

Reductive algebra について

東北大 教養 御園生善高

$\mathcal{A}$ をヒルベルト空間 H 上の単位元をもつ弱閉な有界作用素の algebra とする. $\mathcal{A}$ で不変な H の任意の部分空間が $\mathcal{A}$ を約するとき, $\mathcal{A}$ を reductive であるという. 有界作用素の不変部分空間問題と関連して, いわゆる *transitive algebra problem* がある. この問題の一般化として, Radjavi および Rosenthal は

$\mathcal{A}$ が reductive ならば $\mathcal{A}$ は self-adjoint か
という問題 — *reductive algebra problem* — を提唱した.
Reductive algebra について多くの研究がなされているが [4], まだ問題は完全に解決されていない. この報告の目的は von Neumann algebra $\mathcal{A}' \cap (\mathcal{A}^*)'$ に注意した考察を, Hoover [3], Azoff [1] に従って解説することである.

1 グラフ部分空間 H をヒルベルト空間, n を自然数とすると, H の n コピーの直和を $H^{(n)}$ で表わす. A を H 上の

作用素とすると、 A の n コピーの直和として表わされる $H^{(n)}$ 上の作用素を $A^{(n)}$ で表わす。 S を H 上の作用素の集合とすると、 $S^{(n)} = \{A^{(n)} \mid A \in S\}$ とし、 $M_n(S)$ を各成分が S の要素である $n \times n$ 行列の集合とする。 $B(H)$ を H 上のすべての有界作用素の作る algebra とし、 $S \subset B(H)$ とするとき $(S^{(n)})' = M_n(S')$ および $(M_n(S))' = S'^{(n)}$ がなりたつ。 A で不変な H の部分空間の集合を $\text{Lat } A$ で表わし、 $\text{Lat } S = \bigcap_{A \in S} \text{Lat } A$ とする。 $\text{Lat } A^{(n)}$, $\text{Lat } S^{(n)}$ 等も同様にして定義する。

以下、 $\mathcal{A} (\subset B(H))$ は単位元をもつ algebra とする。このとき、次の補題がなりたつ。 [4, Theorem 7.1]

補題 1.1 $\mathcal{A}$ の強位相に関する閉包は

$$\{B \in B(H) \mid \text{Lat } \mathcal{A}^{(n)} \subset \text{Lat } B^{(n)} \text{ for all } n\}$$

に等しい。またこれは弱位相に関する閉包に等しい。

$H^{(n)}$ の自明でない部分空間 M が

$$x = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n) \in M, \quad x_1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

をみたすとき、 M を $H^{(n)}$ の グラフ部分空間 という。このとき、

$\mathcal{D} = \{x_1 \mid x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in M\}$ を定義域とする H 上の (必ずしも有界とは限らない) 作用素 $T_2, \dots, T_n$ が存在し

て

$$M = \{x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

と表わせる. $T_2, \dots, T_n$ を M に関する グラフ変換 という.

$x = (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n) \in H^{(n)}$ に対して, x_i を対応させる $H^{(n)}$ から H への projection を $\pi_i (i=1, 2, \dots, n)$ で表わす. $S \in B(H)$ の部分集合とし, $M \in S^{(n)}$ で不変な $H^{(n)}$ の部分空間とするとき, $\pi_1(M)$ を S の characteristic manifold という.

($\pi_i(M) (i=2, 3, \dots, n)$ も characteristic manifold になる)

S の characteristic manifold の集合を $\text{Char } S$ で表わす.

$$\text{Lat } S \subset \text{Char } S$$

であることは明らかである.

補題 1.2 B を $\mathcal{A}$ を含む弱閉な algebra とする. $\mathcal{A} \subseteq B$ とし, n を $\text{Lat } \mathcal{A}^{(n)} \neq \text{Lat } B^{(n)}$ をみたす最小の自然数とすれば

$$M \in \text{Lat } \mathcal{A}^{(n)}, M \in \text{Lat } B^{(n)}$$

をみたす $H^{(n)}$ のグラフ部分空間 M が存在する.

証明 補題 1.1 から, $M_1 \in \text{Lat } \mathcal{A}^{(n)}, M_1 \in \text{Lat } B^{(n)}$ をみたす $H^{(n)}$ の部分空間 M_1 が存在する.

$$M_2 = \{ (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n) \in M_1 \mid x_1 = 0 \}$$

とすれば, M_2 は $\mathcal{A}^{(n)}$ で不変な $H^{(n)}$ の部分空間であるが, $H^{(n-1)}$ の部分空間と考えることができる. このとき $M_2 \in \text{Lat } \mathcal{A}^{(n-1)}$

であるから仮定より $M_2 \in \text{Lat } B^{(n-1)}$. すなわち $M_2 \in \text{Lat } B^{(n)}$.

いま $M = M_1 \oplus M_2$ とすれば, M が求めるグラフ部分空間である.

定理 1.3 $\mathcal{A}$ が自明でない characteristic manifold をもたないならば, $\mathcal{A}$ は $B(H)$ で稠密である.

証明 補題 1.1 から

$$\text{Lat } \mathcal{A}^{(n)} = \text{Lat } B(H)^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots)$$

を示せばよい. M を自明でない $\text{Lat } \mathcal{A}^{(n)}$ の元とする. 補題 1.2 からグラフ部分空間として一般性を失わない.

$$M = \{x \oplus T_2 x \oplus \dots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

とする. 仮定から $\mathcal{D} = \pi_1(M) = H$ をうる. したがって, 閉写像定理から, $T_2, \dots, T_n$ は有界である.

$\lambda_i \in \sigma(T_i)$ を任意にとるとき, $T_i - \lambda_i I$ のグラフ

$$\{x \oplus (T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\}$$

は $\mathcal{A}^{(2)}$ で不変であるから, $\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\}$ は $\mathcal{A}$ の characteristic manifold で, $\{0\}$ または H である. $\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\} = H$ とすれば, 閉写像定理から, $(T_i - \lambda_i I)^{-1} \in B(H)$ となり仮定に反する. ゆえに

$$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\} = \{0\}$$

すなわち $T_i = \lambda_i I$ である. i は任意であるから

$$M \in \text{Lat } B(H)^{(n)}$$

2 Reductive algebras $\mathcal{A}$ を H 上の弱閉な algebra とする. $\mathcal{A}$ で不変な H の任意の部分空間が $\mathcal{A}$ を約するとき, $\mathcal{A}$ を

reductive であるという。 $\mathcal{A}$ が reductive ならば $\mathcal{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$ および $\mathcal{A}''$ が reductive であることが容易に示される。 $\mathcal{A}' \cap (\mathcal{A}^*)'$ は von Neumann algebra で、これを $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ または単に $\mathcal{I}$ で表わし、 $\mathcal{A}$ の invariant algebra という。

定理 2.1 $\mathcal{A}$ が reductive で、 $\mathcal{I}$ が properly infinite ならば $\mathcal{A}$ は self-adjoint である。

証明 補題 1.1 から

$$\text{Lat } \mathcal{A}^{(n)} \subseteq \text{Lat } \mathcal{A}^{*(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を示せばよい。すなわち、すべての自然数 n に対して、 $\mathcal{A}^{(n)}$ が reductive であることを示せばよい。 $\mathcal{I}$ が properly infinite であるから

$$\sum_{i=1}^n P_i = I, \quad P_i \sim I \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

をみたす互いに直交する projection $P_1, P_2, \dots, P_n$ が存在する。ゆえに $\mathcal{A}^{(n)}$ は $\mathcal{A}$ とユニタリ同値で、 $\mathcal{A}$ が reductive であるから、 $\mathcal{A}^{(n)}$ も reductive である。したがって定理が証明された。

定理 2.2 $\mathcal{A}$ が reductive で、 $\mathcal{I}$ が cyclic vector をもつならば $\mathcal{A}$ は self-adjoint である。

証明 $A \in \mathcal{A}$, $x_i \in H$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を任意にとり

$$\Pi = \{T \mid \|(T - A^*)x_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

とする。いま

$$\phi(T) = \sum_{i=1}^n (Tx_i, x_i)$$

とすれば, ϕ は $\mathcal{H}'$ 上の positive normal linear functional である. $\mathcal{H}$ が cyclic vector をもつから, $\mathcal{H}'$ は separating vector をもつ. ゆえに, すべての $T \in \mathcal{H}'$ に対して

$$\phi(T) = (Tx_0, x_0)$$

となるような $x_0 \in \mathcal{H}$ が存在する. $\{Ax_0 \mid A \in \mathcal{A}\}$ の閉包を M とすれば, $M \in \text{Lat } \mathcal{A}$ であることは明らかである. 仮定から $\mathcal{A}$ は reductive であるから, $M \in \text{Lat } \mathcal{A}^*$. ゆえに $A^*x_0 \in M$ をうる. したがって

$$\|Bx_0 - A^*x_0\| < \varepsilon$$

をみたす $B \in \mathcal{A}$ が存在する.

$$\begin{aligned} \|Bx_0 - A^*x_0\|^2 &= ((B - A^*)^*(B - A^*)x_0, x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n ((B - A^*)^*(B - A^*)x_i, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \|(B - A^*)x_i\|^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\|(B - A^*)x_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

これは $B \in \overline{\mathcal{A}}$ であることを示している. $\mathcal{A}$ は強閉であるから $A^* \in \mathcal{A}$. $A \in \mathcal{A}$ は任意であったから, $\mathcal{A}$ が self-adjoint であることが示された.

Reductive algebra problem :

$\mathcal{A}$ が reductive $\Rightarrow \mathcal{A}$ は self-adjoint か ?

を一步ゆるめて,

$\mathcal{A}$ が reductive $\Rightarrow \mathcal{A}'$ は self-adjoint か?

という問題を考えよう。この問題を考えるに当って, 次の補題を示そう。

補題 2.3 $\mathcal{A}$ が reductive であるとき, $\mathcal{J}$ の center は $\mathcal{A}'$ に含まれる。

証明 P を $\mathcal{J}$ の任意の central projection とし, その値域を M とする。 $M \in \text{Lat } \mathcal{A}'$ であることを示そう。 $A \in \mathcal{A}'$ を任意にとり $\{Ax \mid x \in M\}$ の閉包を M_1 とすれば, $M_1 \in \text{Lat } \mathcal{A}$ である。 M_1 への projection を Q とし, $Q_1 = Q - PQ$ とすれば, $\mathcal{A}$ が reductive であるから, $Q \in \mathcal{J}$ であって Q_1 は P と直交する。

$$(Q_1 A P)^2 = 0$$

であるから, [4, Lemma 9.2] により, $Q_1 A P \in \mathcal{A}^{*'}$ である。したがって $Q_1 A P \in \mathcal{J}$ となり, $Q_1 A P$ は P と可換である。ゆえに

$$Q_1 A P = Q_1 A P P = P Q_1 A P = 0$$

これは $Q_1 = 0$ であることを示している。ゆえに $PQ = Q$ 。すなわち $M_1 \in \text{Lat } \mathcal{A}'$ 。同様にして

$$(I - P)H \in \text{Lat } \mathcal{A}'$$

が示される。したがって $P \in \mathcal{A}'$ をうる。 P は $\mathcal{J}$ の任意の

central projection であったから補題が示された。

H の部分空間 M が von Neumann algebra $\mathcal{A}$ を約するとき、 $\mathcal{A}|M$ はまた von Neumann algebra である。 $\mathcal{A}$ が reductive の場合、 $\mathcal{A}|M$ の弱閉包がまた reductive であることは容易に示されるが

$\mathcal{A}|M$ が弱閉であるか

という問題は未解決である。 P が $\mathcal{J}$ の central projection であれば

$$\mathcal{J}_P = \mathcal{A}'_P \wedge (\mathcal{A}^*)'_P$$

であることを注意しておく。

定理 2.4 $\mathcal{A}$ が reductive で、 $\mathcal{J}_P$ が可換でかつ infinite uniform multiplicity であるような central projection が存在しないとき、 $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^*$ ($= \mathcal{J}$) である。

証明 補題 2.3 から、 $\mathcal{J}$ の central projection P は $\mathcal{A}'$ に属するから

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \mathcal{A}'_P \oplus \mathcal{A}'_{I-P} = (\mathcal{A}_P)' \oplus (\mathcal{A}_{I-P})' \\ &= (\overline{\mathcal{A}_P})' \oplus (\overline{\mathcal{A}_{I-P}})' \end{aligned}$$

したがって、 $\mathcal{J}$ が pure type の場合に定理を示せばよい。

$\mathcal{J}$ が I_∞, II_∞, III 型の場合は、定理 2.1 から、 $\mathcal{A}$ が self-adjoint であり、 $\mathcal{J}$ も self-adjoint である。

$\mathcal{J}$ が II_1 型の場合

$$P_1 \sim P_2, \quad P_1 + P_2 = I$$

をみたす互いに直交する $\mathcal{J}$ の projection P_1 と P_2 が存在する.

$\mathcal{B} = \mathcal{A}_{P_1}$ とすれば

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(2)}, \quad \mathcal{A}' = M_2(\mathcal{B}')$$

ゆえに, $\mathcal{A}'$ が self-adjoint であることを示すには, $\mathcal{B}'$ が self-adjoint であることを示せばよい. $T \in \mathcal{B}'$ とすれば, T は $K = P_1 H$ 上の作用素で

$$M = \{ (x \oplus Tx) \mid x \in K \}$$

は $\mathcal{B}^{(2)}$ で不変である. $\mathcal{B}^{(2)}$ は reductive であるから, M は $\mathcal{B}^{(2)}$ を約する. ゆえにすべての $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$(B^*)^{(2)}(x \oplus Tx) = (B^*x, B^*Tx) \in M$$

これは

$$B^*T = TB^*$$

がすべての $B \in \mathcal{B}$ に対してなりたつことを示している. ゆえに $T \in (\mathcal{B}^*)'$. したがって $T^* \in \mathcal{B}'$ をうる. すなわち $\mathcal{B}'$ は self-adjoint である.

$\mathcal{J}$ が I_n 型 ($2 < n < \infty$) の場合は上と同様にして証明できる. $\mathcal{J}$ が I_1 型の場合について示そう. $\mathcal{J}$ は uniform multiplicity n ($n < \infty$) であると仮定して一般性を失わない. このとき

$$\mathcal{J} = \mathcal{B}^{(n)}, \quad H = K^{(n)}$$

と仮定できる. ここに $\mathcal{B}$ は K 上の maximal abelian self-adjoint algebra である. いま $T \in \mathcal{A}'$ とすれば, 補題 2.3 から $T \in \mathcal{J}'$ である. $n = 1$ の場合は, $\mathcal{J}$ は maximal abelian であるから $T \in \mathcal{J}$. すなわち $\mathcal{A}' \in \mathcal{J}$ で, $\mathcal{A}'$ は self-adjoint である. $n > 1$ とすれば, $\mathcal{J}' = M_n(\mathcal{B})$ であるから

$$T = (T_{ij}), \quad T_{ij} \in \mathcal{B} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

と表わせる. [4, Theorem 7.20] から

$$\Pi T \Pi^* = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & S_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}, \quad S_{ij} \in \mathcal{B}$$

となるような $\mathcal{J}'$ のユニタリ作用素 Π が存在する. $\Pi \mathcal{A} \Pi^*$ は reductive で, その invariant algebra は $\Pi \mathcal{J} \Pi^* = \mathcal{J}$ である. ゆえに, あらかじめ $\mathcal{A}$ として $\Pi \mathcal{A} \Pi^*$ を考えることにより, $i > j$ ならば $T_{ij} = 0$ と仮定して一般性を失わない.

いま

$$T' = T - T_{11}^{(n)}$$

とすれば, $T' \in \mathcal{A}'$ であるから

$$M = \mathcal{R}(T') \in \text{Lat } \mathcal{A}$$

しかるに, T' の第 1 列はすべて 0 であるから, 任意の $x \in K$ に対して $(x, 0, \dots, 0) \in M$. これは $M = H$ であることを示

している. すなわち $T' = 0$. ゆえに $T = T_{11} \in \mathcal{I}$ をうる. これは $\mathcal{A}' = \mathcal{I}$ であることを示している. したがって $\mathcal{A}'$ は self-adjoint である.

3 Characteristic manifolds $\mathcal{A} \subset B(H)$ を algebra とし, $R(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ より生成される von Neumann algebra とする.

定理 3.1 ある $k (\neq 1)$ に対して, $\mathcal{A}^{(k)}$ の任意の characteristic manifold が $R(\mathcal{A})^{(k)}$ で不変ならば, $\mathcal{A}$ は $R(\mathcal{A})$ で弱稠密である.

証明 補題 1.1 から

$$M \in \text{Lat } \mathcal{A}^{(n)} \Rightarrow M \in \text{Lat } R(\mathcal{A})^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を示せばよい. 補題 1.2 から, M をグラフ部分空間として一般性を失わない.

$$M = \{x \oplus T_2 x \oplus \dots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

とする. いま

$$M_1 = \{ \overbrace{x \oplus x \oplus \dots \oplus x}^k \oplus T_2 x \oplus \dots \oplus \overbrace{x \oplus \dots \oplus x}^k \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

とすれば, $M_1 \in \text{Lat } \mathcal{A}^{(kn)}$ である. ゆえに

$$M_i = \{x \oplus \dots \oplus x \oplus T_i x \mid x \in \mathcal{D}\} \in \text{Char } \mathcal{A}^{(k)}$$

($i = 2, 3, \dots, n$) である. したがって M_i は $R(\mathcal{A})^{(k)}$ で不変である. ゆえに, 任意の $B \in R(\mathcal{A})$ に対して

$$B T_i \leq T_i B \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

これは M が $R(\alpha)^{(n)}$ で不変であることを示している.

Voiculescu [5] は $\alpha^{(3)}$ で不変な $H^{(3)}$ の任意の有界作用素の値域が $R(\alpha)^{(3)}$ で不変ならば, α は $R(\alpha)$ で弱稠密であることを示したが, 定理はその一般化になっている.

以下この節では, α に対して条件:

(C) $\text{Char } \alpha$ の任意の manifold は $R(\alpha)$ で不変であることを附加して考えよう. 容易にわかることは

- (i) α が弱閉で (C) をみたせば α は *reductive* である.
- (ii) α が (C) をみたせば, α の弱閉もまた (C) をみたす.

定理 3.2 α は弱閉でかつ条件 (C) をみたすとする. さらに

$$\sum P_i = I, \quad P_i \sim P_j$$

をみたす J の互いに直交する projection $\{P_i\}$ が存在すれば, α は *self-adjoint* である.

証明 $\{P_i\}$ を有限個の集合と仮定して一般性を失わない. これを $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ とする. $B = R(\alpha)_{P_1}$, $\alpha_1 = \alpha_{P_1}$ とすれば $R(\alpha) = B^{(k)}$, $\alpha = \alpha_1^{(k)}$ であり, PH 上で $B = R(\alpha_1)$ である. したがって, α が (C) をみたすことから, $\alpha_1^{(k)}$ の characteristic manifold は α の characteristic manifold で $B = R(\alpha_1)^{(k)}$ で不変である. ゆえに α_1 は $R(\alpha_1)$ で弱稠密であり, これは α が $R(\alpha)$ で弱稠密であることを示している. α は弱閉であつた

から $\alpha = R(\alpha)$. すなわち α は self-adjoint である.

系 3.3 α が弱閉で (c) をみたし, $\mathcal{I}$ が I_n 型 (n は奇数) の部分を含まないならば, α は self-adjoint である.

系 3.4 α が弱閉で (c) をみたし, $\mathcal{I}$ が I_n 型 ($n \geq 2$) であれば, α は self-adjoint である.

文 献

- [1] E A Azoff, Invariant linear manifolds and the self-adjointness of operator algebras, to appear
- [2] C Foias, Invariant para-closed subspaces, Indiana Univ. Math. J., 21(1972) 887-906
- [3] T.B. Hoover, Operator algebras with reducing invariant subspaces, Pacific J. Math., 44(1973) 173-179.
- [4] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Berlin Springer verlag, (1973)
- [5] D. Voiculescu, Sur les sous-espaces parafermes invariants d'une algebre de von Neumann, Bull. Sc. Math., 2^e serie, 96(1972) 161-168