

p -radical group と radical の nilpotency index について

群馬大-教育 福島 博 (Hiroshi Fukushima)

最初に、次の群 $A_{q,n,r}$ を定義する。

q を素数, $F = GF(q^n)$, $F^* = \langle \lambda \rangle$

n の約数 r に対して $\mu = \lambda^{q^{nr}-1}$ とおく。

$\langle \alpha \rangle = \text{Gal}(F/GF(q^{nr}))$ とおくと $|\alpha| = r$ となる。

このとき $F^* = GF(q^{nr})^* \rtimes \langle \mu \rangle$

α を F から F への写像で $\alpha(x) = x\mu$ と定めると

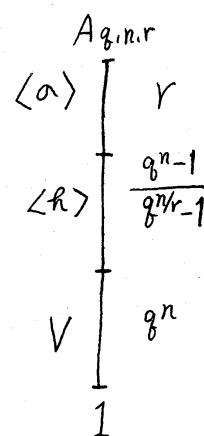
α は F の加法群 V の自己同型写像である。

$\langle \alpha \rangle \langle \mu \rangle \subseteq \text{Aut}(V)$, ここで半直積 $V \rtimes \langle \alpha \rangle \langle \mu \rangle$ を

$A_{q,n,r}$ と定める。これは affine semi-linear group $A\Gamma(V)$ の部分群である。この $A_{q,n,r}$ の特徴は、 V の任意の元 x は $\langle \alpha \rangle$ で共役をとると $x^{\alpha^i} = x\mu^i \in GF(q^{nr})^*$ とできるから α で centralize されることである。

§ 1 p -radical group

G を有限群, P を G の p -シロ-群, K を標数 p (> 0) の体とする。このとき $J(KG) \subseteq J(KH) \rtimes G \Rightarrow p \nmid |G:H|$. ここで



$J(\mathbb{K}G)$ は群環 $\mathbb{K}G$ の radical を表す。

逆に $p \nmid |G:H| \Rightarrow J(\mathbb{K}G) \subseteq J(\mathbb{K}H)\mathbb{K}G$ が成立する群 G を p -radical group という。このとき次は同値である。

- (i) G は p -radical group である。
- (ii) $(\mathbb{K}_p)^G$ は semi-simple.
- (iii) $J(\mathbb{K}G) \subseteq J(\mathbb{K}P)\mathbb{K}G$.
- (iv) $J(\mathbb{K}G) = \bigcap_{x \in G} J(\mathbb{K}P)^x \mathbb{K}G$

p -radical group の基本的性質は、Feit [1] の 5 章に述べられている。さて p -radical group については、次の定理がある。

定理 1 (奥山 [9]) p -radical group は p -solvable である。

G が p -length 1 のときは、次の定理がある。

定理 2 (津島 [11]) $G = PK$, $K = O_{p'}(G)$ のとき

G が p -radical $\Leftrightarrow [K, D] \cap C_K(D) = 1$ for $\forall D \in \mathcal{P}$.

例

- (1) 定理 2 より $G = PK$, $K = O_{p'}(G)$ で、 K が可換群ならば、 G は p -radical group である。
- (2) $SL(2, 3)$ は $p=3$ に対して p -radical group でない。
- (3) K : p' -group, Z : cyclic p -group とするとき、
 $K \wr Z$ が p -radical $\Leftrightarrow K$ が可換群。

次に p -length が 2 の場合の p -radical group G の構造が問題になるが、これに関して次の結果を得た。

定理 3 (福島 [4])

G は次を満たすとする。

- (1) $|G : O_{p', p, p'}(G)| = p$, $O_p(G) = 1$, $O_{p'}(G) = G$.
- (2) $O_{p', p}(G)$ の p -部分群 P_0 は可換群
- (3) $V = [O_{p'}(G), P_0]$ は G の minimal normal subgroup.

このとき G が p -radical であるための必要条件は次が成り立つことである。

- (A) $\bar{G} = G/V_{P_0}$ は kernel が $O_{p'}(\bar{G})$ であるフロアニウス群である。
- (B) V は elementary abelian q -group ($q \neq p$; 素数)
- (C) 次の (i) または (2) が成り立つ。

(i) $G = N_G(P_0)V$, $N_G(P_0) \cap V = 1$.

(ii) $P_0 \triangleleft P_0 H \triangleleft P_0 H \langle s \rangle = N_G(P_0)$,

ここで $|s| = p$, H は p' -group.

(iii) 共役で作用させると V は $N_G(P_0)$ -module

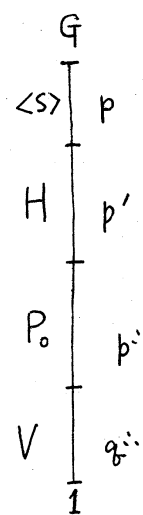
とみなせる。このとき $V = V_1 \times \cdots \times V_p$

(V_i は V_{P_0} の homogeneous complement) と表せる。

(iv) $P_i = C_{P_0}(V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_p)$ とおくと,

$P_0 = P_1 \times \cdots \times P_p$

(v) $V_i^{s^i} = V_{i+1}$, $P_i^{s^i} = P_{i+1}$ ($0 \leq i \leq p-1$)



(vi) V_i, P_i は H -invariant で, $V P_0 = (V_1 P_1) \times \cdots \times (V_p P_p)$.

(vii) $r = |H/C_H(V_1)|$, $|P_1| = p^m$, $|V_1| = q^n$ とおくと,

$$r|n, \quad \frac{q^n-1}{q^{nr}-1} = p^m \quad \text{で}$$

$V_i P_i H / C_H(V_i) \cong A_{q,n,r}$, $(1 \leq i \leq p)$ である。

(2) $C_G(v) \leq O_{p',p,p'}(G)$ for $\forall v \in V^\#$.

実際 $r|n$, $\frac{q^n-1}{q^{nr}-1} = p^m$ を満たす (q, n, r, m) に対して,
 Z を位数 p の巡回群として, $G = (A_{q,n,r}) \wr Z$ は, p -radical
 group である。

また (c)(2) の性質を満たす p -radical group もつくること
 ができる。さらにこの群は, p -length が 3, 4, 5, ... と帰納的に
 拡張され、次の定理を得ることができる。

定理 4 (福島 [3])

各自然数 n に対して, p -length n の p -radical group が
 存在する。

§ 2 nilpotency index

$J(kG)^{t-1} \neq 0$, $J(kG)^t = 0$ となる自然数 t を $J(kG)$ の nilpotency
 index (ヤ零指数) という。

P が位数 p^a の p -group のとき $a(p-1)+1 \leq t(p) \leq p^a$
 が成り立つ。 G が p -solvable のときも同様なことが成り

立つ。即ち

$$a(p-1) \leq t(G) \leq p^a, \quad \text{ここへ } p^a = |P|, \quad P \in \text{Syl}_p(G).$$

定理5 (越谷[6], 津島[10])

$$t(G) = p^a \iff P : \text{cyclic}$$

定理6 (本瀬, 二宮[8])

G が p -length 1 のとき $t(G) = a(p-1) + 1 \iff P : \text{elementary abelian}$

p -length が 2 以上 $t(G) = a(p-1) + 1$ を満す群の例として

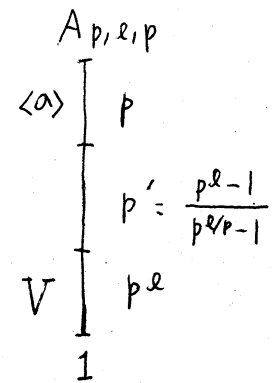
本瀬[7] は, $A_{p^2, p}$ を示した。この群は、

先に示したように, V の任意の元 x に対

して, $C_G(x)$ が α の共役元を含むから,

$C_G(x)$ は Sylow p -部分群を含み, これが

$t(G) = a(p-1) + 1$ となる本質的な性質とな



っている。この性質は、Brauer の height 0 予想を可解群の場合に解いた T. Wolf の論文[13] にもあらわれ, そこでは、

$G = V H \langle \alpha \rangle \supset V H \supset V$, $V : \text{elementary abelian } q\text{-group}$, $H ;$

p' -group, $|\alpha| = p$ としたとき, 任意の V の元 x に対して,

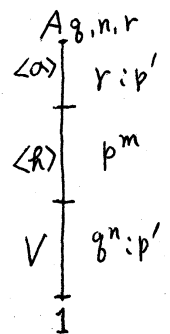
$C_G(x)$ が Sylow p -部分群を含むような群 G を決定すること

が Key Theorem となっている。

さらに定理3における $A_{g, n, r}$ と比較してみると,

$$\frac{g^n - 1}{g^{nr} - 1} = p^m \text{ より, この群においては, } V \text{ の任意の}$$

元 x に対して, $C_G(x)$ は, Hall p' -group を含む。



このように $A_{q,n,r}$ と $A_{p,e,p}$ は, p と p' の立場をかえて同じ性質を持っていることは興味深いことである。

さて $A_{p,e,p}$ は $t(G) = a(p-1)+1$ を満たすことを先に述べたが, 定理2より, これらは p -radical group でもあることがわかる。そこで $t(G) = a(p-1)+1$ を満たす p -radical group の構造を考え, 次の結果を得た。

定理7 ([5])

p -radical group G が $t(G) = a(p-1)+1$ であるための必要条件は, $K = O_p'(G)$ が, 次の条件を満たすことである。

$$K/O_p'(K) = G_1 \times M \quad ; \quad M = \text{elementary abelian } p\text{-group.}$$

$$G_1 = VN, \quad V \cap N = 1, \quad \text{すなわち } V = O_p(G_1).$$

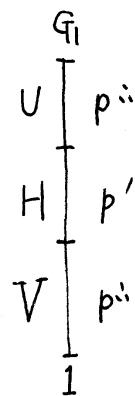
$$N = HU \triangleright H, \quad H: p'\text{-group}, \quad U: p\text{-group}$$

$$V = V_1 \times \cdots \times V_m, \quad H = H_1 \times \cdots \times H_m$$

$$VH = (V_1H_1) \times \cdots \times (V_mH_m)$$

$$V_i, H_i \text{ は } U\text{-invariant である,}$$

$$V_iH_iU/C_U(V_i) \cong A_{p,e,p} \quad (i=1, \dots, m)$$



これがその問題として, 次のものがある。

問題1. $G = O_{p',p,p'}(G)$ で $t(G) = a(p-1)+1$ となる群 G を決定せよ。

問題2. $t(G) = a(p-1)+1$ を満たす p -solvable group G の p -

length は, おさえられるか.

References

- [1] W. Feit, "The representation theory of finite group," North-Holland. Amsterdam, 1982.
- [2] H. Fukushima, On groups G of p -length 2 whose nilpotency indices of $J(KG)$ are $a(p-1)+1$, Hokkaido Math J. 20 (1991) 523-530.
- [3] H. Fukushima, p -length of p -radical groups are unbounded, to appear J. Algebra.
- [4] H. Fukushima, On p -radical groups G and the nilpotency indices of $J(KG)$. 投稿中.
- [5] H. Fukushima, Y. Hieda, T. Okuyama, Tanaka, On p -radical groups G whose nilpotency indices of $J(KG)$ are $a(p-1)+1$. 作成中.
- [6] S. Koshitani, On nilpotency indices of the radicals of group algebras of p -solvable groups, Proc. Japan Acad. 53, No 1, 13-16.
- [7] K. Motose, On the nilpotency index of the radical of a group algebra III, J. London Math Soc 25 (1982), 39-42.
- [8] K. Motose, Y. Ninomiya, On the nilpotency index of the radical of a group algebra, Hokkaido Math J 4 (1975), 261-264.

- [9] T. Okuyama, p -Radical groups are p -solvable, Osaka J. Math 23 (1986) 467-469.
- [10] Y. Tsushima, Some notes on the radical of a finite group ring, Osaka J. Math 15, 647-653.
- [11] Y. Tsushima, On p -radical groups, J. Algebra 103 (1986) 80-86.
- [12] D.A.R. Wallace, Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite soluble group, Proc. Edinburgh Math Soc 16, 127-134.
- [13] T. R. Wolf, Defect groups and character heights in blocks of solvable groups, J. Algebra 72, 183-209.