_m から μ_n を引いて、

$$\begin{pmatrix} \tilde{I} \\ -\tilde{I} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_k - R_{kk} & -T_{kl} & -T_{km} \\ -T_{lk} & M_l - R_{ll} & -T_{lm} \\ -T_{mk} & -T_{ml} & M_m - R_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_k \\ \tilde{\mu}_l \\ \tilde{\mu}_m \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

を解く。結局抵抗 $R_{mn,kl}$ は上の行列を D として

$$R_{mn,kl} = \frac{h}{e^2} \frac{T_{km}T_{ln} - T_{kn}T_{lm}}{|D|} \quad (1.62)$$

となる。先に述べた磁場に関する反転性 $T_{ij}(B) = T_{ji}(-B)$ から

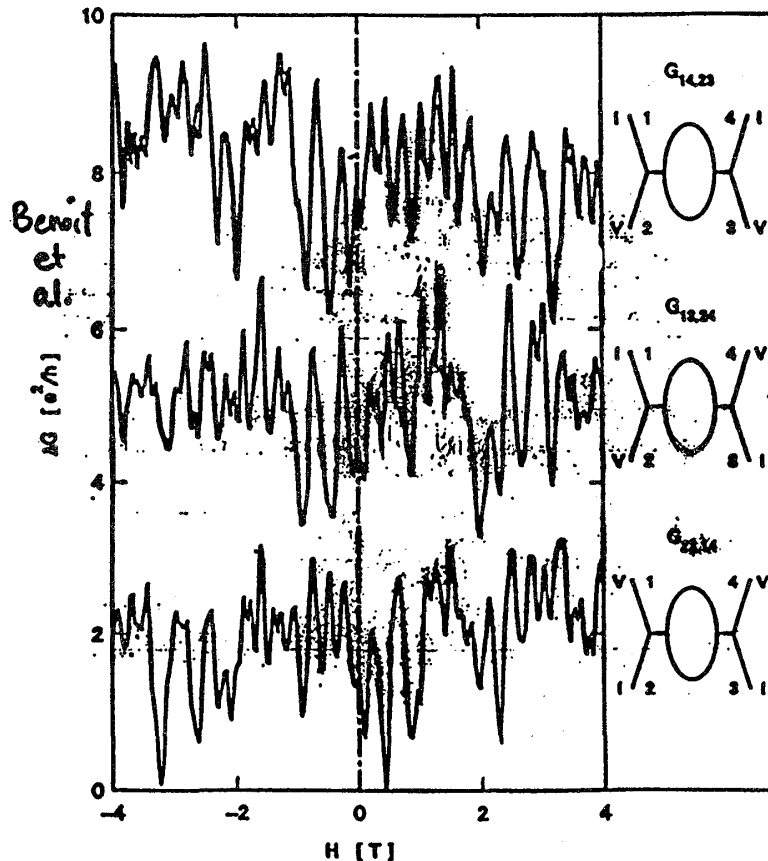
$$R_{kl,mn}(B) = R_{mn,kl}(-B) \quad (1.63)$$

が成り立つことがわかる。このような多端子の場合の公式を Landauer-Büttiker 公式と呼ぶ。

課題 1.5

$M_i = N, R_{ii} = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ とし、 $T_{12} = N_G, T_{13} = 0, T_{14} = K, T_{21} = 0, T_{23} = N, T_{24} = 0, T_{31} = 0, T_{32} = K, T_{34} = N_G, T_{41} = N, T_{42} = 0, T_{43} = 0$ を考える ($N = N_G + K$)。このとき $R_{13,42}, R_{42,13}, R_{12,43}, R_{43,12}$ を求めよ。

久保公式と Thouless 公式はバルクの系では同等である。また久保公式と Landauer 公式は久保公式に端子の効果を取り入れれば同等であることが示されている [5]。直感的にわかりやすいのは Landauer 公式である。



Chapter 2

バリステック伝導

前章までの定式化をもとに、以下具体的な問題を取り上げる。ここで取り上げるのは興味深い膨大な実験、理論のほんの一部であることを知っておいて欲しい。詳しくは文献 [1] や国際会議の Proceeding 等を参照していただきたい [6]。そのなかで本章では不純物散乱が無視できるバリステック伝導を議論する。これは系のサイズ L が弾性散乱長 l_e よりも小さいような、非常に微細なサンプルに適用される。実際、 l_e は数ミクロンで、 L はサブミクロンのオーダーに加工できるので、これは可能である。

2.1 共鳴トンネリング

はじめに共鳴トンネリングという現象について述べておこう。細線の幅が広い領域から狭い領域になったとする。幅の広い領域では幅と垂直方向の運動は波数、 π/L_x の整数倍で量子化され、狭い領域では π/L'_x という値の整数倍で量子化される。結局幅と垂直方向の運動エネルギーが高くなることになる。これは細線に沿った方向に運動している粒子にとっては、壁ができていることに対応する。そこで矩形ポテンシャルの壁があるときの、トンネリング現象を考えよう。

まず 1 次元の量子力学の問題を解こう。矩形ポテンシャルが

$$V(x) = V_0 \quad (0 < x < a), \quad V(x) = 0 \quad \text{otherwise} \quad (2.1)$$

とする。簡単のため、 $V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ とする。今、入射してくる電子のエネルギーは V_0 よりも小さいとすると、矩形ポテンシャルの領域では波動関数は $Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ となる。ただし、 $\kappa^2 = k_0^2 - k^2$ である。今、矩形ポテンシャルの左側で $e^{ikx} + re^{-ikx}$ 、右側で $te^{ik(x-a)}$ とすると、波動関数とその 1 回微分の連続性から

$$\begin{aligned} 1 + r &= A + B \\ ik(1 - r) &= \kappa(A - B) \\ Ae^{\kappa a} + Be^{-\kappa a} &= t \\ \kappa(Ae^{\kappa a} - Be^{-\kappa a}) &= ikt \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる。はじめの二つで A, B を消し、後の二つに代入して、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(1 + r + \frac{ik(1-r)}{\kappa} \right) \\ B &= \frac{1}{2} \left(1 + r - \frac{ik(1-r)}{\kappa} \right) \\ r &= \frac{-i \sinh(\kappa a) / \sin 2\theta}{\cosh(\kappa a) - i \sinh(\kappa a) \cot 2\theta} \\ t &= \frac{1}{\cosh(\kappa a) - i \sinh(\kappa a) \cot 2\theta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

をうる。ただし、 $k + i\kappa = k_0 e^{i\theta}$ とした¹。

課題 2.1

今の解が、 $|r|^2 + |t|^2 = 1$ を満たしていることを示せ。また、 r', t' を求めよ。

この解を見てわかるように、透過確率 T は必ず 1 よりも小さい。それでは壁が二つあるときはどうであろうか？ 壁が二つならより反射されやすくなり、透過率は下がるように思える。しかし実際は量子効果によりもっと複雑なことが起こる。

壁二つの問題を考えるのであるが、境界条件を 8 個用意して、それを解くのは大変であるし、一般性がない。そこで S 行列を使おう。 S 行列とは入射してくる波と散乱されてくる波を記述するものであった。これだと、散乱体は何個もあったとき、扱いづらい。これを工夫して、ポテンシャルの右の領域と左の領域をつなげるトランスファー行列を S 行列から作ってみよう。ポテンシャルが一つするとき、波が左から入射してくる場合と、右から入射してくる場合の線形結合を作ると、

$$e^{ikx} \leftrightarrow \left(t - \frac{rr'}{t'} \right) e^{ikx} - \frac{r}{t'} e^{-ikx} \quad (2.5)$$

と

$$e^{-ikx} \leftrightarrow \frac{r'}{t'} e^{ikx} + \frac{1}{t'} e^{-ikx} \quad (2.6)$$

となるので、左の領域の e^{ikx} と左の領域の e^{-ikx} を $|+L\rangle, |-L\rangle$ 、右のを $|+R\rangle, |-R\rangle$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} |+L\rangle \\ |-L\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{rr'}{t'} & -\frac{r}{t'} \\ \frac{r'}{t'} & \frac{1}{t'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |+R\rangle \\ |-R\rangle \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |+R\rangle \\ |-R\rangle \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

となる。この表式が便利なのは、さらに左にポテンシャルがあるとき、また同様の行列をかけていけばよいことである。例えば S_1, S_2 で特徴づけられる散乱過程が続けて起こると、それぞれに対応するトランスファー行列を M_1, M_2 として、

$$M = M_1 M_2 \quad (2.8)$$

¹ポテンシャルがデルタ関数に近いとき、この解は簡単になる。 $a \rightarrow 0, k_0, \kappa \rightarrow \infty$ として、 $0 < \kappa^2 a := \tilde{V}_0 < \infty$ とすると、

$$r = \frac{-i\tilde{V}_0/2k}{1 + i\tilde{V}_0/2k}, \quad t = \frac{1}{1 + i\tilde{V}_0/2k} \quad (2.4)$$

となる。

となる。これより例えば透過係数 t' は、

$$t' = \frac{t'_1 t'_2}{1 - r_2 r'_1} \quad (2.9)$$

となる。

今、チャンネルが一つの場合を考えた。 N チャンネルの場合、 t, r, t', r' は $N \times N$ の行列になる。このとき、

$$\begin{aligned} t &= t_2(1 - r'_1 r_2)^{-1} t_1, \\ r &= r_1 + t'_1 r_2(1 - r'_1 r_2)^{-1} t_1, \\ r' &= r'_2 + t_2 r'_1(1 - r_2 r'_1)^{-1} t'_2, \\ t' &= t'_1(1 - r_2 r'_1)^{-1} t'_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。

さて、ポテンシャルが L だけ離れて二つ存在する場合を考えよう。1番目のポテンシャルが 0 から始まり、2番目のが L から始まるとする。2番目のポテンシャルでは $e^{ik(x-L)}, e^{-ik(x-L)}$ に対する散乱問題として、 t_2, r_2, t'_2, r'_2 が定義されているので、 r を $r e^{2ikL}$ 、 r' を $r' e^{-2ikL}$ として再定義することが必要で、結局二つポテンシャルがあったときの透過確率は

$$T = \frac{T_1 T_2}{|1 - e^{-2ikL} r_2 r'_1|^2} \quad (2.11)$$

となる。 $T_i = |t_i|^2$ ($i = 1, 2$) は個々の矩形ポテンシャルの透過確率である。

二つのポテンシャルが並ぶと古典的には $T_1 T_2 (1 + R_2 R_1 + \dots) = T_1 T_2 / (1 - R_1 R_2)$ となることに、注意せよ。古典的な値は必ず 1 よりも小さい。量子論的には $e^{-2ikL} r_2 r'_1 = e^{i\alpha} |r_1| |r_2|$ とおくと、 $\alpha = 2\pi n$ のとき、この値は最大値、

$$T_{\max} = \frac{T_1 T_2}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} = \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)}{(1 - |r_1| |r_2|)^2} \quad (2.12)$$

をとる。今、矩形ポテンシャルが同じ形をしてるなら $|r_1| = |r_2|$ なので、

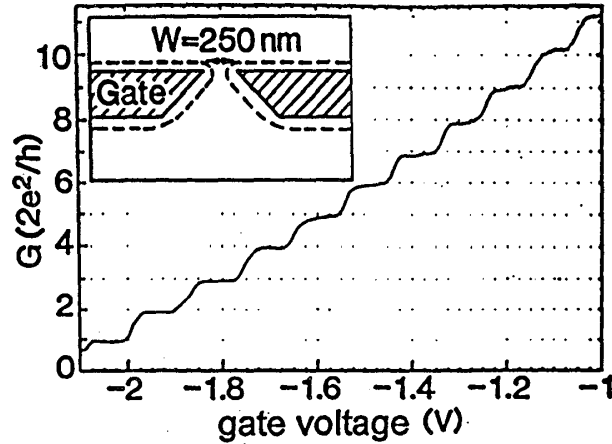
$$T_{\max} = 1 \quad (2.13)$$

となる。つまり二つ壁があった方が、通り抜けやすくなりある場合は透過確率が 1 になってしまうのである。

この透過がいつ起こるかを調べてみよう。 δ を $r_2 r'_1$ の位相として、

$$\alpha = 2kL + \delta = 2\pi n \quad (2.14)$$

とおく。よって、 k の値が π/L おきに透過率 1(perfect transmission) が起こる。これは矩形ポテンシャルの中にある定在波のモードと共鳴していると解釈できる。このような現象を共鳴トンネリングという。共鳴トンネリングは一般にポテンシャルの領域が左右にあり、その真ん中に高いポテンシャルで両側を隔てられた領域がある場合に起こる。このとき、真ん中の領域にある寿命を持った束縛状態があるとし、このエネルギーと外の平面波のエネルギーが同じになったとき、透過率が 1 になるのである。



2.2 量子ポイントコンタクト

1988年、van Weesら[7]は量子ポイントコンタクトと言われる構造を作り、そのコンダクタンスを測定した。すると驚くことに、コンダクタンス G は正確に (10^{-4} の精度で)

$$G = \frac{2e^2}{h} N \quad (2.15)$$

というように、 $2e^2/h$ の整数倍に量子化された。

さて、これはどう考えればいいのであろうか？これを考えるために、まず古典的に解析してみよう。化学ポテンシャルの高いところと低いところの電子数密度の差を δn とおく。このとき、単位時間化学ポテンシャルの低い領域に飛び出す電子の数が流れる電流 I なので、ポイントコンタクトの幅を W として

$$I = (-e)W\delta n v_F \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \frac{d\phi}{2\pi} = -e \frac{W v_F \delta n}{\pi} \quad (2.16)$$

となる。2次元の状態密度 $2 \times m/2\pi\hbar^2$ より

$$\delta n = \delta\mu \frac{m}{\pi\hbar^2} = -eV \frac{m}{\pi\hbar^2} \quad (2.17)$$

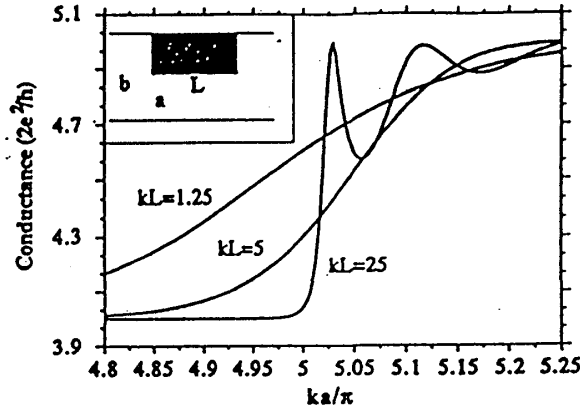
なので、コンダクタンス I/V は

$$G_{\text{classical}} = \frac{2e^2}{h} \frac{W k_F}{\pi} \quad (2.18)$$

となる。もちろんこれでは量子化されない。

ところでこの $W k_F/\pi$ という量は何を表しているのであろうか？幅が W の狭い領域では波動関数が $\Psi(0) = \Psi(W) = 0$ を満たすので、エネルギーは

$$E = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{W^2} n^2 \quad (2.19)$$



というように量子化される。これが $n = 1, 2, 3, \dots$ である。どの n までつまるか $E < \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ からきまるので、結局

$$n = \text{Int} \left(\frac{W k_F}{\pi} \right) \quad (2.20)$$

である。実験で見えているコンダクタンスは

$$G_{\text{quantum}} = \frac{2e^2}{h} \text{Int} \left(\frac{W k_F}{\pi} \right) \quad (2.21)$$

なのである。これは量子力学的には電極から電極へのチャンネルの数が n でチャンネルが短くまたクリーンなため、散乱が起こらず反射係数が0になっていると思えばよい。このとき Landauer 公式から

$$G = \frac{2e^2}{h} n \quad (2.22)$$

が導かれる²。

また、金のようによくのびる性質をもった材質で細線を作り、これをのばして幅を変えることも可能である。材質をのばしていきながらコンダクタンスを測定すると見事に $2e^2/h$ の整数倍のプラトーが観測される [9]。

ではプラトーからプラトーへとどのように遷移しているか、調べるにはどうすればよいであろう？この手の計算によく使われるのが、モードマッチングの方法である。ここでは簡単なモデル計算を紹介する。以下、図のように両端に幅 b の細線がついており、真ん中が幅 a にくびれているとする。実験では b が十分大きく、 a が量子ポイントコンタクトの幅 W である。

まず左側の領域で

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \left[e^{ik_n y} \sin \left(\frac{n\pi x}{b} \right) + \sum_{m=1}^N R_{mn} e^{-ik_m y} \sin \left(\frac{m\pi x}{b} \right) \right] \quad (2.23)$$

²久保公式で厳密にやっても同じ結果がえられることが、示されている [8]。

を考え、右側の領域で

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \sum_{m=1}^N T_{mn} e^{-ik_m y} \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \quad (2.24)$$

となっているとする。真ん中のくびれている部分では、

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{j=1}^J (u_{jn} e^{iq_j y} + v_{jn} e^{-iq_j y}) \sin\left(\frac{j\pi x}{b}\right) \quad (2.25)$$

とする。ここで k_n は

$$k_n = \left(k_F^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad (2.26)$$

の実数である。同様に q_j は

$$q_j = \left(k_F^2 - \frac{j^2 \pi^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (2.27)$$

で定義されるが、この場合、虚数もとりうるとして $J > k_F a / \pi$ としておく。これらの波動関数が $y = 0, L$ で連続で微分も連続だと言う条件を課して T, R を求め、

$$t_{mn} = \sqrt{\frac{k_m}{k_n}} T_{mn} \quad r_{mn} = \sqrt{\frac{k_m}{k_n}} R_{mn} \quad (2.28)$$

を計算すればよい。結果は前図のようになり、くびれの領域が長いほど、量子化がよく、またプラトー間の遷移に振動が伴うようになることがわかる。

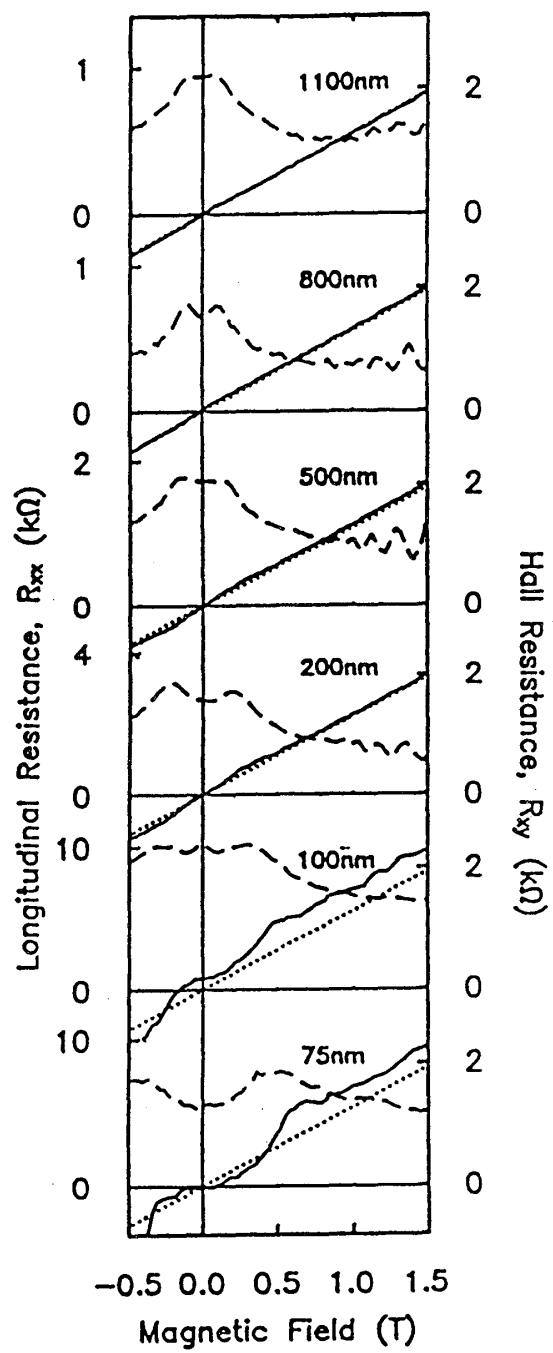
その他、2端子形状ではコヒーレント電子フォーカシングという現象が知られている [11]。これは隣どうしに端子をおいて、磁場を変化させてコンダクタンスを測定するものである。サイクロトロン半径がちょうど端子の間隔に一致したところでコンダクタンスがピークを示すのが確かに観測されている。

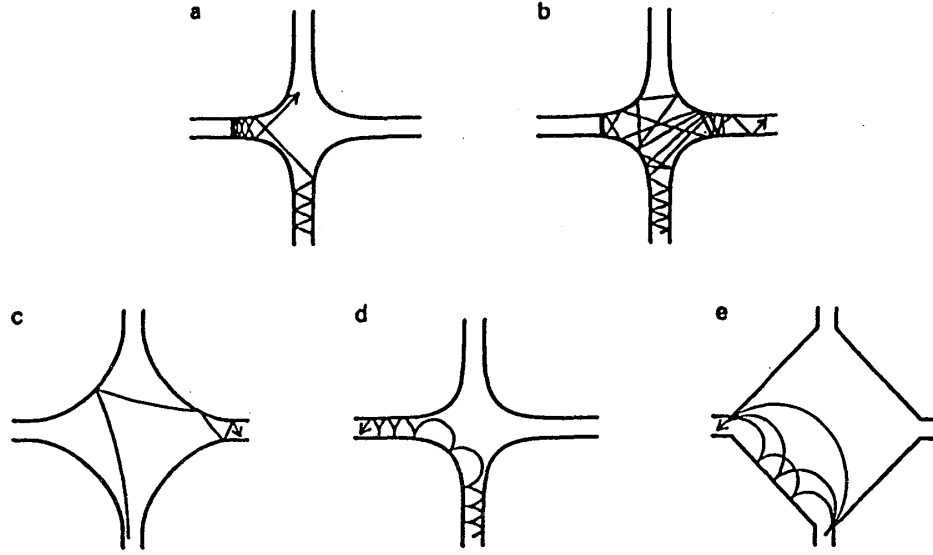
課題 2.2

$\hbar/e^2$ の値はいくつか？ これは量子化抵抗値と呼ばれるもので、 $25k\Omega$ 程度であるが、正確に求めよ。

2.3 十字路

次に4端子形状での面白い実験結果とその解釈について述べる。4端子形状で思いつくのはホール抵抗 R_H がどう振る舞うかである。Roukes ら [2] は序章の最初の図で示した形状を作り、線幅を狭くしていったときにホール抵抗がどうなるか調べた。図がその結果である。点線が2次元のバルクの場合で、線幅を狭くすると低磁場側ですれが見え始めついにはホール抵抗が消失することがわかる。またバルクに対して期待される値からのずれはじめるところで、プラトーが見えている。こうした効果は温度への依存性が弱く、古典模型で解析できることが知られている。この古典模型というのが“ビリヤード模型”である。





古典的なビリヤード模型というのは、図のような形状を考え、質点を遠くから発射して運動方程式を追う簡単な模型であるが[12]、Landauer 公式と組み合わせると、実験結果をうまく解釈できる便利な代物である。電子の軌道は磁場によっていろいろな形となる。図 a は典型的な軌道であるが、電子が左側に行くように見えて、複雑な散乱をした結果、結局別の端子に入っていく様が見えるであろう。面白いのは、十字路に来るに従って、電子が前方に加速されるという現象 (collimation) である。図 b は scrambling と言って、十字路のなかで何度も壁にぶつかる現象である。図 c はリバウンドといって、磁場によるローレンツ力で電子は左に向かおうとするが、壁にぶつかって右の端子に入ってしまう現象である。図 d は磁場によるガイディングと呼ばれ、図 e は 2 端子形状の最後のところでも述べたフォーカシングである。こうした軌道を念頭において、ホール抵抗の消失、プラトーを解釈してみよう。

まず Landauer-Büttiker の定式化により、 R_H を求めてみよう。式 (1.63) で $(m, n, k, l) = (1, 3, 2, 4)$ とする。また右の端子に行く例えば、 T_{21}, T_{32} 等を T_F とおく。今不規則性がないので、形状が 4 回対称を持っているとして

$$\begin{aligned} T_R &= T_{21} = T_{32} = T_{43} = T_{14} \\ T_L &= T_{12} = T_{23} = T_{34} = T_{41} \\ T_F &= T_{13} = T_{31} = T_{24} = T_{42} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となり、(1.62) で定義される行列 D は

$$\begin{pmatrix} T_F + T_R + T_L & -T_F & -T_R \\ -T_F & T_F + T_R + T_L & -T_L \\ -T_L & -T_R & T_F + T_R + T_L \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

となる。結局 R_H は

$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{T_R - T_L}{2T_F(T_F + T_R + T_L) + T_R^2 + T_L^2} \quad (2.31)$$

で与えられる [13]。この式とビリヤードの散乱過程をもとに、実験事実を解釈してみよう。

まずホール抵抗の消失であるが、これは図 a,b のように scrambling がおきて、十字路で複雑な反射がおき、 $T_R \approx T_L$ となってしまうことが原因であると考えられる。これにはさらに collimation によって T_F が増大する効果も効いていると思われる。実際、collimation を起こさないような角張った十字路では、このようなホール抵抗の消失は生じないことが実験でもシミュレーションでも確かめられている。また形状によっては負のホール抵抗が見えるというのは図 c のリバウンドによって解釈できる。(2.31) で $T_R - T_L$ の符号がリバウンドのために逆転してしまうのである。

次にホール抵抗がプラトーを示す原因について述べる。これは量子ホール効果と違って、 R_H は決して量子化されていないことに注意。このプラトーが始まる磁場は十字路の形状に依存している。まずどうなれば図 d のように素直にローレンツ力に従って、端子に吸い込まれるのであろう？ これは磁場 B が

$$B > B_g = \frac{mv_F}{er_{\min}} \quad (2.32)$$

のときに起こる。ここで $r_{\min}$ は角の曲率半径の最小値である。このとき $T_L \approx N$ = 端子でのチャンネル数となり、 $R_H = h/e^2 N$ となるのである。

さて、 N の値であるが、これは原理的には磁場に依存する。しかしサイクロトロン半径の二倍 $2mv_F/eB$ が系の幅よりも大きければ、 N はほとんど磁場に依存しないことが知られている。なぜならサイクロトロン半径が細線の幅程度の大きさにならないと、磁場によるサブバンド構造の変化が見られないからである。これがプラトーの原因である。結局プラトーは

$$\frac{2mv_F}{eW} > B > \frac{mv_F}{er_{\min}} \quad (2.33)$$

のとき見えることになる。これも実験結果と一致している。

ところで scrambling に見られるように、十字路の中では軌道がカオティックになっている。こうした単純な構造から生まれる複雑な軌道は、カオス理論により解析されている。またこの古典的にはカオス軌道を示す系が、量子論的にどのように振る舞うか、近年盛んに議論されている(第3章を参照のこと)。

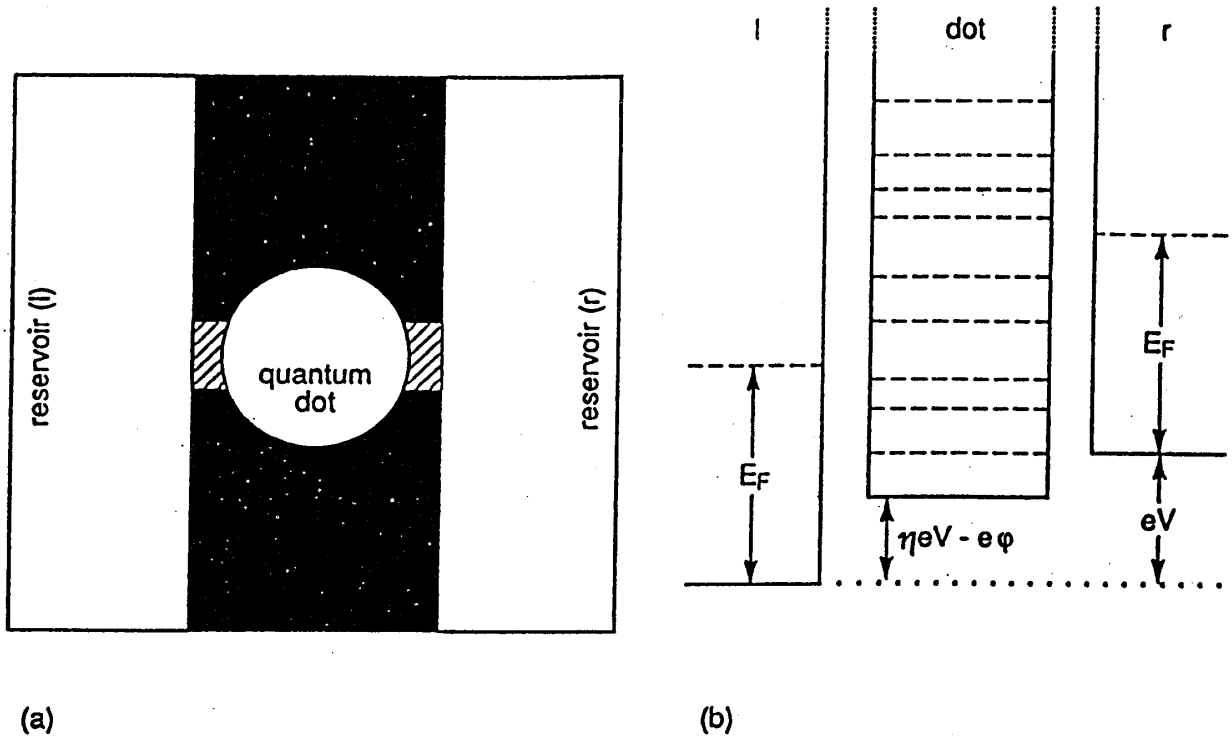
ここでは詳しくふれないが、4端子形状では非局所抵抗というメゾスコピック系独得の抵抗が観測されている。

課題 2.3

細線に垂直な方向の運動量を $p_{\perp}$ 、平行を $p_{\parallel}$ とおく。エネルギーの保存則から

$$p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = \text{constant} \quad (2.34)$$

である。今、線の幅が広がると二つの値はどのようになるか？ これにより collimation を説明せよ。



2.4 量子ドットとクーロンブロックード

量子ポイントコンタクトの技術を使うと、さらに面白い構造ができる。例えば、量子ポイントコンタクトを二つつなげると、二つの間にサブミクロンの小さな領域ができる。これが量子ドットである (図 a)。ドットの右側には $\mu_r = E_F + eV$ の化学ポテンシャルをもった端子が、左側には $\mu_l = E_F$ の端子がついていけるとする。ドットが有限のため、その中には離散的なエネルギー準位が形成されているとする (図 b)。この場合、左の熱浴とドット領域のトンネル率は $\Gamma^l/\hbar$ 、右の熱浴とドット領域のは $\Gamma^r/\hbar$ であるとする。

十分低温ではフェルミエネルギー付近の状態と結合したドット内の状態が共鳴トンネリングを示す。そのとき、コンダクタンスは [14]

$$G = \frac{e^2}{h} \frac{\Gamma^l \Gamma^r}{(E_F - E_0)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma^l + \Gamma^r)^2} \quad (2.35)$$

という Breit-Wigner タイプの式で与えられる。左右のトンネル確率が等しければ、コンダクタンスが 1 になるが、左右のトンネル確率が違うと決して 1 にならないことに注意 (2.1 参照)。

さて問題は共鳴がおこる E_0 の値、もしくは E_F の値である。一見考えると E_0 はドット中の準位でこれはランダムなので E_F を変えていくとランダムな間隔で共鳴がおきそうである³。それとスピンの縮退があるので G の前に係数 2 がついていても良さそうである。

³ 正確にはランダム系でも準位には相関がある。これを議論するのがランダム行列理論である。これについては次章で述べる

ところが量子ドットのような小さい系の場合、そうはなっていない。このドット中に電子が N 個詰まっているとその静電エネルギー $U(N)$ は

$$U(N) = \frac{(Ne)^2}{2C} - NeV_g \quad (2.36)$$

となる。通常はこの $(Ne)^2/2C$ の項は無視できるが、キャパシタンス C が極端に小さい場合、この項が効いてくるのである。そこでこのように考えよう。ドットの中に $N-1$ の電子があったとする。熱浴から電子が飛んできてドットの中の 1 電子準位 E_N に電子が入り、ドット中の電子が N 個になったときのエネルギーの保存則は

$$E_F + U(N-1) = E_N + U(N) \quad (2.37)$$

となる。これより

$$E_F = E_N + (2N-1)\frac{e^2}{2C} - eV_g \quad (2.38)$$

となる。さて、ゲート電圧を変えていくと、今度は

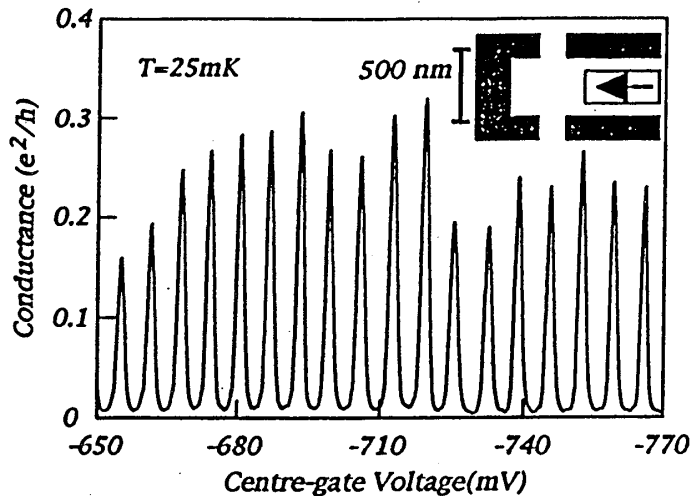
$$E_F = E_{N+1} + (2N+1)\frac{e^2}{2C} - eV'_g \quad (2.39)$$

で共鳴が起こることになる。結局、二つのゲート電圧の差 ΔV_g は

$$e\Delta V_g = (E_{N+1} - E_N) + \frac{e^2}{C} \quad (2.40)$$

となる。さて、 $\frac{e^2}{C}$ が典型的なエネルギー準位間隔より十分大きければ、この間隔は e^2/C という等間隔になるはずである。しかもスピン縮退はとける。またその間隔は 1 電子準位の間隔よりもはるかに大きくなっている。これがクーロンブロッケードとよばれる現象である。

実験的には、 V_g を変えて E_F 一定でコンダクタンスを測定する [15]。図に見事な実験の一例を示す ([6] の p.312 の図より)。



Chapter 3

拡散領域における伝導

前章では電子が不純物に散乱される場合を考えなかった。なぜかというとは非常に小さいサンプルでは不純物による弾性散乱長 l_e がサンプルサイズよりも大きいからである。系の大きさ L が l_e よりも大きくなると、不純物散乱の効果を取り入れなければならない。本章ではこの不純物散乱がどのような現象を引き起こすかを議論する。

電気抵抗を高温で決めているのはフォノンによる散乱や電子間相互作用による散乱である。低温になると、これらの散乱は無視できるようになり、不純物散乱が効いてくる。通常これが残留抵抗としてあらわれる。ところが2次元以下ではアンダーソン局在が起こり、通常すべての状態が局在してしまい、電気伝導度は絶対零度で0となる [16, 17, 18, 19]。このアンダーソン局在は電子の量子干渉効果によるものである。

さてここで議論しているメゾスコピック系ではなにがおこるであろうか？話を簡単にするため、絶対零度に限ることにする。電子は局在しておりその波動関数 Ψ は

$$\Psi \sim e^{-r/\xi} \quad (3.1)$$

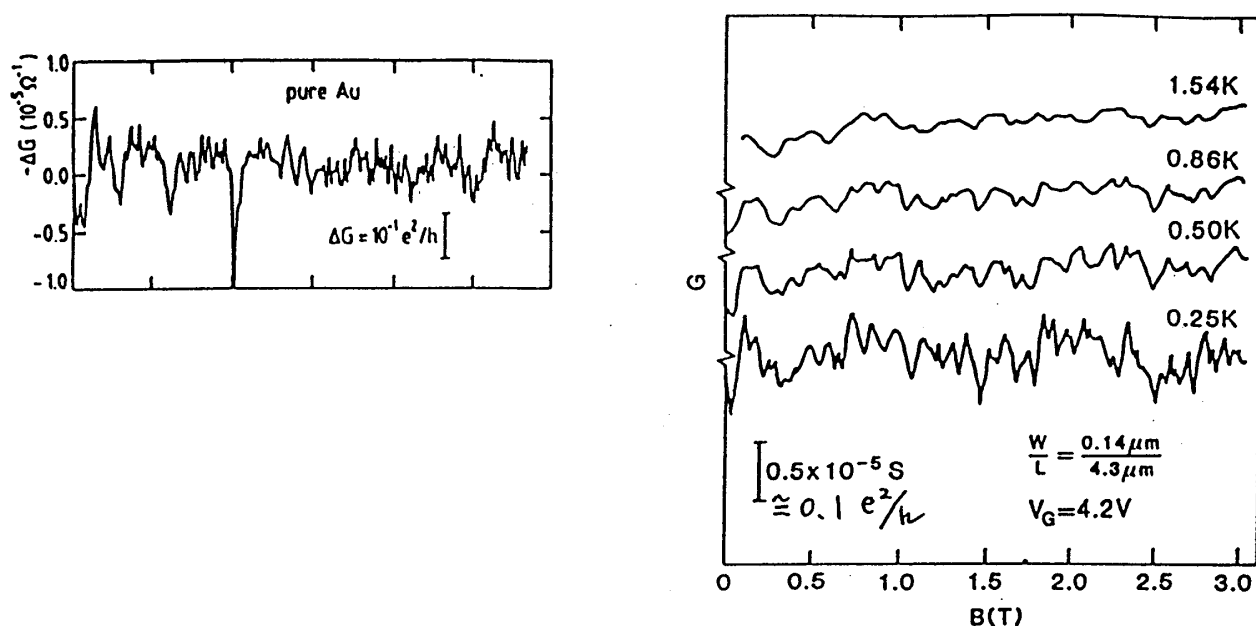
というすそをもっていると考える。系のサイズ L が局在長 ξ よりもはるかに大きい場合、波動関数の局在により、電流は減衰してしまい伝導は起こらないはずである。サイズ L が弾性散乱長よりも小さいとバルスティック伝導になるので、結局

$$\xi \gg L \gg l_e \quad (3.2)$$

が電子が拡散的にサンプルを動いている条件になる。実際、この条件を満たすのはバルスティック伝導のときよりも簡単で、実験的にはこの拡散領域の方が先に実現された。

3.1 コンダクタンスの揺らぎ

上記の条件でコンダクタンスを測定した結果を図に示す。図の左は金のコンダクタンスの磁場依存性、右はシリコン MOS のコンダクタンスの磁場依存性である。磁場によってコンダクタンスが不規則に変化しているように見える。この変化はサンプルごとに独得の



もので、同じサンプルなら再現性があることから、磁気指紋 (magneto fingerprint) と呼ばれた。

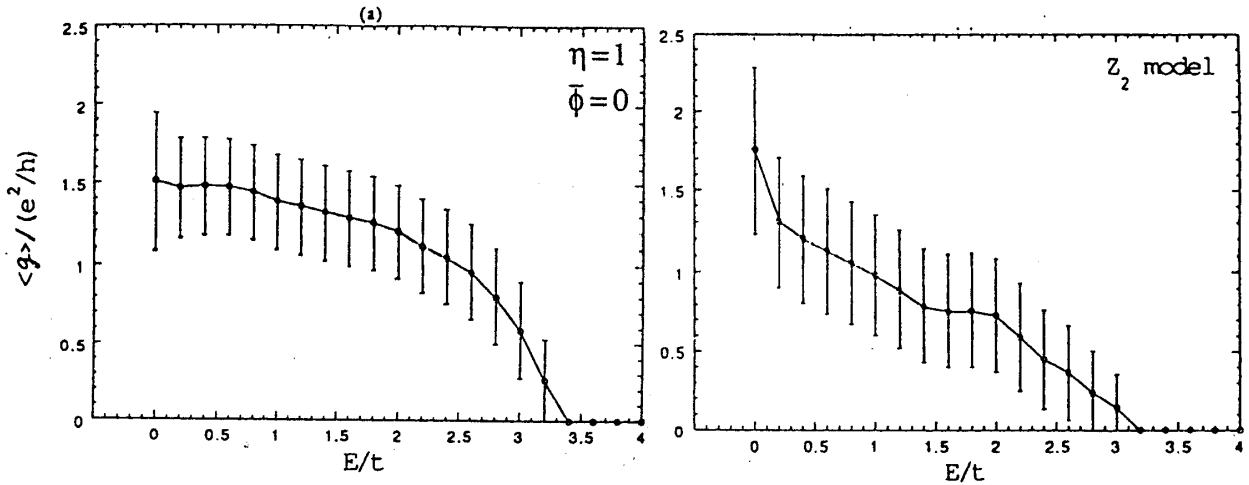
さて、磁気指紋をよく眺めてみると、金もシリコン MOS も大体、 $0.1e^2/h$ 程度の幅で振動しているようである。少し考えると、これは大変奇妙なことがわかる。何故なら、金のコンダクタンスは $1000e^2/h$ でシリコン MOS は e^2/h 程度なので、絶対値が 1000 倍も違えば揺らぎはその平方根、30 倍程度違ってもおかしくないからである。

同じことは数値計算によってもほぼ同時期に Stone によって発見された [20]。典型的な計算結果 [21] を図に示す。コンダクタンスの絶対値は変わっているが、平均値は広い領域で一定だと言うことがわかるであろう。

このように拡散領域ではコンダクタンスのゆらぎはコンダクタンスの絶対値に依らず e^2/h 程度である。この現象を universal conductance fluctuation (UCF) と呼ぶ。

3.2 ランダム行列理論による解釈

この UCF を一般的にランダムな系でのスペクトルを考察することで説明しよう。



3.2.1 ランダム行列理論

今、系全体に状態が広がっているとして、そこに不規則性ポテンシャルをさらに加えたとする。このとき、ハミルトニアンを行列表示するとその行列要素はランダムなものになる。数学的に扱いやすいように行列要素 H_{ij} はガウス分布しており、またその分布確率は $P^{-1}HP$ という同値変形をしても変わらないとすると、

$$P(\{H_{ij}\}) = A \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} H^2\right) \quad (3.3)$$

とおける¹。このように行列要素がランダムな場合、固有値もまたランダムになるのであるか？

簡単のため、 2×2 行列を考えよう。このとき

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

とおくと

$$P(a, b, c) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2 + 2b^2 + c^2)\right) \quad (3.5)$$

となる。この行列の固有値 $\epsilon_{\pm}$ は

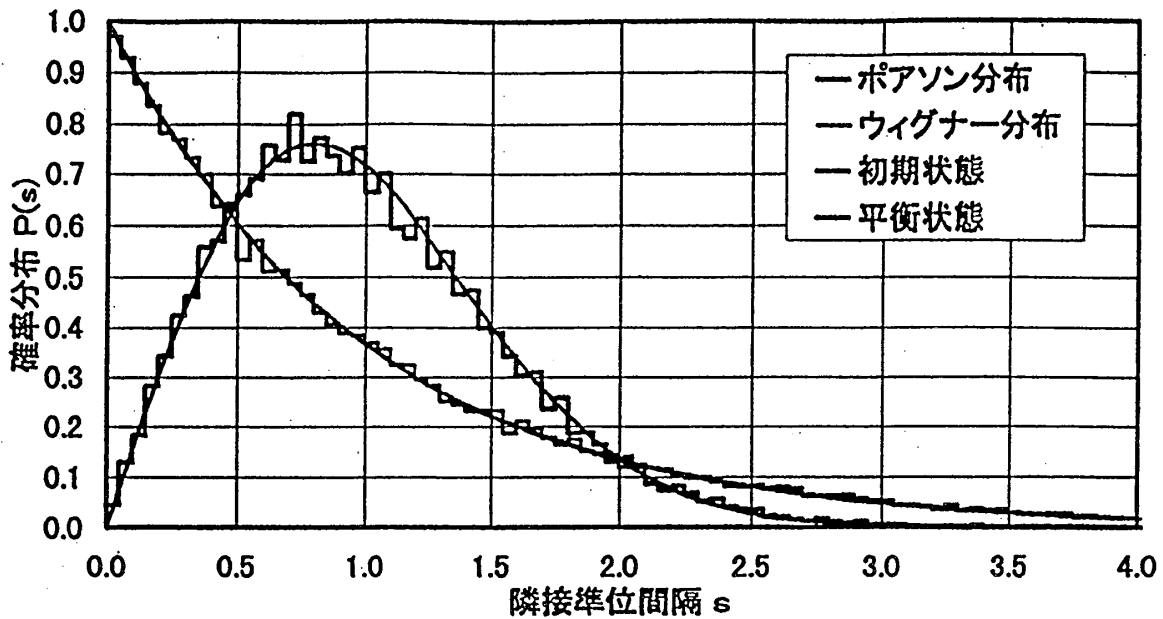
$$\epsilon_{\pm} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2} \quad (3.6)$$

である。

さて、二つの固有値の間隔はどうなっているであろう？ 全くランダムなら固有値の間隔に顕著な構造は見られないであろう。しかし量子力学でやったように縮退した状態は摂動

¹ A は $\int \Pi dH_{ij} P(\{H_{ij}\}) = 1$ から決める。

Figure 3.1: Wigner 分布



によって分離する。これと同じことが起こるのである。二つの固有値の間隔が s に等しい確率は

$$P(s) = \int da \int db \int dc P(a, b, c) \delta(s - (\epsilon_+ - \epsilon_-)) \quad (3.7)$$

で与えられるので、

$$P(s) = \frac{s}{2} e^{-s^2/4} \quad (3.8)$$

となる。これは Wigner が原子核の励起スペクトルを解析するのに提案したので、Wigner 分布と呼ばれている。Wigner 分布の特徴は s が小さいところで $P(s)$ が 0 となることである。これは二つの準位が互いに反発し避けあっていることを意味する。これが準位反発 (level repulsion) である。

課題 3.1

$P(s)$ は通常 $1 = \int_0^\infty ds P(s) = \int_0^\infty ds P(s) s$ というように、 s を規格化しておくのが便利である。この場合、 $P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$ となることを示せ。また複素エルミート行列に対して同様の議論を行うと、 $P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right)$ となることを示せ。

行列の次元が大きい、すなわち固有値の数が十分大きい場合、固有値の分布関数は

$$P(\{\epsilon_i\}) = A \prod_{i>j} |\epsilon_i - \epsilon_j|^\beta \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2\right) \quad (3.9)$$

となる。 β は系の時間反転対称性やスピン回転対称性から決まり、通常の不純物では $\beta = 1$ 、磁場がかかったり磁性不純物が入るとは $\beta = 2$ となり、スピン軌道相互作用が強い系では $\beta = 4$ となることが知られている。準位が多い場合は、準位が二つだけの上で述べた例と全然違うように思えるが、実際 $P(s)$ は Wigner 分布で非常によく近似できる [22]。

この Wigner 分布は極めて一般的なものである。歴史的には原子核の励起スペクトルの解析に対して、最初に提案され、後に微粒子のエネルギー準位から比熱を議論する際に適用された(いわゆる久保効果)。このメゾスコピック系に適用されたのは10年ほど前からである。最近、古典的にカオスが見られる系を量子化するとやはり Wigner 分布が見られることがわかっている。これは実験的にもみようという試みがなされている。

課題 3.2

固有値に全く相関のないとき、最近接準位間隔は

$$P(s) = e^{-s} \quad (3.10)$$

で与えられることを示せ。これは Poisson 分布の一種である。

3.2.2 Thouless 公式による解釈

この UCF を解釈するのに便利な方法が、Thouless 公式にランダム行列理論を適用するやり方である [23]。

さて、ここで1章で述べた Thouless 公式 (1.43) を思い出そう。これはコンダクタンス G が

$$G = \frac{e^2}{h} N \quad (3.11)$$

で与えられるとするものであった。 N は Thouless エネルギーの間に入っているエネルギー準位の数である。そこでコンダクタンスの平均値は

$$\langle G \rangle = \frac{e^2}{h} \langle N \rangle \quad (3.12)$$

揺らぎは

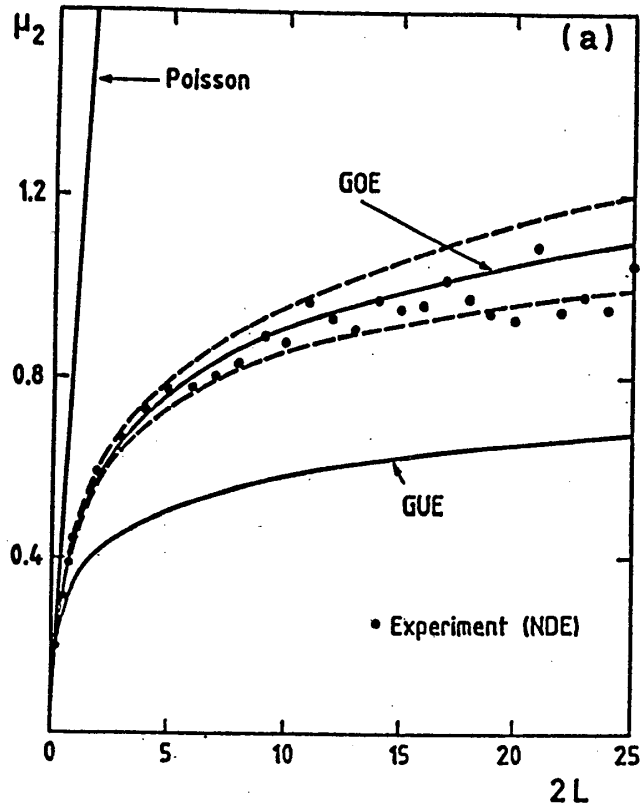
$$\langle \delta G \rangle = \frac{e^2}{h} \langle \delta N \rangle \quad (3.13)$$

ということになる。もし、準位に相関が全くなければ $\langle \delta N \rangle = \sqrt{\langle N \rangle}$ となるであろう。しかしランダム系での準位は強く反発している。 N が揺らぐためには間隔が狭くなるか広がるかして、準位が密になったり疎になったりしなければならないが、

- ・ 密になろうとすると、内側の準位が反発する
- ・ 疎になろうとすると、外側の準位が反発する

ので、揺らぐことはできないのである。また反発の強さは β の値に依存し、 β が大きいほど強い反発がおきるので、磁場がかかった系 ($\beta = 2$) の方が磁場のかかっていない系 ($\beta = 1$) よりも N の揺らぎが小さいことがわかる。実際、 $\langle \delta N^2 \rangle$ はランダム行列理論により $\beta = 1$ のとき

$$\langle \delta N^2 \rangle = \frac{2}{\pi^2} \left(\log(2\pi \langle N \rangle) + 1 + \gamma - \frac{\pi^2}{8} \right) + O(\langle N \rangle^{-1}), \quad (3.14)$$



$\beta = 2$ のとき

$$\langle \delta N^2 \rangle = \frac{1}{\pi^2} (\log(2\pi \langle N \rangle) + 1 + \gamma) + O(\langle N \rangle^{-1}) \quad (3.15)$$

で与えられる。図にその様子を示す。これからわかるように $\langle \delta N^2 \rangle$ はほとんど一定である。また磁場があるなしで大きく変わることもわかり、数値計算の結果を定性的に説明できる。

3.3 Landauer 公式による解釈

前節で Thouless 公式により、UCF がなぜ起こるかを定性的に調べたが、Thouless 公式だと係数がはっきりしない (Thouless エネルギーにあいまいさがのこる)、 $\log N$ の項が存在しているが、これは正しいのか? という問題がある。そこで Landauer 公式

$$G = 2 \frac{e^2}{h} \text{Tr} t t^\dagger \quad (3.16)$$

でコンダクタンスを解析しよう²。

²(1.60) 式を逆数にしてコンダクタンスにしている。係数 2 はスピンからくる

2 端子形状での S 行列を $N \times N$ の反射係数行列 r と透過係数行列 t で表すと

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

となる。サンプル長が局在長よりも短く、弾性散乱長よりも長いという条件から、サンプルの中で十分散乱がおき、しかし局在はしないという状況を考えていることを思い出すと、この r も t もランダムな行列になっていると考えられる。 r, t は $N \times N$ 行列で、あるチャンネルから入り、別のチャンネルに抜けるプロセスを表すが、十分散乱が多いと i 番目のチャンネルから j 番目のチャンネルに抜ける確率の大きさはすべて同程度として良いであろう。そこで S を

$$S = \begin{pmatrix} v^{(1)} & 0 \\ 0 & v^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(3)} & 0 \\ 0 & v^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^{(1)}\sqrt{1-\tau}v^{(3)} & v^{(1)}\sqrt{\tau}v^{(4)} \\ v^{(2)}\sqrt{\tau}v^{(3)} & v^{(2)}\sqrt{1-\tau}v^{(4)} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

と書き直す³。 $v^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) はランダムなユニタリ行列で、 τ は $N \times N$ の対角行列で、その要素 τ_i は $0 < \tau_i < 1$ である。磁場が 0 のときは、 $S = S^T$ なので、 $v^{(3)} = v^{(1)T}$ 、 $v^{(4)} = v^{(2)T}$ である。

これより $t = v^{(2)}\sqrt{\tau}v^{(3)}$ となり、

$$G = 2 \frac{e^2}{h} \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (3.19)$$

となる [24]。そこで τ_i の分布関数が分かればよい。これはランダム行列理論と非常によく似ており、 $\beta = 1$ の場合、

$$P(\{\tau\}) = C_1 \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j| \prod_i \frac{1}{\sqrt{\tau_i}} \quad (3.20)$$

$\beta = 2$ の場合、

$$P(\{\tau\}) = C_2 \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^2 \quad (3.21)$$

で与えられることが知られている。前節と違うのは τ の範囲が 0 から 1 に限られているのと、 $\exp(-A\tau_i^2)$ のような項がないことである。

ここで、 τ の密度 $\rho(\tau) := \sum_{i=1}^N \delta(\tau - \tau_i)$ を定義すると便利である。これを用いると $\tilde{G} = G/(2e^2/h)$ は

$$\langle \tilde{G} \rangle = \int d\tau \langle \rho(\tau) \rangle \tau \quad (3.22)$$

$$\langle \delta \tilde{G}^2 \rangle = \int d\tau d\tau' \langle \rho(\tau) \rho(\tau') \rangle \tau \tau' - \langle \tilde{G} \rangle^2 = \int d\tau d\tau' \tau \tau' K(\tau, \tau') \quad (3.23)$$

から計算できる。ただし $K(\tau, \tau')$ は 2 体相関関数で

$$K(\tau, \tau') := \langle \rho(\tau) \rho(\tau') \rangle - \langle \rho(\tau) \rangle \langle \rho(\tau') \rangle \quad (3.24)$$

³一般に N 次元のユニタリ行列は N^2 個の自由度をもっている。よって、左辺の自由度は $4N^2$ で右辺は $4 \times N^2 + N$ となり、あわないように見える。これは実は $D = \text{diag}(e^{i\eta_1}, e^{i\eta_2}, \dots, e^{i\eta_N})$ とし、 $v^{(1)} = v^{(1)}D$, $v^{(2)} = v^{(2)}D$, $v^{(3)} = Dv^{(3)}$, $v^{(4)} = Dv^{(4)}$ として、 $v^{(i)}$ のうち、 N 個のパラメータを消すことができるからである

で定義される。実はこれは N が十分大きいとき、計算でき [25]、

$$K(\tau, \tau') = \frac{1}{\pi^2 \beta} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau'} \log \left| \frac{\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau'}}{\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau'}} \right| \quad (3.25)$$

となる。これより

$$\langle \delta G \rangle = 2 \frac{e^2}{h} \sqrt{\frac{1}{8\beta}} \quad (3.26)$$

となる。実際には数値計算すると N が 3 くらいでほとんどこの値が得られる。

Thouless 公式にハミルトニアンのランダム行列理論を適用した場合は、log 補正が存在したが、 S 行列のランダム行列を考えた場合は、補正が存在しないことに注意しよう。これは端子の効果と解釈されている。

課題 3.3

時間反転対称性がある場合、つまり磁場のかかっていない場合、 $S = S^T$ である。このとき、(3.18) 式の左辺の自由度は $N(2N + 1)$ になることを示せ。右辺の自由度はいくつか？

Chapter 4

量子ホール効果

量子ホール効果とは、2次元電子系に十分強い磁場をかけ、電子が少数のランダウ準位にのみ存在するようになったとき、ホール抵抗が磁場や電子密度に依存しない領域（プラトー）を示し、その値が N を整数として、

$$R_H = \frac{h}{Ne^2} \quad (4.1)$$

と量子化される現象である [26]。この量子化の精度は 10^{-7} 程度と非常によい。図に Klitzing らによって最初にえられた実験結果を示す [27]。

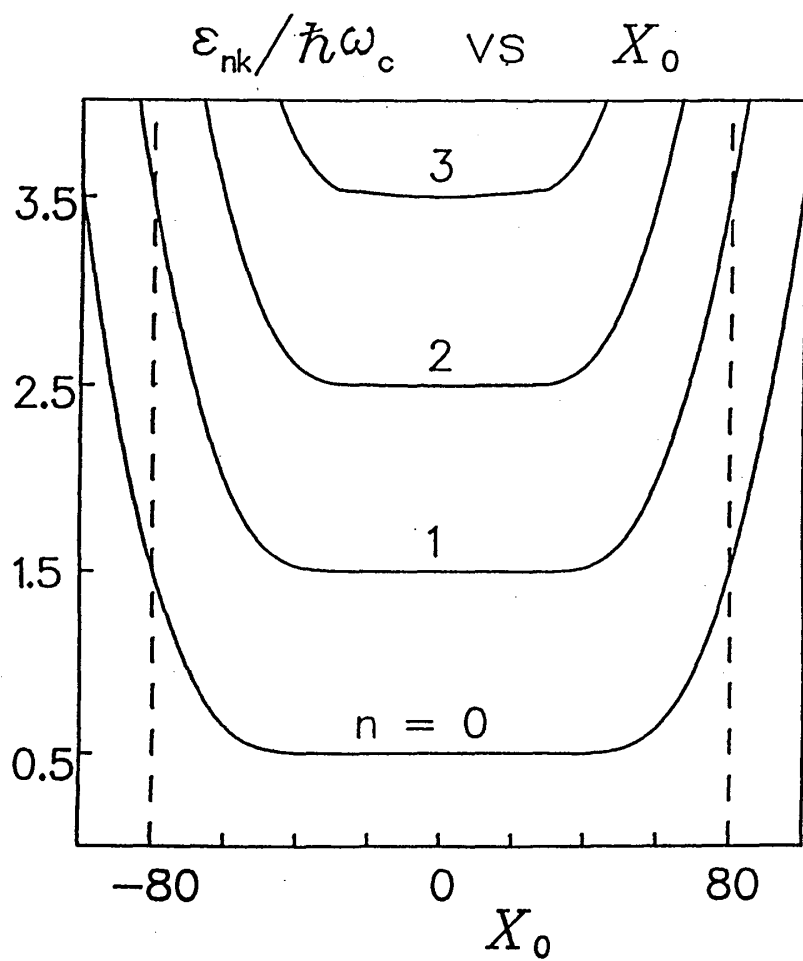
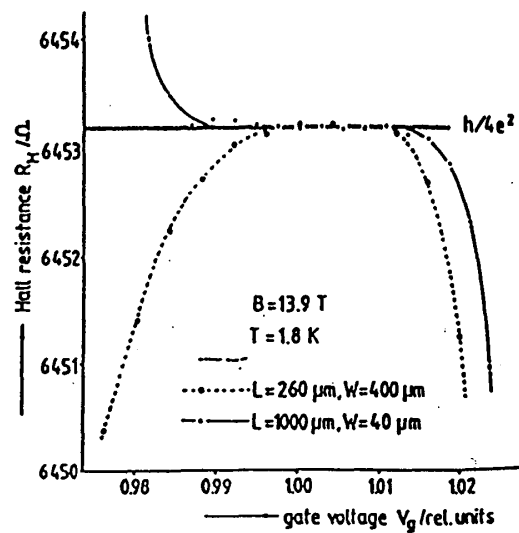
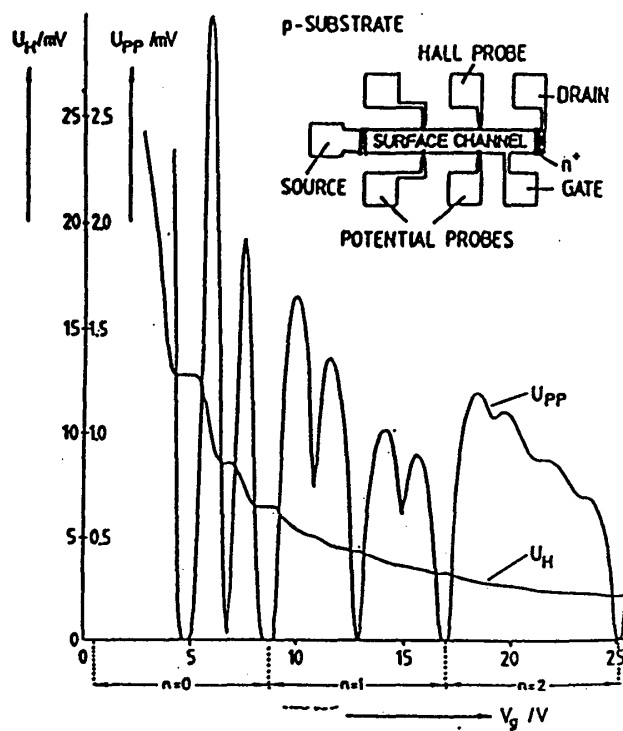
この量子ホール効果はマクロな系で発見された。系がメゾスコピックになった場合、何が起こるであろう？ 量子化が有限サイズ効果でこわれるのだろうか？ 以下、このメゾスコピック系での量子ホール効果を解説する。

4.1 エッジ状態

第1章で強磁場中では電子がランダウバンドに分離し、そのエネルギーは中心座標 X_k に依存せず $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c$ となることを示した。今、 $-L/2$ から $L/2$ の領域にある x 方向の幅が L の細線を考える。細線は十分 y 方向には長いとする。中心座標が系のはしに近づくと電子は壁の閉じこめポテンシャルを感じ、エネルギーが高くなり、中心座標依存性を示すようになる。図に不純物がないときの、 $\pm L/2$ に無限大のポテンシャル障壁があるとして計算機で求めた中心座標 $X_k = -k\ell^2$ とエネルギー E_{nk} を示す。

図を見ると、中心座標が壁に近づくと、エネルギーが確かに上昇していることがわかる。この上昇は電子の波動関数の裾が壁にかかってくるあたりから起こる。 n 番目のランダウ準位の波動関数の x 方向の広がりは $\sqrt{n+1/2}\ell$ 程度なので、中心座標が壁から $\sqrt{n+1/2}\ell$ ままで近づくと、エネルギーが上がり始めることがわかる。実際、図でもランダウ準位が高いほど、エッジの領域が大きくなっている。

中心座標がちょうど $\pm L/2$ のとき、例えば最低ランダウ準位 $n=0$ のエネルギーは $\frac{3\hbar\omega_c}{2}$ と、 $n=1$ のバルクのエネルギーに一致している。 $n=1$ のバンドで中心座標がちょうど $\pm L/2$ になると、 $\frac{7\hbar\omega_c}{2}$ のバルクの状態のエネルギーと一致する。これは n = 奇数のバルク状



態の波動関数は反対称で、このちょうど片側が $(n-1)/2$ の中心座標が $\pm L/2$ となっているエッジ状態に一致するからである。

課題 4.1

第 1 章 ((1.8) 式) でやったように、 x 方向の波動関数 $\phi_n(x - X_k)$ は

$$\phi_n(x - X_k) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} \ell} e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} H_n((x - X_k)/\ell) \quad (4.2)$$

となる。エルミート多項式の直交関係、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n^2(z) = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (4.3)$$

と漸化式、

$$2zH_n = H_{n+1} + 2nH_{n-1} \quad (4.4)$$

を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (x - X_k)^2 [\phi_n(x - X_k)]^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ell^2 \quad (4.5)$$

となることを示せ。

これは磁場がないときの細線に対する、 y 方向の波数とエネルギーの関係と形式的に非常によく似ている (1.4.4 節参照)。0 磁場での細線のときのサブバンドにあたるのがランダウ準位で、サブバンド指数をランダウ準位指数に読みかえれば、まったく同じ形式で伝導を議論できる。しかし以下のような決定的な違いがある。

- ・ 磁場が 0 のときは、少数のサブバンドだけ占めるようにするには、細線の幅が十分狭く、かつ電子密度が小さくしなければならなかった。しかし量子ホール領域の場合、たとえ幅の広い系でも、また電子密度が大きくても、十分強磁場をかければ少数のランダウ準位に電子は落ち込むので非常に幅の狭い系でなくても、実現できる。
- ・ 0 磁場では状態 k と $-k$ は空間的には同じ場所にあった。そのため、不純物があると後方散乱が容易に起こり、透過係数行列、反射係数行列が複雑になった。ところが強磁場の場合、 k と $-k$ は中心座標で言うと X_k と $-X_k$ に対応する。ランダウ関数はガウス関数的な裾 $\exp(-(x - X)^2/2\ell^2)$ を引いているので、 X_k が系のはしにある場合、二つの状態はほとんど重ならないので、後方散乱は事実上生じない。

このことから、ホール抵抗が量子化されることが簡単に示される。実際、4 端子形状を考え、後方散乱がないことから、Landauer-Büttiker 公式で、電流端子を 1, 3、電圧端子を 2, 4 とし、 $T_{12} = T_{23} = T_{34} = T_{41} = N$ 、他の透過、反射確率はすべて 0 とする。量子抵抗を (1.63) 式から計算しよう。

$$\det D = \det \begin{pmatrix} N & -T_{13} & -T_{12} \\ -T_{31} & N & -T_{32} \\ -T_{21} & -T_{23} & N \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} N & 0 & -N \\ 0 & N & 0 \\ 0 & -N & N \end{pmatrix} = N^3 \quad (4.6)$$

また $T_{12}T_{34} - T_{14}T_{32} = N^2$ から、確かに

$$R_H = R_{24,13} = h/Ne^2 \quad (4.7)$$

となる。

このままだと量子化が起こるのはエッジ状態にフェルミ面がある場合だけで、マクロな系ではエッジ状態はバルクよりもはるかに数が少ないので、実験的に磁場や電子密度を変化させてフェルミ面をそこにあわせることはできない¹。よってエッジ状態だけでは、マクロな系でのプラトーの説明はできない。しかし、フェルミエネルギーがバルクにかかっている、バルク状態が局在しているとしてこれが電流に寄与しないと考えれば、プラトーを説明できる。

4.2 乱れた端子

今までの議論は端子が無反射、 $R_{ii} = 0$ としてきた。しかし、実験で得られている正確な量子化を説明するには、 $R_{ii} \neq 0$ でもホール抵抗が量子化されていなければならない。これは示せるのであろうか？

そこでこのような反射が起こったとしよう。4端子形状を考え、先ほどと同じように $(k, l, m, n) = (1, 3, 2, 4)$ ととる。仮に電圧端子 m で反射 R が起こったとする。 $N - R = T_{km} + T_{lm} + T_{nm} = T_{mk} + T_{ml} + T_{mn}$ と、強磁場条件、 $T_{lm} = T_{nm} = T_{mk} = T_{mn} = 0$ を用いると、 $T_{km} = T_{ml} = N - R$ となるので、このとき、(1.62) の行列式は

$$\det \begin{pmatrix} N & -R & -(N-R) \\ 0 & N & 0 \\ 0 & -(N-R) & N-R \end{pmatrix} = N^2(N-R) \quad (4.8)$$

となる。これより (1.63) は、

$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{(N-R) \cdot N - N \cdot 0}{|D|} = \frac{h}{Ne^2} \quad (4.9)$$

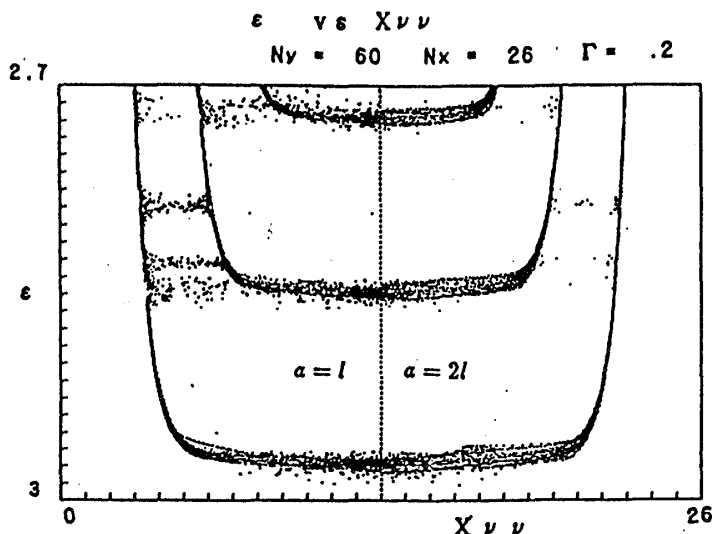
となり、量子化が保たれることが分かる。

$R_{ii} \neq 0$ を実験的に実現するには、端子にゲート電圧をかければよい。これによってあるランダウ準位以下に属するエッジ状態を反射させ、熱浴の中に戻すことができる。

4.3 非平衡分布

今まではエッジ状態がすべてのランダウバンドで同じ値までつまっているとした。何かの拍子で、ランダウ準位ごとに異なる“フェルミエネルギー”をもつようになったら、何が

¹ エッジ状態は壁から磁氣的長さ $100\text{\AA}$ 程度なので、 $10\mu\text{m}$ の細線幅でもバルクのランダウ状態に比べて $100\text{\AA}/10\mu\text{m} = 1/1000$ しか存在しないのである。



起こるだろうか？もし磁場が0か弱い場合は、各サブバンドの混合が強くてすぐに緩和してしまうであろう。ところが強磁場がかかると、エッジ状態が空間的にも分離してしまうので、なかなか緩和が起こらないと思われる。

例えば、 $n=0$ と $n=1$ のランダウ準位に属するエッジ状態は閉じこめポテンシャルが無限大の時でも、中心座標は磁氣的長さ ℓ くらい離れている。不純物ポテンシャル V_{imp} が

$$V_{\text{imp}} = V_0 \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{d^2}\right) \quad (4.10)$$

($\mathbf{r}_i$ は不純物ポテンシャルの位置)と書き表されていると、二つのエッジ状態に関する行列要素は

$$\exp\left(-\frac{1}{4} \frac{(X_k^0 - X_k^1)^2 d^2}{\ell^4}\right) \quad (4.11)$$

となり、長距離ポテンシャル $d \gg \ell$ の場合、非常に小さくなることがわかる。図に $d = \ell$ と $d = 2\ell$ の場合を示す[28]。

仮にこのような非平衡分布が可能だとすると、何が起こるであろうか？そこで電流端子 l から出た電流が何らかの非平衡分布をもったとして、電圧端子 m に飛び込んでいったとする。非平衡分布のため、電流は各チャンネルに $f_n I$ 割り当てられているとする。 $\sum_{n=1}^N f_n = 1$ である。そのとき電圧端子に入っていく電流 I_{in} は

$$I_{\text{in}} = \sum_{n=1}^N T_{ml}^{(n)} f_n I \quad (4.12)$$

となる。一方電圧端子から出ていく電流は強磁場なので電流端子 k に流れ込む。この電圧端子 m が $E_F + \delta\mu$ のエネルギーを持っていたとすると、その出ていく電流は

$$I_{\text{out}} = \frac{e}{h} \delta\mu (N - R) = \frac{e}{h} \delta\mu \sum_{n=1}^N T_{km}^{(n)} \quad (4.13)$$

前節で述べたように $T_{km} = T_{ml} = N - R$ である。 $T_{km} = T_{ml} = \sum_{n=1}^N T^{(n)}$ として、

$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{\sum_{n=1}^N T^{(n)} f_n}{\sum_{n=1}^N T^{(n)}} \quad (4.14)$$

となる。つまり量子化が $f_n = 1/N$ と $T^{(n)} = 1$ という条件が両方破れると、壊れるのである。

このことを利用して、小宮山ら [29] はエッジ状態の非平衡がどのくらいの距離、長持ちするのかを測定した。それにより、非平衡分布が 0.25mm 程度まで続くことを示した。

Bibliography

- [1] 英文の総合解説として、C.W.J. Beenakker and H. van Houten: *Solid State Physics* **44** (1991) pp.1-228 がよい。もっとも分量が多すぎるが。有名な夏の学校、Les Houches の講義録、“Mesoscopic quantum physics”, ed. Akkermans *et al.* (1996) North-Holland はいろいろな分野を詳しく解説している。やさしい日本語の解説書では、小野嘉之 “メソスコピック系の物理” (丸善) が面白い。また論文選集として、日本物理学会から “メソスコピック系” が出ている。最近、Y. Imry “Introduction to mesoscopic physics” (1997) Oxford, 川畑有郷 “メソスコピック系の物理学” (1997) 培風館が次々と出版された。一番最後にあげたのはさすがによく書けている。
- [2] M.L. Roukes *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 3011
- [3] Landauer: *IBM J. Res. Dev.* **1** (1957) 223, *Z. Phys.* **B 21** (1975) 247, **B 68** (1987) 217.
- [4] Büttiker: *Phys. Rev.* **B 38** (1988) 9375, 12724, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 229.
- [5] H.U. Baranger and A.D. Stone: *Phys. Rev.* **B40** (1989) 8169 に詳しい議論がなされている。
- [6] “Quantum dynamics of submicron structures” ed. H.A. Cerdeira *et al.*, NATO ASI Series E: Applied Sciences 291, Kluwer (1995).
- [7] B.J. van Wees *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 848.
- [8] A. Kawabata: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 372. 久保公式で 2 端子抵抗の量子化を議論した論文。
- [9] J. I. Pascual *et al.*: *Science* **267** (1995) 1793.
- [10] Y. Avishai and Y.B. Band: *Phys. Rev.* **B40** (1989) 12535. モードマッチングをつかって、透過確率を数値的に求めた論文。
- [11] H. van Houten *et al.*: *Phys. Rev.* **B39** (1989) 8556. 電子フォーカシングを扱った論文。

- [12] C.W.J. Beenakker and H. van Houten: Phys. Rev. Lett.**63** (1989) 1857. これは古典ビリヤード模型。
- [13] H.U. Baranger and A.D. Stone: Phys. Rev. Lett.**63** (1989) 414. 量子力学的な4端子形状での透過確率の計算。
- [14] W. Xue and P.A. Lee: Phys. Rev.**B38** (1988) 3913. 量子ドットの共鳴トンネル現象を議論した論文。
- [15] T. Heinzel *et al.*: Europhys. Lett. **26**(1994) 689. クーロンブロッケードの実験の一例である。
- [16] P.W. Anderson, Phys. Rev. **109**(1958) 1492. アンダーソンのオリジナル論文。
- [17] S. Yoshino and M. Okazaki: J. Phys. Soc. Jpn.**43** (1977) 415. 2次元電子の局在を大規模数値計算で扱った論文。100 × 100 サイトという大きな系をこの時代にしている。
- [18] P.A. Lee and T.V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **57** (1985)287. 1985年までのアンダーソン局在の理論をまとめた総合解説。
- [19] B. Kramer and A. MacKinnon, Rep. Prog. Phys. **56** (1993) 1469. 1990年初頭までの結果をまとめた総合解説。主に数値計算について解説している。
- [20] A.D. Stone: Phys. Rev. Lett.**54** (1985) 2692, P.A. Lee and A.D. Stone: Phys. Rev. Lett.**55** (1985) 1622.
- [21] T. Ohtsuki, K. Slevin and Y. Ono: J. Phys. Soc. Jpn.**62** (1993) 3979.
- [22] M.L. Mehta, *Random Matrices* 2nd Edition (Academic Press 1991). ランダム行列理論の教科書。
- [23] B.L. Altshuler and B.I. Shklovskii: Sov. Phys. JETP **64** (1986) 127.
- [24] H.U. Baranger and P.A. Mello: Phys. Rev. Lett.**73** (1994) 142.
- [25] C.W.J. Beenakker: Phys. Rev. Lett.**70** (1993) 1155.
- [26] 解説記事として T. Ando: Prog. Theor. Phys. Suppl. **84** (1985) 69; K. von Klitzing: Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 519; H. Aoki: Rep. Prog. Phys. **50** (1987) 655; また教科書として *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*: M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath and J. Hajdu (VCH 1994), 青木秀夫: “量子ホール効果”, 物理学最前線 **11** (共立出版 1985); 安藤恒也: “量子ホール効果”, 現代の物理学 (岩波書店) があげられる。
- [27] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper: Phys. Rev. Lett.**45** (1980) 494.
- [28] T. Ohtsuki and Y. Ono: J. Phys. Soc. Jpn.**58** (1989) 3863.
- [29] S. Komiyama *et al.*: Phys. Rev.**B40** (1989) 12566.