

不純物格子振動に於ける

Lattice Green's Function

京大 基研 武野 正三

§1. 序

所謂 "perturbed periodic lattice" の問題は lattice Green's function の概念及び方法が用いられる典型的な例である。此問題は周期的な格子場が不純物或は格子欠陥により生じた結果から生ずる一体場的問題と完全格子内に於ける粒子間相互作用により格子場が周期性を失ふことに起因する二体場或はもっと一般時に多体場問題とに大別出来る。此處では第一の問題を格子振動の場合に適用した例に就き述べる。¹⁾ 第二の問題の典型的な例は電子-空孔の束縛状態²⁾ 或は準束縛状態³⁾ である。Wannier 励起子⁴⁾、強磁性体或は反強磁性体に於ける所謂 "two-magnon bound states" 等である。

此研究会に於ける講演の大部分は lattice Green's function の解析性、其等の数値等導く数学的性質の解明に重点がおかれつつある。此處へは逆に単純物格子振動を例にとり導くその物理的側面を明らかにしようとした。

§ 2. Lattice Thermal Green's function と Impurity Modes

格子点 n に於ける原子の変位ベクトル $u(n)$ の α -成分 $u_\alpha(n)$ から導かれるハイゼンベルグ演算子 $u_\alpha(n, t)$ より作る二時間温度 Green's function $G_{\alpha\alpha'}(nn', t-t')$ を次の如く定義する

$$G_{\alpha\alpha'}(nn', t-t') = -i \theta(t-t') \langle [u_\alpha(n, t), u_{\alpha'}(n', t')] \rangle \quad (1)$$

$G_{\alpha\alpha'}(nn', t-t')$ の Fourier 変換 $G_{\alpha\alpha'}(nn', \omega)$ の pole より単純物を含んだ格子内での phonon の固有振動数及び実験に観測される諸種の物理量を計算することは出来る。尚このように定義されたグリーン関数の Fourier 変換 $G \equiv G(\omega)$ は格子内の原子の質量及びバネ定数より作る行列 M, K より導き出される classical Green's function $g \equiv (M\omega^2 - K)^{-1}$ と harmonic approximation の範囲内

に於て

$$G = (1/2\pi) g \quad (2)$$

の関係にあることに注意(たゞ、 g が通常 *lattice Green's function* と呼ばれるものである。以下簡単のため *harmonic approximation* の場合のみ言及を限ることにする。此近似の範囲内で(1)により定義される G の満たす式は閉じた形となり、本質的には一様問題となる。

格子場内に不純物が存在するとき $G \equiv G(\omega)$ の満たす式は一般的に次の如く書かれる。

$$G = (1/2\pi) g_0 + g_0 \nabla G. \quad (3)$$

但し ∇ は不純物による周期場 u のずみを表はすポテンシャル、 g_0 は完全格子に於ける g である。此場合 *Lattice Green's function* を用いる精神は ∇ が

$$\nabla = \begin{pmatrix} v_i & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と空間的に局在しているとき、"不純物 region" に属する G を G_i 、"host lattice region" に属する G を G_h とするとき(3)は G の代りに g を用いて書ける

$$\left. \begin{aligned} G_i &= G_{0i} + G_{0i} v_i G_i \\ G_h &= G_{0h} + G_{0h} v_i G_i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と分離出来、*submatrix* v_i の次元数が比較的に $t \ll \gamma$ となる G_i は容易に求む。 (5) の第 2 式から G_h も又求むことが出来る。尚此間の事情は例えは三次元格子場内に少数個の面状欠陥、線状欠陥があるときも同様である。此等の場合は本節的に γ 一次元、二次元系に於ける不純物の問題に歸着する。尚不純物が有限の濃度で存在する場合は別の取扱が必要であるが此處ではふくむ。 (5) の第一式から不純物準位を求めよう。

$$\operatorname{Re} \left\{ \det \left| 1 - G_0(\omega^2 - i0) v_i \right| \right\} \equiv \operatorname{Re} \{ D(\omega^2) \} = 0 \quad (6)$$

となる。但し $G_0(\omega) \equiv G_0(\omega^2)$ 、又 $\operatorname{Re} \{ A \}$ は A の real part を表す。もし (6) の根が完全格子の作る phonon frequency band の外にある場合、(6) は所謂 localized mode 又は gap mode の固有振動数をさめる式となる。この根が band の中に埋もれて存在する場合、(6) は virtual localized mode 又は resonant mode を與える。此等の共鳴準位が十分意味を持つたためには host lattice band

この相互作用から生じる中から十分小さくなくつたものなり。この中では共振単位のスペクトルを Lorentzian で近似すれば

$$\Gamma_0 = \text{Im} \{ D(\omega_0^2 - i0) \} / |d \text{Re} D(\omega^2 - i0) / d\omega|_{\omega=\omega_0} \quad (17)$$

が得られる。但し ω_0 は (16) の根、 $\text{Im} \{ A \}$ は A の imaginary part である。

§3 諸種の物理量の Lattice Green's Function による計算

前節で述べた如く lattice Green's function より固有単位または準固有単位が計算出来るのは最も典型的な例の一つであるが、此處では実験事実とも密接に関連を有した諸種の物理量が lattice Green's function により計算出来ることを極く簡単に述べてたい。

(i) 振動数スペクトル $D(\omega)$

I に規格化した frequency spectrum $D(\omega)$ を考える。これは次の式で表わされる。

$$D(\omega) = (4\omega/3N) \text{Im} \{ T_r M G(\omega^2 - i0) \} \quad (18)$$

但し N は格子内の atom の総数である。特に $D(\omega)$ を完全格子の場合の $D(\omega)$ の値 $D_0(\omega)$ と extra frequency

spectrum $\Delta \mathcal{D}(\omega)$ の形に書ける即ち

$$\mathcal{D}(\omega) = \mathcal{D}_0(\omega) + \Delta \mathcal{D}(\omega) \quad (9)$$

$\Delta \mathcal{D}(\omega)$ の式は⁽⁵⁾

$$\Delta \mathcal{D}(\omega) = (2/3N) (d/d\omega) \arg \{ D(\omega^2 - i0) \} \quad (10)$$

の形に書けることが出来る。但し $\arg(x+iy) = \tan^{-1}(y/x)$ である。此式は特に resonant mode に起因する extra specific heat の計算に有用である。

(ii) 比熱

$\mathcal{D}(\omega)$ が求まれば定積比熱 C_V は⁽¹⁾

$$C_V = 3N k_B \int_0^{\omega_m} d\omega \mathcal{D}(\omega) \left\{ (\beta \hbar \omega / 2)^2 / \sinh^2(\beta \hbar \omega / 2) \right\} \quad (11)$$

より直ちに求まらる。これを (11) に代入すれば extra specific heat ΔC_V が容易に求まる。

(iii) displacement - displacement correlation function

dynamical to 相関関係 $\langle u_{\alpha}(m, t') u_{\alpha}(m, t) \rangle$ は

次の公式を用いて求まらる。

$$\langle u_{\alpha}(n, t') u_{\alpha}(n, t) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} \{ G_{\alpha\alpha}(nn', (\omega - i0)^2) \}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \times e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (12)$$

特に mean square displacement $\langle u(n)^2 \rangle$ は

$$\langle u(n)^2 \rangle = 2 \int_0^{\omega_M} d\omega \coth(\beta \hbar \omega / 2) \text{Im} \left\{ \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(nn, \omega^2 - i0) \right\} \quad (13)$$

より求めよう。

(iv) 散乱断面積

不純物が格子場中存在する場合、それは又 $\mathcal{F}_1$ の散乱に寄与する。波数ベクトル k を持った $\mathcal{F}_1$ に k' に散乱する確率は次の公式から計算出来る。

$$P(k \rightarrow k') = (2\pi/\hbar) |\langle k | T | k' \rangle|^2 \delta(\omega(k) - \omega(k')) \quad (14)$$

これから

$$T = v_i (1 - g_{0i} v_i)^{-1} \quad (15)$$

は $\mathcal{F}_1$ の不純物に対する全散乱過程を表した T -行列である。(14)、(15)より散乱の断面積率は不純物散乱による relaxation time τ_i が容易に求まる。弛緩率 τ_i^{-1} の寄与も直ちに計算出来る。

(V) impurity-induced absorption

久保の公式を用いると双光子吸収に対する吸収係数 $A(\omega)$ は⁽⁶⁾

$$A(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \langle P(t) P(0) \rangle e^{-i\omega t} dt \quad (16)$$

の形に表はされる。但し

$$P = \sum_n e_n u(n) \quad (17)$$

は全系の dipole moment である。アノマリハス係数に就て考察すれば、通常と異なる範囲内に於て、 $A(\omega)$ は所謂 selection rule のため Reststrahl frequency の付近に delta-function 型の吸収を生ずるに過ぎない。格子場内に不純物が存在すれば selection rule が破れる。この破れは相関関数 $\langle P(t) P(0) \rangle$ に於て不純物原子の寄与のみが残ると云う形に表はれる。即ち $A(\omega)$ は⁽⁶⁾ $G(\omega)$ によつて次の如く表はされることを示すことができる:

$$A(\omega) \propto \text{Im} \left\{ \sum_{ij} G(ij; \omega^2 - i0) \right\} \quad (18)$$

(i, j : 不純物原子の位置)

但し $G(ij; \omega^2)$ は不純物 site のみに属する Green function である。不純物の濃度が十分小さくは $G(ij)$ の

non-diagonal element を無視することに出来る、証明単純になる。大部分のアルカリハライド結晶の実験結果はこのモデルで説明出来る場合が多い。

§ 4. An exactly analytically soluble model

§ 3 で概略したように G が求まれば諸種の物理量が求まるが、特に興味あるのは G_i である。(5) の第一式を解くには G_i が ^{完全格子の} lattice Green's function g_0 により表わされる。此分野に於ける多くの研究は此方法を遂行するのに、下格子物の質量と host atom の質量の差のみを V にとり入れ、force constant の変化は無視した。その一例は g_0 に対して数値計算が実行された。結果が数値的な形に於て求められた。このような立場は日本及び欧米各国に於て ^{多く} 行われて来たのであるが、筆者は バネ定数の変化を考慮することによる本質的な立場から此種の問題に迫ることに、又単純化さすべく、非現実的であるが 解析的に厳密に解を得るモデルを採用した。又グリーン関数も漸近的な性質をい 解析的な形を求めるときを重視した。このような立場を取ることに於て問題の一般的な性質が得られると信じたからである。

採用したモデルは単純立方格子を考へ、此格子内にある原子は最近接原子とのみ相互作用をするを假定した。又 central force constant と noncentral force constant の差を無視した。今 host atom の質量を M , 不純物原子の質量を M' とし、host atom 同士の間に働くバネ定数を K , 不純物原子と host atom の間に働くバネ定数を K' とし、するに不純物を特徴づける パラメーターを

$$\lambda = (M' - M)/M, \quad \mu = (K' - K)/K \quad (19)$$

をとりこくが出来る。one-impurity problem を考へた場合、(4) の v_i 従つて (6) の secular determinant は 7×7 の行列を形成する。此等は対称性から計算時に s 型、 p 型、 d 型の 3 種のモードに分解出来るが、特に興味があるのは、不純物の位置に於ける有限の振幅を持つ s 型モードである。此 s 型モードの secular determinant $D(\omega^2)$ の奇異は次の如く書くことが出来る。^{(6) (7)}

$$D(\omega^2) = 1 + \mu + 2\mu(1 + \lambda)(\omega/\omega_n)^2 + \left\{ \lambda(1 + \mu) - 2\mu(1 + \lambda)(\omega/\omega_n)^2 \right\} M\omega_n^2 g_0(0, \omega^2) \quad (20)$$

$(g_0(0, \omega^2) \equiv g_0(00, \omega^2))$

又不純物の位置を i とすればこの位置に於ける G の値は

$$G(i, i, \omega^2) = \left\{ 1/24\pi K D(\omega^2) \right\} \left[2\mu + 1 + \mu - 2\mu(\omega/\omega_n)^2 \right] M\omega_n^2 g(0, \omega^2) \quad (21)$$

となる。但し $\omega_m^2 = 12K/M$ は面格子の最大音波振動数の二乗である。§3で例示した諸種の物理量は $G(i0, \omega^2-i0)$ 又は $D(\omega^2-i0)$ が与えられるべきである。此等の量 $B(\omega^2)$ は従つた次のような特徴的な形を持つ。

$$B(\omega^2) = \frac{C(\omega)}{[Re D(\omega^2)]^2 + [Im D(\omega^2)]^2} \quad (22)$$

$C(\omega)$ は ω の奇関数である。(6)の解 ω_0 が存在し且 $Im D(\omega_0)^2$ が十分小に与えれば(22)は一般に共鳴型の形を持つ。 $A(\omega^2)$ を $\omega = \omega_0$ の近傍に展開すれば

$$A(\omega^2) = \frac{\Gamma_0 + Q(\omega_0)(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_0^2} C(\omega_0) \quad (23)$$

の形が得られ、これは asymmetry factor を持った Lorentzian である。但し

$$\Gamma_0 = Im D(\omega_0^2) / |d Re D(\omega^2)/d\omega|_{\omega=\omega_0} \quad (24)$$

(7)で定義したものはこのような考えを用いて導かれたものである。格子振動の問題に於ては一般に $Q(\omega_0)$ からの寄与は小さい。

上記の計算は対角化された lattice Green's function の real & imaginary value

$$g_0(0, \omega^2 \pm i0) \equiv g_0'(0, \omega^2) \mp i g_0''(0, \omega^2) \quad (25)$$

を求める必要があるが、此は次の場合解析的に
 近似形を求めることが出来る：^{(6) (7)}

$$(i) \quad \omega^2 / \omega_m^2 \gg 1$$

$$\begin{cases} g'_0(0, \omega^2) = (1/M\omega^2) \{1 + (\omega_m^2/2\omega^2)\} \\ g''_0(0, \omega^2) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$(ii) \quad \omega^2 / \omega_m^2 \ll 1$$

$$\begin{cases} g'_0(0, \omega^2) = -3/M\omega^2 \\ g''_0(0, \omega^2) = 3\omega/2M\omega_m^3 \end{cases} \quad (27)$$

(26) は $\omega^2 - \omega(k)^2$ を $\omega(k)^2/\omega^2$ の中へ展開 (1 能率を計算) 求める。(27) は $g''(0, \omega^2)$ に Debye 近似を採用 (1 求めた。特に (27) の第一式は S.C.C. に於ける Watson integral の値の 6 倍 即ち $6 \times 0.50546 \dots$ に対応するものがある。此處へ値を代入 (16), (20) に代入すると次の結果が得られる：^{(6) (7)}

$$(i) \quad \omega_0^2 = - \left\{ 2\lambda(1+\mu) / (1+\lambda) \right\} \omega_m^2 \quad (28)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \omega_0^2 = \left\{ (1+\mu) / (3\lambda + \lambda\mu - 2\mu) \right\} \omega_m^2 \\ \Gamma_0 = (3\pi/4) |\lambda| \omega_0^4 / \omega_m^3 \end{cases} \quad (29)$$

この結果より (i) の場合 $M' \ll M$ に対し又 (ii) の場合 $K' \ll K$ に対し Einstein oscillator model が極限として成立することが示される。

上記のように (1) 解析的に得られた結果より §3 で求めた諸種の物理量の一般的な定性的性質を論じることが出来るが、此處ではそれは新面の都合上省略し、 ω_0 と K'/K の計算値をアルカリハライドの場合に適用した例にのみ示す。此場合 ω_0 を実験値と比較すれば K'/K の値が求まることになる、この計算結果は次頁の表に示す。著しいことは下砒物原子の遷移に於て force constant の softening が起つること及び H^- 及び Li^+ に於て mean square displacement が異常に大きいことである。此は此等の質量の軽い下砒物原子の振動が非常に非調和的であることを示している。 Li^+ の場合 force constant の減少は ionic radius の差により説明が出来るが、これは必ずしもなく、"dynamical softening" の概念を導入することが必要と思われる。⁽⁹⁾ 尚上記の Li^+ 原子の著しい非調和振動は、固体ヘリウム、強誘電体の場合に次いで或種の host lattice 内に於ける下砒物振動の著しい非調和性を示す典型的な例に

10 7 14 3 < 2 > 7 11 3.

References

- (1) See, for example, A. A. Maradudin, Solid State Phys. edited by H. Seitz and D. Turnbull), vol. 18, 274 , 19, 2 (1966).
- (2) See, for example, ^{Y. Takeuchi,} Prog. Theor. Phys. 18, 421 (1957); Prog. Theor. Phys. Suppl. 12, 75 (1959).
- (3) R. J. Elliott and M. F. Thorpe, J. Phys. C. 2, 1630 (1969).
- (4) H. Keffler, Hand. Phys. (Springer-Verlag, Berlin 1966), Vol. 18/2.
- (5) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. 28, 33 (1962).
- (6) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. 38, 995 (1967).
- (7) A. J. Siemero and S. Takeno, Phys. Rev. 140, A1030 (1965).
- (8) D. Paul and S. Takeno, RIFP - 122 (preprint), submitted to Phys. Rev.
- (9) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. Suppl. 45, 137 (1970)

TABLE I

Impurity	Host	ω_M (cm ⁻¹)	a (Å)	ω_D (cm ⁻¹)	r_i/r_h	M'/M	K_i/K_h	$\langle u_i^2 \rangle^{1/2}/(a/2)$
Li ⁺	NaCl	257	5.63	44.0	0.63	0.304	0.015	0.14
	KBr	167	6.59	16.3	0.45	0.184	0.0026	0.20
Ag ⁺	NaCl	257	5.63	52.5	1.33	4.70	0.32	0.034
	KCl	210	6.28	38.5	0.95	2.76	0.20	0.032
	KBr	167	6.59	33.5	0.95	2.76	0.16	0.036
	KI	135	7.05	17.4	0.95	2.76	0.060	0.046
H ⁻	NaCl	257	5.63	563	1.15	0.0282	0.35	0.11
	KCl	210	6.28	500	1.15	0.0282	0.31	0.10
	KBr	167	6.59	445	1.07	0.0125	0.27	0.10
	KI	135	7.05	379	0.96	0.00778	0.26	0.10

Characteristic data for impurity-doped alkali-halide crystals. ω_M is the maximum lattice phonon frequency, ~~ω_D is the zero-phonon impurity mode~~, a is the lattice constant, ω_D is the frequency of the zero-phonon impurity mode, r is the ionic radius, M is the ionic mass, K is the effective force constant, ~~ω_D is the zero-phonon impurity mode~~, and $\langle u_i^2 \rangle^{1/2}$ is the rms impurity displacement. The subscripts i and h refer to impurity and host lattice.