

数理解析レクチャー・ノート 4.

Complete positivity in operator algebras

富 山 淳 著

1978年5月

数理解析レクチャー・ノート刊行会

数理解析レクチャー・ノート 4.

Complete positivity in operator algebras

富山 淳 著

1978年 5月

ま え が き

この稿は1978年3月 教理解析研究所で行った作用素環における *completely positive* の概念についての集中講義をまとめたものである。 *Completely positive* の概念は作用素環論ではじめ *positivity* の議論 (GNS-表現の構成等) のかげにかくれた形に存っていたが、非可換の無限次元の対象としての作用素環の順序構造をとらえる基本的な概念として最近関連する結果が急速に作用素環の構造論の中心的話題にちがってきている。ここでは内容の構成はこつこつでも *semidiscrete von Neumann* 環と *injective* な *von Neumann* 環 (§3) と *nuclear* ($*$ 環の *characterization*) (§4) を中心に関連する *completely positive* についての基本的な結果の証明もすべて省略せずに講義を行ったが、いくつかの話題はゆかたでざるを得なかったもので、あとがきとしてゆかたについて簡単な説明をつけ加えた。

京都大学教理研のみならず、大阪や東京から又遠く沖縄から諸君に参加して下さった方々、又種々お世話になつた教理研の荒木教授、F. Hansen 氏に深く感謝します。

1978年4月

富山 淳

Complete positivity in operator algebras

目 次

まえがき

§1 Operator algebra 同士の completely positive map

§2 Algebra とその dual の同士の completely positive map

§3 Completely positive map による approximation property,
von Neumann 環の場合

§4 Completely positive map による approximation property,
 C^* 環の場合

あとがき

文 南大

§1. Operator algebra 間の completely positive map.

以下 C^* 環を $A, B, \dots$ とかく. C^* 環には常に 1 と呼ぶ元と 0 と呼ぶ元とをもち、 1 は単位元を仮定し、 0 は C^* 環のユニタリな C^* 環と呼ぶ. M_n を $n \times n$ の行列環, 又 A 上の $n \times n$ の行列 C^* 環を $M_n(A)$ とかく. $M_n(A)$ は A と M_n との C^* -テンソル積ともみらる. τ を C^* 環 A から C^* 環 B への線型写像としたとき, τ からつくられた $M_n(A)$ から $M_n(B)$ への写像

$$\tau_n = \tau \otimes 1 : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$$

$$[a_{ij}] \longrightarrow [\tau(a_{ij})]$$

を考える. τ_n が positive map の時, τ を n -positive map といい. 任意の n について n -positive のとき, τ を completely positive map といい. 以下これを略して CP-map と呼ぶことにする. A, B がユニタリ C^* 環で $\tau(1_A) = 1_B$ のとき, τ をユニタリ map といいことにする. CP-map は常に positive map であるから, C^* 環では positive functional が有界になることもとくにすると, 自動的に有界な写像になることがわかる.

CP-map については先ず最初に positive map との関連が問題になるが, 対象の作用素環が非可換に変わったとたんにその複雑さが増える. 即ち positive map で CP-map であり最も簡単な例は次のようである.

$\tau: M_2 \longrightarrow M_2$ を transpose map とする

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

この τ が positive map であることは明かであるが、今 $\{e_{ij}\} \in M_2$ の matrix unit とし $\varepsilon \in M_2(M_2)$ と

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、 ε は positive であるが $\tau_2(\varepsilon)$ は以下の枠内をみればわかるように positive matrix でない。

$$\tau_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次の Lemma は γ の構造の簡単さの割にはこの講義の全てにわたって有用なものである。

Lemma 1.1. $M_n(A)$ の positive 元は

$$[a_i^* a_j] \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \in A)$$

の形の $\sum$ の和である。

証明. $M_n(A)$ の positive 元 $x^* x$ をとり、 $x = [b_{ij}]$ とおくと、

$$x^* x = \left[\sum_k b_{ki}^* b_{kj} \right] = \sum_k [b_{ki}^* b_{kj}]$$

即ち $(b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn})$ による上の形の行列の和に等しい。
 3. 又上の形の行列は

$$[a_i^* a_j] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & & & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ & & & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Lemma 1.2. C^* 環 A 上の positive linear functional φ は CP である。

証明. 先の Lemma から $M_n(A)$ の positive matrix $\Sigma [a_i^* a_j]$ の形と存在する。任意の複素数の n 個の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ について

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \varphi(a_i^* a_j) \lambda_j \bar{\lambda}_i &= \sum_{i,j} \varphi((\lambda_i a_i)^* (\lambda_j a_j)) \\ &= \varphi((\sum \lambda_i a_i)^* (\sum \lambda_i a_i)) \geq 0 \end{aligned}$$

よって $[\varphi(a_i^* a_j)]$ は positive matrix である。

以下 linear functional の値をあらわすのに、かつてが多く用いられていた時や duality が関連する時には $\varphi(a_i^* a_j)$ の形の代りに $\langle a_i^* a_j, \varphi \rangle$ の形の方を用いることにする。

前の CP-map で示した例と上の Lemma を合わせれば次の命題は予想されることである。

Proposition 1.3. $\tau: A \rightarrow B$ positive map

このとき A と B が可換ならば τ は C^* -map である。

証明. A が可換ならば, $A = C_0(X)$ とおく. B はヒルベルト空間 H 上に作用しているものとすると, H のベクトルの組 $\{z_1, \dots, z_n\}$ に対して X 上の regular measure μ がとれて

$$\sum_{i=1}^n (\tau(a) z_i, z_i) = \int_X a(t) d\mu$$

とかけると, 更に Radon-Nikodym の定理から, X 上の積分可能な関数 h_{ij} が各 (i, j) の組に対してとれて

$$(\tau(a) z_j, z_i) = \int_X a(t) h_{ij}(t) d\mu$$

とかけると, 任意の複素数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_X a(t) \sum_{i,j} h_{ij}(t) \lambda_j \overline{\lambda_i} d\mu &= \sum_{i,j} (\tau(a) \lambda_j z_j, \lambda_i z_i) \\ &= (\tau(a) (\sum_i \lambda_i z_i), (\sum_i \lambda_i z_i)) \end{aligned}$$

とちから, $a \geq 0$ の時上式は non-negative である. よって関数 $\sum_{i,j} h_{ij} \lambda_j \overline{\lambda_i}$ は a.e. で non-negative. この時の除外 null set は $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に関係するから, 通常の議論でやめとめけると結局 a.e. の X の点 t に対して,

$$\sum_{i,j} h_{ij}(t) \lambda_j \overline{\lambda_i} \geq 0$$

が任意の複素数組 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して言えることに注意.

従って行列 $[h_{ij}(t)]$ は a.e. で正値行列となる. ここで

$[a_{ij}] \in M_n(A)$ を正値行列とすると, Lemma 1.2 から

$$[a_{ij}(t)] \geq 0 \quad \forall t \in X$$

$$\therefore \sum_{i,j} a_{ij}(t) h_{ij}(t) \geq 0 \quad \text{a.e.}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (\tau(a_{ij}) \zeta_j, \zeta_i) &= \sum_{i,j} \int_X a_{ij}(t) h_{ij}(t) d\mu \\ &= \int_X \sum_{i,j} a_{ij}(t) h_{ij}(t) d\mu \geq 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

B が可換のとき, $B = C_0(X)$

$M_n(A)$ の positive matrix $[a_{ij}]$ をとると, Lemma 1.2 から

よ

$$[\tau(a_{ij})(t)] \geq 0 \quad \forall t \in X$$

そこで $M_n(B) = C_0(X, M_n)$ の元の positivity は M_n -valued 関数の positivity と同じなから (例えば [51] 参照), 上から

$[\tau(a_{ij})]$ は positive である. 即ち τ は CP-map.

CP-map の形は後の Stinespring の定理で完全に決定されるが, この系に重要な CP-map の一つとして次のことがある.

Proposition 1.4. $B \in C^*$ -環 A の C^* 部分環 とする.

$\varepsilon: A \rightarrow B$ norm 1 の projection

ε は CP -map である.

(証明) 以下の証明では [4] の結果である. ε が positive map といふことと, module property $\varepsilon(a \times b) = a \varepsilon(x) b$ ($a, b \in B$) を用いるが [4] の討論は A, B が unital であり, $\varepsilon(1_A) = 1_B$ となっていることが本質的であった. ここで ε に係数をしにこの状況がみちびけることを示しておく. これは竹崎氏の注意による. ε の second transpose $\tilde{\varepsilon}$ は A の enveloping von Neumann 環 $\tilde{A}$ から B の von Neumann 部分環としての B の enveloping von Neumann 環 $\tilde{B}$ への norm 1 の projection である. よって $\tilde{\varepsilon}(1_{\tilde{A}}) = 1_{\tilde{B}}$ が成り立つことを示せば, $\tilde{\varepsilon}$ は positive module property をもつことを示し, ε にまつ必要充足値が得られる. 従って A, B が $1 = \lambda e + (1-e)$ のとき $\varepsilon(1_A) = 1_B$ が成り立つことを示せばよい. $1_A = 1, 1_B = e$ とおく.

$\varepsilon(1-e) = a + ib$, β ; a の spectrum; として実数 λ をとる

$$\begin{aligned} \|\lambda e + \varepsilon(1-e)\| &= \|\varepsilon(\lambda e + (1-e))\| \\ &\leq \|\lambda e + (1-e)\| = \max\{1, |\lambda|\} \end{aligned}$$

一方上式は

$$\|\lambda e + a + ib\| \geq \|\lambda e + a\| \geq |\lambda + \beta|$$

今 $\beta \neq 0$ とし $\lambda \in \beta$ と同符号で $|\lambda| > 1$ ととる. 上式から

$$|\lambda| \geq |\lambda + \beta| = |\lambda| + |\beta| \quad \text{矛盾}$$

よって $\beta = 0$ i.e. $a = 0$. 次に λe の代りに $i\lambda e$ を使えば同様に $b = 0$ がでてくる. 従って $\varepsilon(1) = e$.

命題の証明にゆき着く. $\varepsilon_n: M_n(A) \rightarrow M_n(B)$

を考へると ε の性質から ε_n は $*$ -preserve で $M_n(B)$ について module property をもつ. $x \in M_n(A)$ の positive 奇元とすると,

$\forall a \in M_n(B), \forall B$ の state φ, M_n の state ψ

について

$$\begin{aligned} \langle a^* \varepsilon_n(x) a, \varphi \otimes \psi \rangle &= \langle \varepsilon_n(a^* x a), \varphi \otimes \psi \rangle \\ &= \langle a^* x a, \varphi \circ \varepsilon \otimes \psi \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

よって positive linear functional $a \varphi \otimes \psi a^*$ 上

$$\langle x, a \varphi \otimes \psi a^* \rangle = \langle a^* x a, \varphi \otimes \psi \rangle$$

で定義したとき, その族

$$\{a \varphi \otimes \psi a^* \mid \forall a \in M_n(B), \forall \varphi, \psi\}$$

は $M_n(B)$ の order を与えるから, $\varepsilon_n(x) \geq 0$.

即ち ε は cp-map である.

ヒルベルト空間 H 上の有界な線型作用素全体の環 $\mathcal{L}(H)$ とかく. 次の Stinespring の定理は, cp-map を非可換の order に關する vector valued state と同じに理解すれば, state の

GNS-表現の構成に於けるものである。そして証明もこの観点から看之れば非常に自然なものである。

定理 1.5. τ を C^* 環 A から $L(H)$ への CP -map とする。このときヒルベルト空間 K と A から K 上への表現 π 及び H から K への有界な linear operator v があって

$$\tau(x) = v^* \pi(x) v$$

とかける。特に A が von Neumann 環で τ が normal な時は表現 π を normal な表現にとれる。

(証明) 先ず A がユニタリなときを考える。 A と H の代数的テンソル積 $A \otimes H$ において、 $\alpha = \sum_i a_i \otimes \xi_i$, $\beta = \sum_i b_i \otimes \eta_i$ の内積を

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} (\tau(b_i^* a_j) \xi_j, \eta_i)$$

と定義すると、 τ が CP -map であることからこれは positive semi-definite.

$$\mathcal{N} = \{ \alpha \in A \otimes H \mid (\alpha, \alpha) = 0 \}$$

とすると上の積は $A \otimes H / \mathcal{N}$ の内積を定義する。そこで A のこの空間上への表現を

$$\pi(x)[\alpha] = [x a_1 \otimes \xi_1 + \dots + x a_n \otimes \xi_n]$$

と定義する。 $(\pi(x)\alpha, \alpha)$ は A 上の positive linear functional であるから

$$\begin{aligned}
 (\pi(x)\alpha, \pi(x)\alpha) &= (\pi(x^*x)\alpha, \alpha) \leq \|x^*x\| (\pi(1)\alpha, \alpha) \\
 &= \|x\|^2 (\alpha, \alpha).
 \end{aligned}$$

よつて上の π の定義は well-defined で且つ $\pi(x)$ は $A^{\otimes H}/\mathcal{N}$ 上の有界な作用素となる。 K を $A^{\otimes H}/\mathcal{N}$ の完備化とし $\pi(x)$ を K で拡大したものと又 $\pi(x)$ とかく。 さて v を

$$v: \xi \in H \longrightarrow [1 \otimes \xi] \in K$$

と定める。

$$\|v\xi\|^2 = (\tau(1)\xi, \xi) \leq \|\tau(1)\| \|\xi\|^2$$

かう v は有界, 又つくり方かう。

$$\tau(x) = v^* \pi(x) v \quad \forall x \in A$$

こゝで π をつくり方かう, τ が normal なのは π も又 von Neumann 環 A の normal を表現になる。

A が nonunital の時に τ の second transpose $\tilde{\tau}$ は

$$\tilde{\tau} = {}^{\tau}\tau: \hat{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}(H)} \quad (\sim \text{は enveloping von Neumann 環})$$

$\mathcal{L}(H)$ は von Neumann 環だから, $\widehat{\mathcal{L}(H)}$ かう $\mathcal{L}(H) \hookrightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow 1$ の projection ε が存在する。 $\varepsilon \circ \tilde{\tau}$ は $\hat{A}$ かう $\mathcal{L}(H)$ への CP-map であり $\hat{A}$ はユニタルであるかう 前の場合とあてはめ結果を A に制限すれば $\varepsilon \circ \tilde{\tau}|_A = \tau$ であるかう 求める形が得られる。

<注 I'> $K_0 = [\pi(A)vH]$ とし $\pi(x)|_{K_0} = \pi_0(x)$ とおくと, π_0 はやはり A の表現で且つ

$$\tau(x) = v^* \pi_0(x) v$$

よって一般に $K = K_0$ と考えてもよい. この意味で K は minimal であると考えられる. minimal な K は上の表現 π で $\pi = \pi_0$ の同値をとって一意である.

(注 2) π が π_0 と等しいときは $\pi(1) = 1$ であるから $v^*v = 1$, ゆえに v は isometric map である. 従って H と vH と同一視すれば, $H \subset K$ と考えてよく, $p \in H$ への projection とすると

$$\tau(x) = p\pi(x)|_H$$

とかくことが出来る. この時上の形からわかるように τ は τ として Schwarz の不等式

$$\tau(x)^*\tau(x) \leq \tau(x^*x)$$

が成り立つ.

次の Arveson の定理 [2] は positive functional の拡大定理に対応するものである. 非可換な場合には, それは positive な operator valued state (map) の拡大定理にはちうち τ と注目を要する.

定理 1.6. A を C^* 環, B を C^* 部分環とし, $\tau \in B$ より $\mathcal{L}(H)$ への CP -map とする. このとき A より $\mathcal{L}(H)$ への CP -map π で τ の拡大になるものが存在する.

(証明) 前定理から A の表現 π on K_0 と $v: H \rightarrow K_0$ が存

在して $\tau(x) = v^* \pi(x) v$

又 π に対して表現空間 $K \supset K_0$ と K 上への A の表現 $\hat{\pi}$ が存在して $\hat{\pi}(x)|_{K_0} = \pi(x)$ ($x \in B$)

よつて $v \in H$ から K への写像と看做

$$\hat{\tau}(x) = v^* \hat{\pi}(x) v \quad (x \in A)$$

とみれば、 $\hat{\tau}$ は τ の CP -map として拡大である。

注. Arveson [2] の元の形の結果は B が A の self-adjoint な部分空間の場合なので定理 1.5 が使えず非常に長い証明になっている。

Proposition 1.7. $\tau: A \rightarrow B$ CP -map

A がユニタリかつ $\|\tau\| = \|\tau(1)\|$

証明. $\tau(x) = v^* \pi(x) v$ とすると

$$\begin{aligned} \|\tau(x)\| &\leq \|v^*\| \|\pi(x)\| \|v\| \leq \|x\| \|v^*\| \|v\| \\ &= \|x\| \|v^* v\| = \|x\| \|\tau(1)\| \end{aligned}$$

より $\|\tau\| \leq \|\tau(1)\|$. 逆の不等式は明らか。

C^* 環 A_1, A_2 について、よかつ minimal な C^* -ノルム $\|\cdot\|_1$ について C^* テンソル積 (spacial な C^* テンソル積) $\in A_1 \otimes A_2$ とかくことにする. A_i が von Neumann 環の時, von Neumann 環として C^* テンソル積 $\in A_1 \bar{\otimes} A_2$ とかく。

Proposition 1.8 $T_i : A_i \longrightarrow B_i$ ($i=1, 2$) CP-map.

このとき CP-map $T_1 \otimes T_2 : A_1 \otimes A_2 \longrightarrow B_1 \otimes B_2$

が一意的に存在して、 $T_1 \otimes T_2(a \otimes b) = T_1(a) \otimes T_2(b)$

又 A_i, B_i が von Neumann 環で T_i が normal CP-map の時は $T_1 \otimes T_2$ は $A_1 \otimes A_2$ より $B_1 \otimes B_2$ への normal CP-map に一意に拡大出来る。

(証明) B_i を H_i ヘルベルト空間 H_i 上に作用しているとする。定理 1.5 から各 T_i を表現する組 (K_i, π_i, ψ_i) が与えられる。 π_i は $\mathcal{K}(H_i)$ の $*$ -homomorphism であるから

$$\exists \pi_1 \otimes \pi_2 : A_1 \otimes A_2 \longrightarrow \mathcal{L}(K_1) \otimes \mathcal{L}(K_2) \quad * \text{-homomorphism}$$

$$\text{又} \quad \psi_1 \otimes \psi_2 : H_1 \otimes H_2 \longrightarrow K_1 \otimes K_2 \quad \text{bounded linear map.}$$

そこで $\forall x \in A_1 \otimes A_2$ について

$$T_1 \otimes T_2(x) = (\psi_1 \otimes \psi_2)^* \pi_1 \otimes \pi_2(x) \psi_1 \otimes \psi_2$$

と表せば形から $T_1 \otimes T_2$ は CP-map で更に条件をみたしている。

又 T_i が normal の時は定理 1.5 より π_i が normal を表現に与えるから $\pi_1 \otimes \pi_2$ は $A_1 \otimes A_2$ より拡大出来る。求める CP-map が上と同様に定義出来る。

注. A_i が von Neumann 環のとき、 $\mathcal{K}(H_i)$ の $*$ -homomorphism による結果は更に一般化出来る。そこで minimal な C^* -クロスノルム $\|\cdot\|_*$ の α -ノルムは uniform norm で与えられるので ([37]) 上のよき結果を得る。

果て一般の有界正規型写像に期待するわけにはいかない。上の
のような写像を *product map* と呼ぶことにする。

A, B をユニタリな C^* 環, $\tau: A \rightarrow B$ をユニタリ写像とす
る。

$$A_{\tau}^{\ell} = \{ a \in A \mid \tau(a^*a) = \tau(a)^* \tau(a) \}$$

$$A_{\tau}^r = \{ a \in A \mid \tau(aa^*) = \tau(a) \tau(a)^* \}$$

とすると

定理 1.9 ユニタリな C^* -map $\tau: A \rightarrow B$ に対しては次
のことが成り立つ

$$A_{\tau}^{\ell} = \{ a \in A \mid \tau(xa) = \tau(x) \tau(a) \quad \forall x \in A \}$$

$$A_{\tau}^r = \{ a \in A \mid \tau(ax) = \tau(a) \tau(x) \quad \forall x \in A \}$$

よって $A_{\tau}^{\ell}, A_{\tau}^r$ は又 A の closed な部分環になる。

これを τ の *multiplicative domain* と呼ぶ。

(証明) 定理 1.5 の注 2' の表現を用い

$$\tau(x) = p \pi(x) | H \quad (H \subset K) \quad \text{と考える。}$$

$$\forall a \in A_{\tau}^{\ell} \quad \text{に} \quad \tau$$

$$p \pi(a^*a) | H = p \pi(a)^* p \pi(a) | H \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} p \pi(a)^* (1-p) \pi(a) | H &= [(1-p) \pi(a) p]^* [(1-p) \pi(a) p] | H \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{従って} \quad (1-p) \pi(a) | H = 0, \quad \text{i.e.} \quad p \pi(a) | H = \pi(a) | H$$

よって $\forall x \in A$ について

$$\begin{aligned}\tau(xa) &= p \pi(xa) | H = p \pi(x) \pi(a) | H = p \pi(x) p \pi(a) | H \\ &= \tau(x) \tau(a)\end{aligned}$$

A_τ^r の元についても同様である。

系 1.9. γ = ユニタリ CP-map が C^* -homomorphism (自己共役元について $\tau(a^2) = \tau(a)^2$) ならば、 τ は $*$ -homomorphism である。

このとき A_τ^l, A_τ^r がすべて A の自己共役元を含むから、 A 全体になり、従って τ は $*$ -homomorphism になる。

定理 1.9 は実は 2-positive な map について成り立つ (Choi [10]) が、ここでは CP-map として定理 1.5 を用いた。この結果は lifting の問題等によく用いられる (例えば [1])。

ユニタリ作用素環の間の CP-map については、ユニタリ map とすることで τ の map の間の関係が重要な問題になるが、値域が von Neumann 環の時には次のような形で与えられる。

Proposition 1.10 A をユニタリ C^* 環, R を H 上の von Neumann 環とする。 $\tau: A \rightarrow R$ CP-map.

このとき、 $\tau(1) = b$ とおくと、 A から R へのユニタリ CP-map

σ が存在して

$$\tau(x) = b^{\frac{1}{2}} \sigma(x) b^{\frac{1}{2}}$$

《証明》 b が invertible かつ $\sigma(x) = b^{-\frac{1}{2}} \tau(x) b^{-\frac{1}{2}}$ とおけばよい。

と 13 が証明の要である。

A を K 上に作用してゐるとし、 K の単位ベクトル e とする。

e は b の support projection とし、整数 $n > 0$ にとり

$$\sigma^n(x) = (b + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \tau(x) (b + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} + (x, 3, 3)(1-e)$$

とおく。 σ^n は定義から CP-map であるが、 e が各 x にとりて強収束する e と $e, 1, 1$ 。先ず

$$b(b + \frac{1}{n})^{-1} \longrightarrow e(s)$$

$$\text{又 } a_n = e - b(b + \frac{1}{n})^{-1} \geq 0 \quad \text{より} \quad a_n^{1/2} \longrightarrow 0(s)$$

22で

$$a_n^{1/2} \geq e - b^{\frac{1}{2}}(b + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\text{から} \quad b^{\frac{1}{2}}(b + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow e(s)$$

12で A の $\bar{e}$ $a \in 0 \leq a \leq 1$ とする。 $0 \leq \tau(a) \leq b$ より

$$\tau(a)^{1/2} \leq b^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \exists s \in \mathcal{L}(H); \quad \tau(a)^{1/2} = s b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} s^*$$

このから $\{\tau(a)^{1/2}(b + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\}, \{(b + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\tau(a)^{1/2}\}$ は共に有界で強収束列である。従つて $\{\sigma^n(x)\}$ は又強収束列である。

$$\sigma(x) = \lim_n \sigma^n(x)$$

とおけばこのから σ は K 上の CP-map である。

主 要 文 献

[2], [10], [14], [42], [43], [44]

§2 Algebra と dual の間の completely positive map

CP-map はあくは algebra 間をけつものとして考えられていたが, Lance [35] に始まる作用素環の dual (又はその subspace) と algebra 間の CP-map の考え方は作用素環 (及びその dual) の order を理解する別な局面を用いたものとして, 最近の nuclear 性, semidiscrete 性をめぐる議論の中で基本的な役割を果たしている. ここで以上 §3 への議論への準備も含めて結果をのべる. 矢張り準備として C^* -ラニソル性についての説明を少し用意しておく (詳細は Effros-Lance [24] を参照)

A, B を C^* 環, $A \otimes B$ をそのような代数的なラニソル性とする. $A \otimes B$ 上のノルム $\|x\|_\rho$ で,

$$\|xy\|_\rho \leq \|x\|_\rho \|y\|_\rho, \quad \|x^*x\|_\rho = \|x\|_\rho^2$$

と定むものを C^* -ノルムとす. $A \otimes B$ 上の任意の C^* -ノルムは単位元を付加した C^* 環のラニソル性 $A_1 \otimes B_1$ により拡大出来, その結果として再び C^* -ノルムになることが知られている.

$A \otimes B$ の β -ノルムによる完備化した C^* 環を $A \otimes_\beta B$ とかく.

$A \otimes B$ 上の C^* -ノルムには最大の C^* -ノルム (ν -ノルム, $A \otimes_\nu B$) と最小の C^* -ノルム (α -ノルム又は spatial C^* -ノルム, $A \otimes_\alpha B$) がある. $f \in A \otimes B$ 上の positive linear functional ($f(x^*x) \geq 0$) とする.

$$\|f\|_\Lambda = \sup_{\substack{\|a\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} |f(a \otimes b)| \quad (< \infty \text{ である})$$

と置く.

$$S(A \otimes B) \equiv \{f : \text{positive functional, } \|f\|_\Lambda = 1\}$$

$A \otimes B$ の state space.

$$S^\circ(A \otimes B) \equiv \{f : \text{ " }, \|f\|_\Lambda \leq 1\}$$

ここで A, B がユニタリな時は

$$S(A \otimes B) = \{f : \text{positive, } f(1 \otimes 1) = 1\}$$

である. f による $A \otimes B$ の GNS-表現を π_f とする. 2つと
き最大の C^* -ノルム α は次のように与えられる

$$\begin{aligned} \|x\|_\alpha &= \sup \{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in S(A \otimes B) \} \\ &= \sup \{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in S^\circ(A \otimes B) \} \end{aligned}$$

これに対して最小の C^* -ノルム α は次のように state の
集合で与えられる

$$\|x\|_\alpha = \sup \{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in S(A \otimes B) \cap A^* \otimes B^* \}$$

一般に V -ノルム α は α -ノルムよりも大きく、 $A \otimes B$ にはその向
いかつもの C^* -ノルム β が定義出来る. state の集合 $P \subset S(A \otimes B)$
により $\|x\|_P = \sup \{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in P \}$ が $A \otimes B$ の
ノルムを定義すると、 P を separating family と呼びとすると、
 $A \otimes B$ 上の state の separating family P は C^* -ノルム β を定め、
逆に $A \otimes B$ の C^* -ノルム β は、 $P_\beta = S(A \otimes B) \cap (C^* \otimes C^*)$ の
state space $S(A \otimes B)$ の subfamily と見とる) という

separating family を定める. Γ と Γ の関係は例として Γ が convex で次の条件をみたすときには Γ は Γ の弱*-closure に含まれる.

$$\forall f \in \Gamma \quad \forall y \in A \otimes B \quad \exists g \in \Gamma : f(y^*xy) = f(y^*y)g(x).$$

たとえば前に述べた $S(A \otimes B) \cap A^* \otimes B^*$ はこれをみたすから, $S(A \otimes B)$ は上の集合の弱*-closure に含まれる. この議論は $S(A \otimes B)$ の代りに $S^\circ(A \otimes B)$ (弱*-コンパクト集合)をとっても同じことが言える.

C^* 環 A が任意の C^* 環 B について $A \otimes B$ の C^* -ノルムを一意に定めるとき, A を nuclear C^* 環といる. 前述の C^* -ノルムのまう方が容易にわかるように, A が nuclear であるためには任意の C^* 環 B について $S(A \otimes B)$ (又は $S^\circ(A \otimes B)$) が $S(A \otimes B) \cap A^* \otimes B^*$ (又は $S^\circ(A \otimes B) \cap A^* \otimes B^*$) の弱*-closure に含まれることが必要十分である. 又 $A \otimes B$ から $A \otimes B$ への canonical な $*$ -homomorphism は常に onto になるから, α -ノルム $= \nu$ -ノルムといることと, $A \otimes B \rightarrow A \otimes B$ という写像が 1対1という事とは同値である.

A を C^* 環とする. このとき $M_n(A^*)$ は自然な形で $M_n(A)^*$ と同一視出来るから, dual としての order をこの中に与えることが出来る. E, F を C^* 環, 又はその dual が dual の closed subspace (例として von Neumann 環の predual など) とする. このとき線型写像 $T: E \rightarrow F$

が completely positive とし、 τ と τ^* の order を τ とに定義する。§1 のときと違って今度は CP-map が有界であるとは限らな。しかし τ が有界であれば τ^* の transpose map $\tau^*: F^* \rightarrow E^*$ は τ が CP のとき CP-map になる。

C^* 環 A, B の spatial テンソル積 $A \otimes B$ において、各 $\varphi \in A^*$ に対して $R_\varphi(a \otimes b) = \varphi(a)b$ とおくと、 R_φ は $A \otimes B$ より B への連続写像を定義する。これを右 slice map と呼ぶ。

同様に $\psi \in B^*$ に対しては左 slice map $L_\psi: A \otimes B \rightarrow A$ が定義出来る。両者の間には

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle = \langle x, \varphi \otimes \psi \rangle$$

という関係がある。

A, B が von Neumann 環のときは、 $\varphi \in A_*$ (predual) に対して slice map R_φ は σ -weakly continuous であり、更に $A \otimes B$ より B への map に拡大出来る。これを又 R_φ とおき σ -weakly continuous な slice map と呼ぶ。このときは更に一般の $\varphi \in A^*$ に対して $R_\varphi: A \otimes B \rightarrow B$ が次のように定義出来る。

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle \quad (\forall \psi \in B_*)$$

この map を generalized right slice map と呼ぶことにする。

次に $\forall a \in A$ に対して right dual slice map

$$\gamma_a: (A \otimes B)^* \rightarrow B^*$$

$$\text{を } \langle b, \gamma_a(f) \rangle = \langle a \otimes b, f \rangle \quad (b \in B)$$

で定義する. γ_a は有界写像である.

Proposition 2.1 すべての slice map γ_a と dual slice map γ_a^* は φ_a が positive のとき CP -map である. この逆も成り立つ

(証明) γ_a は slice map R_φ は

$$A \otimes B \xrightarrow{\varphi \otimes 1} I \otimes B \longrightarrow B$$

という写像の組合せであるから, Lemma 1.2 と Proposition 1.8 より CP -map である. A, B が von Neumann 環 のときは σ -weakly continuous な slice map について, Proposition 1.8 の後半から同様の結論が出る. 又 generalized slice map については, 定義から $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$ weak* in A^* のとき R_{φ_α} は R_φ に point- σ -weak 位相で収束するから, $\varphi \geq 0$ $\in$ normal functional φ_α で weak* 近似できるから, R_{φ_α} が CP -map であることから R_φ が CP -map であることが言える.

最後に dual slice map については, $[f_{ij}] \in M_n((A \otimes B)^*)^+$ とすると, $\forall b_1, \dots, b_n \in B$ について

$$\sum_{i,j} \langle b_i^* b_j, \gamma_a(f_{ij}) \rangle = \sum_{i,j} \langle a \otimes b_i^* b_j, f_{ij} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle (a^* \otimes b_i)^* (a \otimes b_j), f_{ij} \rangle \geq 0$$

$$\text{即ち} \quad [r_a(f_{ij})] \in M_n(B^*)^+$$

逐は明らかである。

さて slice map は $A \otimes B$ (又は A, B が von Neumann 環のときは $A \overline{\otimes} B$) の元を写す。

$$r(x) : \varphi \in A^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in B$$

という写像をひきおこし, dual slice map は各 $f \in (A \otimes B)^*$ について

$$R(f) : a \in A \longrightarrow r_a(f) \in B^*$$

という写像をひきおこす。これらについての議論が Effros [21], Lance [35] における結果である。矢張り $R(f)$ については

$$\text{定理 2.2} \quad f \in (A \otimes B)^* \longleftrightarrow R(f) \quad \text{という対応により}$$

$S^0(A \otimes B)$ は A より B^* への contractive な cp-map の集合へ 1 対 1, isometric, onto に写される。この対応は更に $S^0(A \otimes B)$ に弱*位相, 後者の集合に point-弱*収束位相をとると homeomorphism である。

A, B が γ -ノルム γ のときは, $f \in S(A \otimes B)$ について $R(f)(1)$ は B の state になる (cp-state map ということがある)。

(証明) A, B の最大 γ -ノルム γ (ノルム γ) による積 $A \otimes_\gamma B$ (Banach $*$ -algebra) を考えると, $A \otimes_\gamma B$ は $A \otimes_\gamma B$ の C^* -enve-

loper 環である ([39]). よってノルムを含めて次の同一視ができる.

$$S^0(A \otimes B) = S^0(A \otimes B)$$

一方 [28] の結果から $(A \otimes B)^*$ は次と同一視出来る

$$(A \otimes B)^* = \mathcal{L}(A, B^*) = B^*l(A, B) \text{ (有界な bilinear form)}$$

よって $S^0(A \otimes B)$ の元に対応するノルム $\|f\|_\Lambda$ を考えるとき $f \in S^0(A \otimes B)$ と $R(f) \in \mathcal{L}(A, B^*)$ のノルムは同じである. 次に

$$f \geq 0 \iff f\left(\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)^* \left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right) \geq 0$$

$$(a_1, \dots, a_n \in A, \quad b_1, \dots, b_n \in B)$$

このとき上の f の値は

$$= \sum_{i,j} f(a_i^* a_j \otimes b_i^* b_j) = \sum_{i,j} R(f)(a_i^* a_j)(b_i^* b_j)$$

$$= \langle [b_i^* b_j], [R(f)(a_i^* a_j)] \rangle$$

従って $f \geq 0$ と $R(f)$ が CP -map であることは同値である. 最後に $\tau: A \rightarrow B^*$ を CP -contraction とすると

$$\langle \sum_i a_i \otimes b_i, f \rangle = \sum_i \langle b_i, \tau(a_i) \rangle$$

により τ は $A \otimes B$ 上の positive linear functional ^(f) と定義される. したがって対応する τ とから

$$\|f\|_\Lambda = \|\tau\| \leq 1 \quad \text{i.e. } f \in S^0(A \otimes B)$$

対応する双連続性は定義から明らかである.

C^* 環上の有界な linear functional は positive linear functional の linear combination でかけるから上の定理は $(A \otimes B)^*$ の $\mathcal{L}(A, B^*)$ (又は $\mathcal{L}(B, A^*)$) の中への表現定理を系していることになる。ここで注目するところは $(A \otimes B)^*$ の order が $\mathcal{L}(A, B^*)$ では positive map の order ではなく completely positive map の order ($\tau \geq \sigma \iff \tau - \sigma$ が CP-map) に写されることである。写像向きのこの order を CP-order ということになる。

上と双対の結果になる algebra の表現定理を von Neumann ランダム種の場合に求めてみる。 R, S をそれぞれ H および K 上の von Neumann 環とする。 $x \in R \bar{\otimes} S$ に対して写像

$$\gamma(x): \varphi \in R_* \longrightarrow R_\varphi(x) \in S$$

を考えると

定理 2.3 $x \geq 0 \iff \gamma(x)$ が CP-map

又上の対応で

$$(R \bar{\otimes} S)_+^+ = \{x \in R \bar{\otimes} S \mid 0 \leq x \leq |x|\}$$

と R_* より S への CP-map の集合

$$\{\tau: R_* \longrightarrow S \mid \text{CP-order で } 0 \leq \tau \leq \gamma(|x|)\}$$

とは order isomorphic である。

これから $R \bar{\otimes} S$ は上のよき CP-map で span された写像の空間として表現されることになる。

(証明) $R, S \in H, K$ 上は standard に表現されてゐるものとす
る ([30] 参照, 又 [20; Chap III, §1 定理 4]) と $M_n(K), M_n(S)$
は又 H^n, S^n 上で standard に与るから

$$\forall \varphi \in M_n(R_*)^+ = M_n(R)_*^+, \quad \forall \psi \in M_n(S_*)^+ = M_n(S)_*^+$$

はつて

$$\exists \xi = (\xi_i) \in H^n, \quad \eta = (\eta_i) \in K^n; \quad \varphi = \omega_\xi, \quad \psi = \omega_\eta$$

とかける (ω_ξ は $\mathcal{L}(H)$ 上の normal な vector state であるから正
確には $\varphi = \omega_\xi|_R$ とかくべきであるが特に遠いところを必要と
する時をこゝで上の方法をとりこにする。Slice map
によつても同様で R_{ω_ξ} は正確には $\mathcal{L}(H) \otimes \mathcal{L}(K) = \mathcal{L}(H \otimes K)$ に
作用してふたりの R への制限が $R_{\omega_\xi}|_R = R_\varphi$ である)

$$\varphi = [\varphi_{ij}] \quad \text{とかくと} \quad \varphi_{ij}(a) = (a\xi_j, \xi_i) = \omega_{\xi_j, \xi_i}(a)$$

$$\psi = [\psi_{ij}] \quad \text{"} \quad \psi_{ij}(b) = (b\eta_j, \eta_i) = \omega_{\eta_j, \eta_i}(b)$$

こつとす

$$\langle r(x)_n(\varphi), \psi \rangle = \langle [r(x)(\varphi_{ij})], \psi_{ij} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle R_{\varphi_{ij}}(x), \psi_{ij} \rangle = \sum_{i,j} \langle x, \varphi_{ij} \otimes \psi_{ij} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} (x\xi_j \otimes \eta_j, \xi_i \otimes \eta_i) = (x(\sum_i \xi_i \otimes \eta_i), (\sum_i \xi_i \otimes \eta_i))$$

よつて

$$x \geq 0 \iff r(x) \text{ が cp-map}$$

$$\text{又} \quad r(1 \otimes 1 - x) = r(1 \otimes 1) - r(x) \quad \text{から}$$

$$0 \leq x \leq 1 \otimes 1 \iff 0 \leq r(x) \leq r(1 \otimes 1) \quad (\text{cp-order})$$

次に $\tau: R_* \longrightarrow S$ 上 $0 \leq \tau \leq r(1 \otimes 1)$ とする.

$H \otimes K$ 上 product form 上

$$[\sum \xi_i \otimes \eta_i, \sum \xi'_i \otimes \eta'_i] = \sum_{i,j} \langle \tau(\omega_{\xi_i, \xi'_j}), \omega_{\eta_i, \eta'_j} \rangle$$

と定めたとき、これは well-defined であることが示される。

$$0 \leq \langle [\tau(\omega_{\xi_i, \xi_j})], [\omega_{\eta_i, \eta_j}] \rangle = \sum_{i,j} \langle \tau(\omega_{\xi_i, \xi_j}), \omega_{\eta_i, \eta_j} \rangle$$

$$\leq \sum_{i,j} \langle r(1 \otimes 1)(\omega_{\xi_i, \xi_j}), \omega_{\eta_i, \eta_j} \rangle = \sum_{i,j} (\xi_i, \xi_j)(\eta_i, \eta_j)$$

$$= \|\sum_i \xi_i \otimes \eta_i\|^2$$

よって上の semi-inner product は元の内積 (1.4) に一致して連続である。これを $H \otimes K$ 上に拡大すると

$$\exists x_\tau \in \mathcal{L}(H \otimes K); \quad 0 \leq x_\tau \leq 1, \quad [\xi, \eta]_\tau = (x_\tau \xi, \eta) \\ \forall \xi, \eta \in H \otimes K.$$

これから $\forall \xi \in H, \eta \in K$ に対して

$$[\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta]_\tau = \langle \tau(\omega_\xi), \omega_\eta \rangle = (\tau(\omega_\xi)\eta, \eta) \\ = (x_\tau(\xi \otimes \eta), (\xi \otimes \eta)) = (R_{\omega_\xi}(x_\tau)\eta, \eta)$$

従って $\tau(\omega_\xi) \in \mathcal{L}(H)_*$ として $R_{\omega_\xi}(x_\tau) = \tau(\omega_\xi|R) \in S$ とする。これから

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(H)_* \quad \tau \text{ に対して } R_\varphi(x_\tau) \in S.$$

$$\text{次に } \forall \varphi \in \mathcal{L}(K)_* \quad \tau \text{ に対して } L_\varphi(x_\tau) \in R$$

を示すために上の τ が有界であることを示そう。 $\varphi \in R_*$ に対して

$\varphi = |\varphi|v$ は φ の polar decomposition とし $|\varphi| = \omega_{\tilde{z}}|R$ とかくと $\varphi = \omega_{\tilde{z}} v^* \tilde{z} |R$ かつ $\|\varphi\| = \|\varphi\| = \|\tilde{z}\|^2 = \|\tilde{z}\| \|v^* \tilde{z}\|$ である.

$$\begin{aligned} \therefore \|\tau(\varphi)\| &= \|\tau(\omega_{\tilde{z}} v^* \tilde{z} |R)\| = \|R_{\omega_{\tilde{z}} v^* \tilde{z}}(x_\tau)\| \\ &\leq \|\tilde{z}\| \|v^* \tilde{z}\| = \|\varphi\| \quad \text{i.e. } \|\tau\| \leq 1 \end{aligned}$$

これから $(R_*)^* = R$ を使って

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in S_* \quad \exists \tau'(\varphi) \in R; \quad \langle \tau'(\varphi), \varphi \rangle &= \langle \tau(\varphi), \varphi \rangle \\ \forall \varphi \in R_* \end{aligned}$$

よって vector state $\omega_\eta \in \mathcal{L}(K)_*$ に対して

$$\begin{aligned} (L_{\omega_\eta}(x_\tau) \tilde{z}, \tilde{z}) &= (x_\tau(\tilde{z} \otimes \eta), \tilde{z} \otimes \eta) \\ &= \langle \tau(\omega_{\tilde{z}}|R), \omega_\eta|S \rangle = \langle \tau'(\omega_\eta|S), \omega_{\tilde{z}}|R \rangle \\ &= (\tau'(\omega_\eta|S) \tilde{z}, \tilde{z}) \end{aligned}$$

従って

$$L_{\omega_\eta}(x_\tau) = \tau'(\omega_\eta|S) \in R \quad \forall \eta \in K.$$

$$\therefore \forall \varphi \in \mathcal{L}(K)_* \quad \text{に対して} \quad L_\varphi(x_\tau) \in R.$$

従って [46; 定理 2.1] から $x_\tau \in R \overline{\otimes} S$.

この x_τ に対して $\gamma(x_\tau) = \tau$ となることをつくり方より明らかである。

定理 2.2, 2.3 における τ は共に左 slice map に対する表現定理もあることが論である。ここで上の定理の $\delta(x)$ は

generalized nice map による K^* から S への写像に拡大出来るが、定義から $\varphi \in K^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in S$ といふのは Proposition

2.1 で述べた δ を連続性をもつ $M_n(K)_*$ は $M_n(K)^*$ の τ で弱* 稠密であるから、上の拡大も $x \geq 0$ のとき CP -map になる。

Enveloping von Neumann 環を考えると、定理から直ちに次が成り立つ。

系 2.3. spatial C^* -フルネル $A \otimes B$ の元 x について、対応
$$Y(x): \varphi \in A^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in B \quad (x \text{ は } \ell(x): \psi \in B^* \longrightarrow L_\psi(x) \in A)$$
 は $x \geq 0$ のとき CP -map である。逆も成り立つ。

上の対応は A^* の単位球上では弱*-フルネル連続な写像になる。しかし δ を連続性をもつ CP -map ではないとしても

$\tau = Y(x) \quad (x \in A \otimes B)$ とはかけないことも知られている ([54], [56])。 C^* -フルネルについて CP -map の集合

$\{Y(x) \mid x \in A \otimes B, x \geq 0\}$ を定める適当な characterization は得られている ([49], [50] 参照)

$\varphi \in C^*$ 環 A 上の positive linear functional とし

$$C_\varphi = \{\psi \in A^* \mid 0 \leq \psi \leq \lambda \varphi \text{ for some } \lambda > 0\}$$

$[C_\varphi] = C_\varphi$ の A^* での linear span

$\theta: \pi_\varphi(A)' \longrightarrow [\varphi]$ を次のように定義する.

$$\theta(r)(a) = (\pi_\varphi(a)r\zeta_\varphi, \zeta_\varphi) \quad (a \in A)$$

Proposition 2.4 上の θ は $\pi_\varphi(A)'$ と $[\varphi]$ の間の complete order isomorphism (任意の n に γ して $M_n(\pi_\varphi(A)')$ と $M_n([\varphi])$ とが θ_n に γ して order isomorphism のとき γ する)

(証明) [20; Lemma 1 p. 48] から θ は $\pi_\varphi(A)'$ の positive part に γ しては C_φ への onto map である. 従って $\pi_\varphi(A)' \in [\varphi]$ への onto に γ する. $\theta(r) = 0$ とすると

$$0 = \theta(r)(b^*a) = (r\pi_\varphi(a)\zeta_\varphi, \pi_\varphi(b)\zeta_\varphi) \quad (a, b \in A)$$

であるから $r = 0$.

次に $\forall r_1, \dots, r_n \in \pi_\varphi(A)', \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ に γ して

$$\langle [a_i^*a_j], [\theta(r_i^*r_j)] \rangle = \sum_{i,j} (r_i^*r_j \pi_\varphi(a_i^*a_j) \zeta_\varphi, \zeta_\varphi)$$

$$= \left\| \sum_i r_i \pi_\varphi(a_i) \zeta_\varphi \right\|^2 \geq 0$$

$\therefore$ Lemma 1.1 5) θ は CP-map.

更に $M_n([\varphi])$ の positive 元 $f = [f_{ij}]$ とすると

$$\zeta = (\pi_\varphi(a_1)\zeta_\varphi, \dots, \pi_\varphi(a_n)\zeta_\varphi) \in H_\varphi^n \quad \text{に } \gamma \text{ して}$$

$$(\theta^{-1})_n(f)\zeta, \zeta) = \sum_{i,j} (\theta^{-1}(f_{ij})\pi_\varphi(a_j)\zeta_\varphi, \pi_\varphi(a_i)\zeta_\varphi)$$

$$= \sum_{i,j} (\theta^{-1}(f_{ij})\pi_\varphi(a_i^*a_j)\zeta_\varphi, \zeta_\varphi) = \sum_{i,j} f_{ij}(a_i^*a_j)$$

$$= \langle [a_i^* a_j], [f_{ij}] \rangle \geq 0$$

従って $(\theta^+)_n(f) \geq 0$ i.e. θ^+ は CP-map である。以上から θ は complete order isomorphism になる。

【注】上の θ は定義から有界写像であるが θ^+ は一般には有界にならない。

この節の最後として C^* 環 M の dual (の subspace) と M_m との間 CP-map を決定してみる。 C^* 環 M_n の dual を M_m^* とすると M_m と M_m^* は

$$\varphi \in M_m^* \longleftrightarrow [\varphi(e_{ij})] \in M_m \quad (e_{ij} \text{ は matrix unit})$$

と 1) 対応して linear isomorphism になる。今 $\sigma(m): M_m \rightarrow M_m^*$ をこの対応とすると、 $\alpha = [\alpha_{ij}]$, $\beta = [\beta_{ij}]$ に対して

$$\langle \alpha, \sigma(m)(\beta) \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

Lemma 2.5 上の $\sigma(m)$ は complete order isomorphism である。

(証明) $\sigma(m)_n: M_n(M_m) \longrightarrow M_n(M_m^*)$

を考えると、 $M_n(M_m)$ は C^* 環として M_{mn} と同一視出来る。又 $M_n(M_m^*)$ の order はこれを C^* 環 $M_n(M_m)$ の dual と考えての order であるから結局必要なのは任意の m に対して $\sigma(m)$

が order isomorphism であることに注意。ここで M_m の正の元 α とすると、 $\alpha = [\alpha_{ij}]$ と表すことができる。また $\beta = [\beta_{ij}]$ に対して

$$\langle \beta, \sigma(m)(\alpha) \rangle = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_{ij} \beta_{ij} = \left| \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ij} \right|^2 \geq 0$$

即ち $\sigma(m)(\alpha) \geq 0$ 。又逆に $\sigma(m)(\alpha) \geq 0$ となる任意の数の組 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ に対して

$$0 \leq \langle [\bar{\lambda}_i \lambda_j], \sigma(m)(\alpha) \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i \lambda_j$$

よって $\alpha = [\alpha_{ij}]$ は M_m の正の $\{ \}$ である。

E を C^* 環又は dual (の subspace) とし、 $E^\delta \subseteq E$ と duality をつくる相手側の部分空間(後者の時には C^* 環)とする。この

とき $\theta: M_m(E) \longrightarrow \mathcal{L}(M_m, E) \quad \varepsilon$

$$v = [v_{ij}] \longrightarrow \theta(v)(\alpha) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_{ij} \quad (\alpha = [\alpha_{ij}])$$

又

$$\Delta: M_m(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E^\delta, M_m) \quad \varepsilon$$

$$v = [v_{ij}] \longrightarrow \Delta(v)(\varphi) = [\varphi(v_{ij})]$$

と定義する。次の結果は定理 2.2, 2.3 の有限次元の場合にあたるものである。

定理 2.6 上の θ, Δ はそれぞれ $M_m(E)$ と、CP-map の order をつけたときの $\mathcal{L}(M_m, E)$, $\mathcal{L}(E^\delta, M_m)$ との間の order

isomorphism である.

(証明) $v \in M_m(E)$ について, E が C^* 環のとき $M_m(E) = M_m \otimes_\alpha E$ と見ると

$$\theta(v)(\alpha) = R_{\sigma(m)(\alpha)}(v) = r(v)(\sigma(m)(\alpha)) \quad \text{i.e. } \theta(v) = r(v) \circ \sigma(m)$$

又 E が C^* 環の dual 又はその subspace のときは (M_m は nuclear C^* 環であるから) $M_m(E)$ は $M_m \otimes_\alpha E^\sigma = M_m \otimes_\beta E^\sigma$ の dual の subspace と見とく. よって dual slice map により

$$\theta(v)^\alpha = r_\alpha(v) = R(v)(\alpha) \quad \text{i.e. } \theta(v) = R(v)$$

従って定理 2.2, 系 2.3 と Lemma 2.5 から

$$v \geq 0 \iff \theta(v) \text{ は cp-map.}$$

更に Δ については, $\varphi \in E^\sigma$, $\alpha \in M_m$, $v \in M_m(E)$ について

$$\begin{aligned} \langle \theta(v)(\alpha), \varphi \rangle &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \langle v_{ij}, \varphi \rangle \\ &= \langle [\alpha_{ij}], [\varphi(v_{ij})] \rangle = \langle \alpha, \Delta(v)(\varphi) \rangle \end{aligned}$$

とあるから ($\sigma(m)$ を省略してかいておく)

$$\Delta(v) = \sigma(m)^{-1} \circ \theta(v)$$

である. よって Lemma 2.5 から

$$\Delta(v) \text{ が cp-map} \iff \theta(v) \text{ が cp-map}$$

表現が onto なのは明らかである.

Q.E.D.

以上の証明では slice map の使用により埋没してしまつたが elementary な証明を行ふとはどうあがつてくる次の性質

は C^* 環とその dual の性質を(特にその order)理解する上で大事なものである。

Proposition 2.7 A は C^* 環とし, $a = [a_{ij}] \in M_n(A)$

$\varphi = [\varphi_{ij}] \in M_n(A^*)$, 又 $\beta = [\beta_{ij}] \in (m, n)$ 型の数行列とする。

今 $a \geq 0$, $\varphi \geq 0$ とすると

$$\beta^* a \beta \geq 0 \text{ in } M_n(A), \quad \beta^* \varphi \beta \geq 0 \text{ in } M_n(A^*)$$

(証明) A は H 上に作用しているとし, β に対応する H^n から H^m への作用素をとると, $\beta^* a \beta$ に対応する $\mathcal{L}(H^n)$ の元は $t^* a t$ である。よって $a \geq 0 \Rightarrow \beta^* a \beta \geq 0$ 。

次に $b = [b_{p,q}] \in M_n(A)$ とすると, $b \geq 0$ のときは

$$\langle b, \beta^* \varphi \beta \rangle = \langle [b_{p,q}], [\sum_{i,j} \bar{\beta}_{ip} \beta_{jq} \varphi_{ij}] \rangle$$

$$= \sum_{i,j,p,q} \bar{\beta}_{ip} \beta_{jq} \langle b_{p,q}, \varphi_{ij} \rangle = \langle [\sum_{p,q} \bar{\beta}_{ip} \beta_{jq} b_{p,q}], [\varphi_{ij}] \rangle$$

$$= \langle \beta^{t*} b \beta^t, \varphi \rangle \geq 0 \quad \therefore \beta^* \varphi \beta \geq 0.$$

(但し β^t は β の transpose 行列)

主参考文献

[14], [21], [35], [47], [50], [54]

§3. Completely positive map による approximation property. von Neumann 環の場合.

この節では CP-map の立場から最近の semidiscrete von Neumann 環と injective von Neumann 環に関する結果, 特に Γ の global 等値性を評述する. これらについてはこれにのべるほかに Connes [12] の hyperfinite factor としての injective factor の characterization とはじの Wassermann [54] や Effros-Lance [24] の Γ の Γ - Γ 積に関する結果等事柄としては大まかに決まってくるがここでは completely positive という概念がどう関係してくるかというところを主に扱うことにする.

von Neumann 環の injectivity は作用素環としては Connes [13] にとまかされておるものに群の amenability と密接に関連をもっているがもう一つの背景として Banach 空間での議論がある. それを少し説明してみよう. Banach 空間 E がそれを含む Banach 空間 F より常に (Banach 空間としての) $1 \leq p < \infty$ の projection をもつとき E を injective Banach 空間という. このような Banach 空間は最初 Goodner [26] によって研究され, real Banach 空間についてはその characterization (Stonean 空間上の連続関数環(実数値)と同型)が得られていた. 同じ頃

Effros [24] における semidiscrete von Neumann 環の議論である。

R を H 上の von Neumann 環とする。 $L(H)$ より R へ 1 の projection があるとき R を injective von Neumann 環という。
定理 1.6 から (Proposition 1.4 も含せて) 次の 2 つは容易にわかる。

Proposition 3.1 次の同値である

- 1) R は H 上の injective von Neumann 環である
- 2) $\forall C^*$ 環 $A \supset R \quad \exists \varepsilon: A \rightarrow R$ 1 の projection
- 3) $\forall C^*$ -環 $A \supset B$ C^* 部分環

$$\tau: B \rightarrow R \quad \text{cp-map}$$

$$\exists \hat{\tau}: A \rightarrow R \quad \text{cp-map の } \tau \text{ の拡大}$$

Proposition 3.2. $R_1, R_2 \in \{h, \bar{h}\}$ は H と K 上の von Neumann 環, $S_1, S_2 \in \{1\}$ の von Neumann 部分環とする。

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2: R_1 \otimes_\alpha R_2 \longrightarrow S_1 \otimes_\alpha S_2 \quad \text{product projection}$$

このとき ε_0 は $R_1 \otimes R_2$ より $S_1 \otimes S_2$ への 1 の projection に拡大出来る

(証明). $\{e_i \mid i \in I\} \in L(K)$ の 1 の orthogonal と minimal projection で $\sum_i e_i = 1$ とする。 $\tilde{e}_i = 1 \otimes e_i$

J : finite subset $\subset I$ に対して

$$\tilde{e}_j = 1 \otimes \sum_{i \in J} e_i = 1 \otimes e_j \quad \text{と } \alpha < \varepsilon$$

$$\tilde{e}_j(R_1 \otimes L(K))\tilde{e}_j = R_1 \otimes e_j L(K) e_j = R_1 \otimes_{\alpha} L(e_j K)$$

よって

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j \otimes 1_j : R_1 \otimes_{\alpha} L(e_j K) \longrightarrow S_1 \otimes_{\alpha} L(e_j K) \quad \text{と } \alpha < \varepsilon$$

$$\varepsilon_j^1(x) \equiv \varepsilon_j(\tilde{e}_j x \tilde{e}_j) \quad (x \in R_1 \otimes L(K))$$

よって $x \in R_1 \otimes L(K)$ に対して $\{\varepsilon_j^1(x) \mid j \in I\}$ は bounded net

である

$$\varepsilon^1(x) \equiv \lim_j \varepsilon_j^1(x) \quad (\text{operator Banach limit})$$

このとき operator Banach limit の性質 (4.6 参照) から

$$\varepsilon^1(x) \in S_1 \otimes L(K) \quad \text{且 } \|\varepsilon^1(x)\| \leq \|x\|$$

今 $x \in S_1 \otimes L(K)$ のときは

$$x = \sigma\text{-weak limit of } \tilde{e}_j x \tilde{e}_j$$

であるから

$$\varepsilon^1(x) = \lim_j \varepsilon_j^1(x) = \lim_j \varepsilon_j(\tilde{e}_j x \tilde{e}_j) = \lim_j \tilde{e}_j x \tilde{e}_j = x$$

i.e. $\varepsilon^1(x)$ は $S_1 \otimes L(K)$ への 1 の元 1 の projection である。

つくりかから

$$\varepsilon^1(a \otimes b) = \varepsilon_1(a) \otimes b \quad a \in R_1, \quad b \in L(K)$$

同様にして $L(H) \otimes R_2$ から $L(H) \otimes S_2$ への 1 の元 1 の projection

ε^2 が定義出来る。

$$\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^1 \cdot \varepsilon^2(x) \quad (x \in R_1 \otimes R_2)$$

そこで $a \in S_2'$ に対して $1 \otimes a \in S_1 \otimes L(K)$ となるから

projection の module property か

$$1 \otimes a \varepsilon(x) = \varepsilon^1(1 \otimes a \varepsilon^2(x)) = \varepsilon^1(\varepsilon^2(x) 1 \otimes a) = \varepsilon(x) 1 \otimes a$$

$$\therefore \varepsilon(x) \in S_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K) \cap \mathcal{L}(H) \overline{\otimes} S_2 = S_1 \overline{\otimes} S_2$$

よって $\varepsilon(x)$ は $S_1 \overline{\otimes} S_2$ への inclusion の projection であり、かつ
 か

$$\varepsilon(a \otimes b) = \varepsilon_1(a) \otimes \varepsilon_2(b) \quad (a \in K_1, b \in K_2)$$

<注> 上の結果は一般の CP-map にまで拡張することが出来る。

定理 3.3 Injectivity は algebraic invariant である。又 R が injective であることと R' が injective であることは同値である。

(証明) von Neumann 環 R (on H) と S (on K) とが同型であることは同型対応の分解定理 [20; 定理 3, p. 55] から適当なヒルベルト空間 K_0 をとって $R \otimes 1$ on $H \otimes_0 K_0$ と $S \otimes 1$ on $K \otimes_0 K_0$ とは spatial に同型になるように出来る。よって定理の前半を示すには ampliation について

$$R \text{ injective} \iff R \otimes 1 \text{ が injective (on } H \otimes_0 K)$$

を示せば十分である。

$$\varepsilon_0: \mathcal{L}(H) \longrightarrow R \quad \text{ inclusion の projection}$$

$$\varphi: \text{normal state on } \mathcal{L}(K) \quad \text{ とし } \quad \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_1 : \mathcal{L}(H \otimes K) \xrightarrow{L_\varphi} \mathcal{L}(H) \xrightarrow{\varepsilon_0} R \longrightarrow R \otimes 1$$

は又 1.4.1 の projection. 又 ε_1 は projection $\varepsilon_1 : \mathcal{L}(H \otimes K) \longrightarrow R \otimes 1$ があつて ε_0 とすると

$$\varepsilon_0 : \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \otimes 1 \xrightarrow{\varepsilon_1} R \otimes 1 \longrightarrow R$$

は 1.4.1 の projection. 従つて前等は成り立つ.

次に今 R' が injective であるとする. Proposition 3.2 から $(R \otimes 1)' = R' \otimes \mathcal{L}(K)$ も injective である. 又後者が成り立つとすると

$$\exists \varepsilon_1 : \mathcal{L}(H \otimes K) \longrightarrow R' \otimes \mathcal{L}(K) \text{ projection}$$

こつとす

$$\varepsilon_0 : \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \otimes 1 \xrightarrow{\varepsilon_1} R' \otimes \mathcal{L}(K) \xrightarrow{L_\varphi} R'$$

は 1.4.1 の projection.

以上かうおと同じ理由で R' が injective であるとし、 R の性質も algebraic invariant である. $\pi \in R$ の standard 表現とし K を表現空間 $\mathcal{J}$ とする $\mathcal{J}$ の canonical な involution とする. i.e. $\mathcal{J}^2 = 1$, $\mathcal{J}\pi(K)\mathcal{J} = \pi(R)'$.

今 $\varepsilon \in \mathcal{L}(K)$ として $\pi(R)$ への projection とすると

$$\varepsilon'(x) = \mathcal{J}\varepsilon(\mathcal{J}x\mathcal{J})\mathcal{J} \quad x \in \mathcal{L}(K)$$

は $\pi(R)'$ への 1.4.1 の projection である. 従つて前の議論と合せて

$$R \text{ injective} \iff \pi(R) \text{ が injective}$$

$\Longleftrightarrow \pi(R')$ が injective $\Longleftrightarrow R'$ が injective

系 3.3. I 型の von Neumann 環は injective である.

(証明) I 型の von Neumann 環は commutant が可換である環と同型になり、可換 von Neumann 環は荷見の結果で (Banach 空間としても) injective である.

Proposition 3.4 $\{R_\alpha\}$ が injective な von Neumann 環の増加列とすると、 $R = (R_\alpha)''$ は injective である

(証明) $R' = \bigcap R'_\alpha$ $\{R'_\alpha\}$ は減少列. $\exists z \neq 0$ $z \in R'_\alpha$ への projection とし

$$E(z) \equiv \lim_{\alpha} E_\alpha(z) \quad (\text{operator Banach limit})$$

とみると,

$$\alpha \geq \alpha_0 \text{ のとき } E_\alpha(z) \in R'_\alpha \implies E(z) \in R'_\alpha$$

よって $E(z) \in R'$. E は明らかに 1 に 4 の projection.

以上から hyperfinite factor は injective であることがわかる.
この逆が Connes [12] の主要結果である.

以下以下の議論で容易にわかるような結果 ([13] とは

$\{R_\alpha\}$ injective $\Longleftrightarrow \sum_{\alpha} R_\alpha$ injective など...) は証明を
L に用いることにする.

von Neumann 環 R において R の単位作用素が有限次のユニタリ σ -weakly continuous な CP-map で point σ -weak convergence topology で近似出来ることと R は semidiscrete であること。

Lemma 3.5 可換 von Neumann 環, $\mathcal{L}(H)$ は semidiscrete

(証明) $R = C(\Omega)$ とする。

Δ : Ω の disjoint clopen set への分解 $\{S_j\}$

χ_i : S_i の特性関数

μ_i : $\text{supp } \mu_i = S_i$ とする normal probability measure

とする

$$\tau_\Delta(x) = \sum_i \mu_i(x) \chi_i \quad (x \in R)$$

とみると τ_Δ は R から有限次元の部分環への normal な射影、
又つくり方から

$$\tau_\Delta \rightarrow 1 \quad (\text{point } \sigma\text{-weak conv. topology})$$

従って R は semidiscrete.

次に $\mathcal{L}(H)$ のときは

$\{e_i \mid i \in I\}$ orthogonal minimal projection $\sum_i e_i = 1$

$e_J = \sum_{i \in J} e_i$; J finite subset $\subset I$

$e_J x e_J \rightarrow x$ σ -weakly ($\forall x \in \mathcal{L}(H)$)

よって normal state $\varphi \in I$ と

$$\tau_j(x) = e_j x e_j + \varphi(x)(1 - e_j)$$

とあるが τ_j はユニタリな有限次 normal cp-map で $\tau(x)$ である

$$\tau_j(x) \longrightarrow x \quad \sigma\text{-weakly}$$

semidiscreteness について「 τ が algebraic invariant である」と、 R と S が semidiscrete であるとき $R \otimes S$ が semidiscrete であるとは Proposition 1.8 から、容易にわかるから上の Lemma と合せて I 型の von Neumann 環は semidiscrete であることがわかる。又定理 3.3 と同様にして R が semidiscrete であることと R' が semidiscrete であることが同値であることが言える。

R について更に次の性質 (A) を考える

$$(A) \quad \gamma: R \otimes R' \longrightarrow \mathcal{Z}(H)$$

$$\gamma(a \otimes b) = ab \quad \text{と定まると}$$

γ は σ -ノルムで連続である。 i.e. γ は $R \otimes R'$ から $\mathcal{Z}(H)$

への $*$ -homomorphism に拡大出来る。

γ についてこの節の目標とするのは次の結果である。

定理 任意の von Neumann 環 R について次のことは同値である。

- (1) R は injective である
- (2) R は 性質 (A) をもつ
- (3) R は semidiscrete である.

この結果は Effros-Lance [24] によって (2) $\Leftrightarrow$ (3) が示され、
 又 (2) $\Rightarrow$ (1) は容易に証明出来る。そして一番困難な (1) $\Rightarrow$ (2)
 (従って injectivity と semidiscrete 性の同値) については可分
 なヒルベルト空間上の factor については Connes [12] をもとに
 III 型の factor は他の彼の結果と合せて implication が言えてい
 た。その後 Choi-Effros [16] は reduction theory を用いて可
 分な空間上の global な von Neumann 環にこれを拡張し、更にこ
 れを用いることにより一般の von Neumann 環でも両者の同値
 性が成り立つことを示している ([17])。ここでは元の Connes
 の証明を改良した Wassermann [55] により、一般の場合の直接の
 証明をつべる。定理の証明は非常に長いものなので各段階の
 Lemma を つみ重ねた形でのべていく。ここで R が factor の
 時にはよく知られているように R と R' とで生成された C^* 環
 $C^*(R, R')$ は C^* テンソル積と考えることができる。性質 (A) はこのテ
 ンソル積が spacial なテンソル積と一致するという一種の
 (commutant に対する) R の nuclearity をあらわしているこ
 とを注意しておく。又これと関連して次のことを確認してお

3. C^* 環 A, B について $\Gamma \in S(A \otimes B)$ の Γ の separating family, Γ による $A \otimes B$ の ノルム $\|\cdot\|_\Gamma$ とする.

Lemma 3.6 Γ の 弱* closure が $S(A \otimes B)$ を含むとする.

このとき $\|\cdot\|_\Gamma$ が $\|\cdot\|_2$ と一致するための条件は, $\forall f \in \Gamma$ について $R(f): A \rightarrow B^*$ (すなわち $L(f): B \rightarrow A^*$) が ノルム 1 の有限次 CP-map で point-weak* 収束位相で近似出来ることである. ($S^*(A \otimes B)$ の 族の時は ノルム 1 でなく contraction).

(証明) $R(f)$ が ノルム 1 の有限次 CP-map であることと $f \in S(A \otimes B) \cap A^* \otimes B^*$ が同値であることは容易にわかるから定理 2.2 と Γ の条件から上のことが canonical map

$$A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$$

が 1 対 1 となるための必要十分条件である.

Lemma 3.7. $\text{remidiscrete} \implies (A)$

(証明) $\Gamma = \{f \in S(R \otimes R') \mid \ell_b(f) \in R_*, \forall b \in \pi(R')\}$

とみると, Γ は convex set である.

$$\forall f \in \Gamma \quad \forall y \in R \otimes R' \quad \exists g \in \Gamma: f(y^* x y) = f(y^* y) g(x)$$

従って §2 のはじめで述べたように

$$\Gamma \text{ の 弱* closure } = S(R \otimes R')$$

$$\Gamma \text{ の 定義から } \|\cdot\|_\Gamma \geq \|\cdot\|_2 \quad (x \in R \otimes R')$$

ここで $f \in \Gamma$ によって $L(f): R' \longrightarrow R_*$ を考えたと R は semidiscrete なから R_* の単位作用素は有限次 CP-map で各 $\tau \in \sigma(R_*, R)$ 位相で近似出来るのである。この net $\tau \in \{\tau_\alpha^*\}$ とすると $L(f)$ は有限次 CP-map $\tau_\alpha^* \circ L(f)$ により各 τ と $\sigma(R_*, R)$ 位相で近似出来る。従って Lemma から

$$\|x\|_p = \|x\|_q \quad \text{と成る。}$$

Lemma 3.8 性質 (A) $\implies$ injective

(証明) γ を α -ノルムで連続とする。 $R \otimes R'$ は $R \otimes \mathcal{L}(H)$ の C^* 部分環とみれるから、表現 γ を拡大して

$\exists \pi: R \otimes \mathcal{L}(H) \rightarrow K(\mathcal{L}(H))$ 上への表現

$$\pi(x)|_H = \gamma(x) \quad x \in R \otimes R'$$

γ として projection $p: K \rightarrow H$ をとり $x \in \mathcal{L}(H)$ によって

$$\varepsilon(x) = p \pi(1 \otimes x)|_H \quad \text{と置く。}$$

ここで $\varepsilon(x)$ はつくりかから $\forall a \in R$ によって可換であるから $\varepsilon(x) \in R'$ 。又明らかに $\varepsilon(b) = b$ ($\forall b \in R'$)。従って R' は injective であり、定理 3.3 から R も injective になる。

Lemma 3.9 性質 (A) $\implies$ semidiscrete

(証明) H の単位ベクトル ξ をとり、 $f = \omega_\xi \circ \gamma$ とおくと f は $R \otimes R'$ の state である。

$$T = L(f) : R' \longrightarrow R_* \quad f \text{ は } \exists \text{ cp-state map}$$

$$\varphi = T(1) \text{ とおく. } \varphi(a) = \omega_3 \circ \gamma(a \otimes 1) = (a\bar{3}, \bar{3})$$

$e' = [R\bar{3}] \cap$ の projection; e' は R' の projection で $\pi_\varphi(R)$ は Re' と spatial に同一視出来る. このとき proposition 2.4 から

$$\theta_\varphi^{-1} \circ T : R' \longrightarrow e'R'e' \quad \text{cp-map.}$$

又 $\forall b \in R$ に対して

$$T(b)(a) = f(a \otimes b) = (ab\bar{3}, \bar{3}) = (ae'b'e'\bar{3}, \bar{3})$$

又 $\pi_\varphi(R)'$ と $e'R'e'$, $\pi_\varphi(R)$ と Re' が同一視で

$$\gamma = \theta_\varphi^{-1} \circ T(b) \quad \text{i.e.} \quad \theta_\varphi(\gamma) = T(b) \text{ のとき}$$

$$T(b)(a) = (a\gamma\bar{3}, \bar{3}) \quad (a \in R) \quad \text{であるから}$$

$$\gamma = \theta_\varphi^{-1} \circ T(b) = e'b'e'.$$

さて T は Lemma 3.6 から有限次 cp-state map の列 $\{T_r\}$ で近似出来るが $S(R \otimes R')$ の中で $S(R \otimes R') \cap R_* \otimes (R')_*$ が弱* dense であることから, $T_r(R') \subset R_*$ と考えてよいが更に

$\text{任意の } r \text{ に対して } T_r(1) = \varphi$

と調整出来ることをこの次の Lemma で示す. $\phi_r = \theta_\varphi^{-1} \circ T_r$ とおく. ϕ_r が normal であることは $\theta_\varphi^{-1} \circ T$ は σ -weak に収束するところから. $\{b_\alpha\}$ ($\|b_\alpha\| \leq 1$) は R' の net で

$$b_\alpha \longrightarrow 0 \quad (\sigma\text{-weak}) \quad \text{とすると, } \forall a_1, a_2 \in R \text{ に対して}$$

T_r は $S(R \otimes R') \cap R_* \otimes (R')_*$ からつくられるから

$$(\phi_r(b_\alpha) \pi_\varphi(a_1)\bar{3}, \pi_\varphi(a_2)\bar{3}) = T_r(b_\alpha)(a_2^* a_1) \longrightarrow 0$$

るは $e'H$ で cyclic で $\|\phi_r(b_\alpha)\| \leq 1$ であるから、以上から

$$\phi_r(b_\alpha) \longrightarrow 0 \quad (\sigma\text{-weak})$$

次に $b \in R'$, $a_1, a_2 \in R$ について

$$((\phi_r(b) - b) \pi_\varphi(a_1), \pi_\varphi(a_2)) = \langle a_2^* \phi, T_r(b) - T(b) \rangle$$

は 0 に収束する。 $\|\phi_r(b) - b\| \leq 2\|b\|$ であるから、上より $\phi_r(b)$ が

$e'R'e' = \theta_\varphi^{-1} \circ T(b)$ に $\sigma\text{-weak}$ に収束するところを示している。そこで $e'R'e'$ の normal state ψ をとり、

$$\Phi_r(s) = \theta_\varphi^{-1} \circ T_r(s + \psi(s)(1 - e')) \quad (s \in e'R'e')$$

とおけば、 Φ_r は $\gamma = \gamma_\psi$ を有限次 normal CP-map で与えることから

$$\Phi_r(s) \longrightarrow \theta_\varphi^{-1} \circ T(s + \psi(s)(1 - e')) = s \quad \sigma\text{-weak}$$

従って $e'R'e'$ は seminidiscrete である。よって Re' は seminidiscrete になる。一般に $\{R_\alpha\}$ が seminidiscrete な von Neumann 環の族になるとき、その direct sum $\sum_\alpha R_\alpha$ が又 seminidiscrete であることは定義からほとんど明らかであるから、上のことを繰り返して R は seminidiscrete になる。

上の枠の調整が可能であることを以下に示す。矢張り R を

R_* の dual と考えれば、 T_r は T に各点 z とは弱位相 $\sigma(R_*, R)$ で収束するから、そのような convex combination は各点 z とは R_* で T に $\|\cdot\|_*$ で収束する。 T_r の convex combination は又有

Lemma 3.11 Lemma 3.8 の状況で $\tau(1) = T(1) = \varphi$ とおくと
 成る.

(証明) $\delta > 0$ に対し $\delta + \delta^{1/2}(2 + \delta^{1/2}) < \varepsilon$ ととり、この δ によってある
 の Lemma の τ' をとる。境の定理 [41; 定理 1.24.3] から
 $\tau'(1) = \varphi$ とおくと

$$\exists t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, \quad \varphi(x) = f(tx + t) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\exists \eta \in \mathcal{H} \quad \eta = \pi_f(t) \xi_f \in H_f \quad \text{とおくと}$$

$$\varphi(x) = (\pi_f(x)\eta, \eta)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad (\eta, \xi_f) &= (\pi_f(t)\xi_f, \xi_f) \geq (\pi_f(t^2)\xi_f, \xi_f) \\ &= \|\eta\|^2 = \varphi(1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|\eta - \xi_f\|^2 &= \|\xi_f\|^2 + \|\eta\|^2 - 2(\eta, \xi_f) \\ &\leq f(1) + 1 - 2 < 1 + \delta - 1 = \delta \end{aligned}$$

$$\exists \tau : \mathbb{R}' \longrightarrow \mathbb{R}_* \quad \varepsilon$$

$$\langle b, \tau(a) \rangle = \langle tb + t, \tau'(a) \rangle$$

とおく。このとき τ は有限次 normal cp-map.

$$\tau(1) = \langle t \cdot t, \tau'(1) \rangle = \tau(1)$$

$$b'_i = \theta_f^{-1} \circ \tau'(b_i) \in \pi_f(\mathbb{R})' \quad \text{とおくと} \quad \|b'_i\| \leq 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \|x\| \leq 1 \quad \text{によって}$$

$$|\langle x, \tau(b_i) - \tau'(b_i) \rangle| = |\tau'(b_i)(tx + t - x)|$$

$$= |(b'_i \pi_f(tx + t - x) \xi_f, \xi_f)| = |(b'_i \pi_f(x) \eta, \eta) - (b'_i \pi_f(x) \xi_f, \xi_f)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(b_i' \pi_f(x) \gamma, \gamma - \beta_f)| + |(b_i' \pi_f(x) (\gamma - \beta_f), \beta_f)| \\
&\leq \|\gamma - \beta_f\| (1 + \|\beta_f\|) < \delta^{1/2} (1 + 1 + \delta^{1/2}) < \varepsilon - \delta \\
\therefore \|\tau(b_i) - \tau'(b_i)\| &< \varepsilon - \delta \quad \delta > \tau \\
\|\tau(b_i) - \tau(b_i)\| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

こゝまで、最も困難な定理の (1) $\Rightarrow$ (2) の主張をこのように証明が終ったことになる。 (1) $\Rightarrow$ (2) について Connes [12] の factor の場合の証明は II_1 -case が本質的であつた。 Wassermann の証明の基本は 2 つ場合の Connes の証明と注意深く見合ふして factor の "singularity" を一つ一つ取り除いていくと、結局全部とり除かれて global な II_1 -case の証明が完了するので、他の場合も構造定理から成り立つことがわかるというものである。 先ず準備として次の Lemma を示す ([13] 参照)

$\text{Tr} : \mathcal{L}(H)$ の通常の trace

$f_a : (a, \infty)$ の特性函数 $a \geq 0$

Lemma 3.12 $h, k \in \mathcal{L}(H)$ の positive な Hilbert-Schmidt 作用素とすると

$$\int_0^\infty \|f_{\sqrt{a}}(h) - f_{\sqrt{a}}(k)\|_2^2 da \leq \|h - k\|_2 \|h + k\|_2$$

但し $\|\cdot\|_2$ は Hilbert-Schmidt ノルム

(証明) $h = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ $k = \sum_{j \in J} \mu_j f_j$ (固有展開)

$F, G: R_+$ 上のボレル可測関数で $F(0) = G(0) = 0$

かつ $\sum_i |F(\lambda_i)|^2 \text{Tr}(e_i) < \infty$, $\sum_j |G(\mu_j)|^2 \text{Tr}(f_j) < \infty$

と仮定しようとする。このとき

$$F(h) = \sum_i F(\lambda_i) e_i \quad G(k) = \sum_j G(\mu_j) f_j$$

は HS-作用素で

$$\text{Tr}(F(h)G(k)) = \sum_{i,j} F(\lambda_i) G(\mu_j) \text{Tr}(e_i f_j)$$

よって R_+^2 上の discrete measure μ を次のように定める。

$$\mu\{(\lambda_i, \mu_j)\} = \text{Tr}(e_i f_j)$$

$$\mu\{(\lambda_i, 0)\} = \text{Tr}(e_i f_0) \quad f_0 = 1 - \sum_j f_j$$

$$\mu\{(0, \mu_j)\} = \text{Tr}(e_0 f_j) \quad e_0 = 1 - \sum_i e_i$$

この測度を用いると

$$\text{Tr}(F(h)G(k)) = \int F(x) G(y) d\mu(x, y)$$

次に

$F', G': R_+$ 上のボレル可測関数で $F'(0) = G'(0) = 0$ かつ

$$\sum_i |F'(\lambda_i)| \text{Tr}(e_i) < \infty, \quad \sum_j |G'(\mu_j)| \text{Tr}(f_j) < \infty$$

と仮定しようとする。このとき

$$F'(h) = \sum_i F'(\lambda_i) e_i, \quad G'(k) = \sum_j G'(\mu_j) f_j$$

は共に trace class の作用素で

$$\text{Tr}(F'(h)) = \int F'(x) d\mu(x, y)$$

$$\mathrm{Tr}(G'(k)) = \int G'(y) d\mu(x, y)$$

従つて最初の内積 F, G について

$$\begin{aligned} \|F(h) - G(k)\|_2^2 &= \mathrm{Tr}(F(h)^* F(h)) + \mathrm{Tr}(G(k)^* G(k)) \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \mathrm{Tr}(G(k)^* F(h)) \\ &= \mathrm{Tr}(|F|^2(h)) + \mathrm{Tr}(|G|^2(k)) - 2 \operatorname{Re} \mathrm{Tr}(\bar{G}(k) F(h)) \\ &= \int (|F|^2(x) + |G|^2(y)) d\mu(x, y) - 2 \operatorname{Re} \int \bar{G}(y) F(x) d\mu(x, y) \\ &= \int |F(x) - G(y)|^2 d\mu(x, y) \end{aligned}$$

よつて $a \geq 0$ として $F = G = f_a$ とする。

$$\begin{aligned} \|f_a(h) - f_a(k)\|_2^2 &= \int |f_a(x) - f_a(y)|^2 d\mu(x, y) \\ &= \int |f_a(x) - f_a(y)| d\mu(x, y) \end{aligned}$$

よつて $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ として

$$\int_0^\infty |f_{\sqrt{a}}(x) - f_{\sqrt{a}}(y)| da = \int_0^\infty |f_a(x^2) - f_a(y^2)| da = |x^2 - y^2|$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|f_{\sqrt{a}}(h) - f_{\sqrt{a}}(k)\|_2^2 &= \int_0^\infty \int |f_{\sqrt{a}}(x) - f_{\sqrt{a}}(y)| d\mu(x, y) da \\ &= \int |x^2 - y^2| d\mu(x, y) \leq \left(\int |x - y|^2 d\mu(x, y) \right)^{1/2} \left(\int |x + y|^2 d\mu(x, y) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \|h - k\|_2 \|h + k\|_2$$

Lemma 3.13 $h_0, h_1, \dots, h_n$ HS-作用素, $\varepsilon > 0$

今 $\|h_j - h_0\|_2 \leq \varepsilon \|h_0\|_2$ とする

$\exists a > 0$; $f_a(h_0) \neq 0$ か?

$$\sum_{j=1}^n \|f_a(h_j) - f_a(h_0)\|_2^2 \leq 3n\varepsilon \|f_a(h_0)\|_2^2$$

(証明) $\|h_j + h_0\|_2 \leq 3\|h_0\|_2$ とある Lemma か?

$$\int \sum_{j=1}^n \|f_{\sqrt{a}}(h_j) - f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 da \leq 3n\varepsilon \|h_0\|_2^2$$

$\therefore \exists a > 0$

$$\int \|f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 da = \text{Tr}\left(\int f_a(h_0^2) da\right) = \text{Tr}(h_0^2) = \|h_0\|_2^2$$

$\therefore \exists a > 0$

$$\int \sum_{j=1}^n \|f_{\sqrt{a}}(h_j) - f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 da \leq 3n\varepsilon \int \|f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 da$$

$\therefore \exists a > 0$; $f_a(h_0) \neq 0$

$$\sum_{j=1}^n \|f_a(h_j) - f_a(h_0)\|_2^2 \leq 3n\varepsilon \|f_a(h_0)\|_2^2$$

Lemma 3.14 (Powers-Størmer の不等式)

positive HS-作用素 h, k について

$$\|h - k\|_2^2 \leq \|h^2 - k^2\|_{\text{Tr}} \quad (\text{trace norm})$$

(証明) $s = h - k$ $t = h + k$ とおく

$\{\lambda_i\}$: s の固有値

$\{\xi_i\}$: $\{\lambda_i\}$ に対する固有 vector $\in \ell_2$ の orthonormal basis ($\|\xi_i\| = 1$)

$$\text{先ず } t \geq \pm s, \quad \frac{1}{2}(st + ts) = h^2 - k^2 \quad \text{より}$$

$$\|h^2 - k^2\|_{\text{Tr}} = \text{Tr}(|h^2 - k^2|) = \sum_i \frac{1}{2} |(st + ts) \xi_i, \xi_i|$$

$$\geq \sum_i \left| \frac{1}{2} ((st + ts) \xi_i, \xi_i) \right| = \sum_i |\lambda_i (t \xi_i, \xi_i)|$$

$$\geq \sum_i \lambda_i^2 = \sum_i (s^2 \xi_i, \xi_i)$$

$$= \text{Tr}((h - k)^2) = \|h - k\|_2^2$$

$R \in H$ 上の von Neumann 環としたとき, $\mathcal{L}(H)$ の state ϕ が R の hypertrace であるとは, $\forall a \in R, x \in \mathcal{L}(H)$ について

$$\phi(ax) = \phi(xa)$$

が成り立つことをいふ。

上の Lemma 12, 13 は countable 可 amenable discrete 群 に対する Day の方法を用いた Namioka による Følner の定理の証明に示唆を得たものであるが次の Lemma はその結果の実質的等作用素環への寄与を示しており Day の方法はここ

でも又使われている (amenable group について (27) 参照)

Lemma 3.15 H 上の von Neumann 環 R に hypertrace ϕ があるとする. このとき $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ と $\varepsilon > 0$ について

$$\exists e \in \mathcal{L}(H) \text{ の有限次元 projection; } \|[e, x_j]\|_2 \leq \varepsilon \|e\|_2$$

(証明). R の任意の元は R のユニタリ作用素の linear combination でかけるから, ユニタリ作用素について上のことを証明すれば十分である.

$u_1, u_2, \dots, u_n$ を R のユニタリ作用素とする. $\mathcal{L}(H)$ の n -fold copy $\mathcal{L}(H)^n$ の predual で

$$C = \{(\varphi - \varphi A u_1, \varphi - \varphi A u_2, \dots, \varphi - \varphi A u_n) \mid \varphi \text{ normal state} \}$$

と置く. C は convex set である. $\{z \in C \mid \|z\| \leq 1\}$ の closure は 0 が入るからとすると, $(\mathcal{L}(H)_*)^n = (\mathcal{L}(H)^n)_*$ 上のノルム連続 functional i.e. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ と $\alpha > 0$ が存在して $\forall$ normal state φ について

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n (\varphi(x_j) - \varphi(u_j^* x_j u_j)) \geq \alpha$$

しかし hypertrace ϕ は normal state の弱*極限だから

$$\phi(x_j) = \phi(u_j^* x_j u_j) \text{ であるから上の式は矛盾である. }$$

よって $0 \in \overline{C}$, 従って

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varphi \text{ normal state on } \mathcal{L}(H)$$

$$\|u_j \varphi u_j^* - \varphi\| \leq \delta \quad (1 \leq j \leq n)$$

$\varphi = \text{Tr}(\rho \cdot)$ とする. このとき ρ は Trace class の作用素,
 で $\text{Tr}(\rho) = 1$, さて

$$u_j \varphi u_j^*(x) = \varphi(u_j^* x u_j) = \text{Tr}(\rho u_j^* x u_j) = \text{Tr}(u_j \rho u_j^* x)$$

だから非可換積分論から

$$\|\rho - u_j \rho u_j^*\|_{\text{Tr}} = \|\varphi - u_j \varphi u_j^*\| \leq \delta$$

$$h = \rho^{1/2}, \quad h_j = u_j h u_j^* \quad \text{と置く (positive HS-作用素)}$$

Lemma 3.14 から

$$\|h_j - h\|_2 \leq \|h_j^2 - h^2\|_{\text{Tr}}^{1/2} = \|u_j \rho u_j^* - \rho\|_{\text{Tr}}^{1/2} \leq \delta^{1/2}$$

又 $\|h\|_2 = 1$ だから Lemma 3.13 から

$$\exists a > 0; f_a(h) \neq 0, \|f_a(h_j) - f_a(h)\|_2 \leq \sqrt{3n} \delta^{1/2} \|f_a(h)\|_2$$

ここで

$$f_a(h_j) = u_j f_a(h) u_j^*, \quad h \text{ は HS-作用素 であるから}$$

$\text{Tr}(f_a(h))$ は有限 i.e. $e = f_a(h)$ は有限次元 projection であるから上の δ を十分小さくとすればこの e に対して

$$\|[e, u_j]\|_2 = \|u_j e u_j^* - e\|_2 \leq \varepsilon \|e\|_2$$

Lemma 3.16 R : finite injective von Neumann 環

Z : R の center

Φ : center valued trace とする. このとき

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in R \quad \varepsilon > 0 \quad \text{と } n \geq 1 \quad \text{と}$$

$\exists \varphi_0$: normal state on Z ,

$$|\varphi_0(\Phi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*))| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha + \varepsilon$$

ここで b_i^c は次の意味である. $H^c \in H$ と共役作用素とルベロ空間とし, その同対応を $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}^c$ とかく. $x \in \mathcal{L}(H)$ に対して $\mathcal{L}(H^c)$ の作用素 x^c を $x^c \mathfrak{Z}^c = (x \mathfrak{Z})^c$ で定義出来る.

(Lemma の証明) $\|a_i\| \leq 1$ としてよい. $c = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*$ とおく. 任意 R の任意の state φ に対して

$$\exists 0 < \delta < 1, \quad u_1, \dots, u_k \in R \text{ ユニタリ作用素}$$

$$\|u_i \varphi - \varphi u_i\| \leq \delta \implies |\varphi(c - \Phi(c))| \leq \varepsilon$$

を示そう. 上のことが成り立っているとして

$\exists \alpha > 0$; $\forall$ ユニタリ作用素の有限集合 F と $\forall n$ について

state $\varphi_{F,n}$ が存在して $u \in F$ について

$$\|u \varphi_{F,n} - \varphi_{F,n} u\| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |\varphi_{F,n}(c - \Phi(c))| \geq \alpha$$

そこで $\varphi \in \{\varphi_{F,n}\}$ の弱* 極限矢の一つとすると, φ は trivial state に落ちるから [20; 系 p. 254] より $\varphi = \varphi \circ \Phi$ となるのである.

今 $\mu \in \mathcal{L}(H)$ から R への $|\mu|$ の projection とすると, その module property から $\varphi = \varphi \circ \Phi \circ \mu$ は R の hypertrace である. そこで Lemma 3.15 の projection $e \in b_1, b_2, \dots, b_n$ に対してとるばかりでなく上記の $u_1, u_2, \dots, u_k$ に対して

$$\| [u_j, e] \|_2 \leq \frac{\delta}{3} \| e \|_2$$

か或る $\varepsilon > \delta/3$ なる ε をとる. $\mathbb{R}$ の state $\varphi_0 \in$

$$\varphi_0(x) = \text{Tr}(ex e) / \text{Tr}(e) \quad \text{と置く.}$$

φ_0 は Hilbert-Schmidt の内積を用いて

$$\varphi_0(x) = \langle x e, e \rangle_2 / \langle e, e \rangle_2 \quad \text{と置く.}$$

$$\begin{aligned} u_j^* \varphi_0 u_j(x) &= \langle x u_j^* e, u_j^* e \rangle_2 / \langle e, e \rangle_2 \\ &= \langle x e_j, e_j \rangle_2 / \langle e, e \rangle_2 \quad \text{但し } e_j = u_j^* e u_j \end{aligned}$$

$$\delta > \varepsilon \quad \| e_j - e \|_2 \leq \frac{\delta}{3} \| e \|_2 \quad \text{と令せば}$$

$$\| \varphi_0 - \varphi_0 \circ \text{Ad} u_j \| \leq 2\delta/3 < \delta$$

$$\therefore \quad | \varphi_0(c - \Phi(c)) | \leq \varepsilon$$

$$\text{一方} \quad \| a_j \| \leq 1 \quad \text{と} \quad \| [b_i, e] \|_2 \leq \varepsilon \| e \|_2 \quad \text{から}$$

$$\| a_i (e b_i^* - b_i^* e) e \|_2 \leq \varepsilon \| e \|_2$$

よって

$$| \langle (e a_i e) (e b_i e)^* e, e \rangle_2 - \langle a_i b_i^* e, e \rangle_2 | \leq \varepsilon \| e \|_2^2$$

$$\text{従って,} \quad a_i' = e a_i e, \quad b_i' = e b_i e \quad \text{と置く}$$

$$| \langle \sum_{i=1}^n a_i' b_i'^* e, e \rangle_2 - \langle c e, e \rangle_2 | \leq n \varepsilon \| e \|_2^2$$

$$K = e H \quad \text{と置く.} \quad e \mathcal{L}(H) e = \mathcal{L}(K) \quad \text{に於いて}$$

$$\tau(x) = \langle x e, e \rangle_2 / \langle e, e \rangle_2$$

は canonical trace τ であることの計算から

$$| \tau \left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^* \right) - \varphi_0 \circ \Phi \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i^* \right) | \leq (n+1) \varepsilon$$

$K \otimes K^c$ の isometric involution $J \in$

$$J(\xi \otimes \eta^c) = \eta \otimes \xi^c$$

と定義する. このとき

$$J(x \otimes 1)J = 1 \otimes x^c \quad x \in \mathcal{L}(K)$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in K$ の orthonormal basis として

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_j \xi_j \otimes \xi_j^c \quad \text{とおくと}$$

$$\|\xi\| = 1, \quad ((x \otimes 1)\xi, \xi) = \tau(x)$$

よって J の定義から作用素の行列表示で計算すれば

$$J\xi = \xi, \quad J(x \otimes 1)\xi = (x^* \otimes 1)\xi$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \tau\left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^*\right) &= ((\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^* \otimes 1)\xi, \xi) \\ &= (\sum_{i=1}^n (a_i' \otimes 1)J(b_i' \otimes 1)J\xi, \xi) \\ &= (\sum_{i=1}^n a_i' \otimes b_i'^c \xi, \xi) \end{aligned}$$

一方 $\xi \in H \otimes H^c$ の元と見たときは $(e \otimes e^c)\xi = \xi$ となるから

$$e \otimes e^c \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c \right) e \otimes e^c = \sum_{i=1}^n a_i' \otimes b_i'^c$$

従って

$$\tau\left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^*\right) = (\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c \xi, \xi)$$

$$\therefore |\varphi \circ \Phi(c)| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c \right\|_u + (n+1)\varepsilon$$

ε は n に depend し 得 〃 かゝ Lemma の 結論 が 言 へ た こ と に ち
る。

次の Lemma が Connes [12] に は 全 然 ち か っ た 部 分 で あ る。

Lemma 3.17. 前 の Lemma の 条 件 の 下 で

$$\|\Phi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*)\| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha$$

(証明) 左 辺 の 方 が 大 き 〃 と し、右 辺 を β と す べ く と

$\exists z$: central projection, 複素数 λ ; $|\lambda| > \beta$

$$\|z\Phi(c) - \lambda z\| < \frac{1}{2}(|\lambda| - \beta)$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}(|\lambda| - \beta)$ と し て Lemma 3.16 を R_z に あ て は め る
と

$\exists \varphi$: normal state on R_z ; $|\varphi(z\Phi(c))| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i z \otimes (b_i z)^c\|_\alpha + \varepsilon$

こ の と き 上 の 不 等 式 の 右 辺 は

$$\|(z \otimes z^c) \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha + \varepsilon$$

$$\leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha + \varepsilon = \frac{1}{2}(|\lambda| + \beta)$$

一 方

$$|\varphi(z\Phi(c)) - \lambda| \leq \|z\Phi(c) - \lambda z\| < \frac{1}{2}(|\lambda| - \beta)$$

か ら $|\varphi(z\Phi(c))| > \frac{1}{2}(|\lambda| + \beta)$

と ち 〃 て あ る 式 に 矛 盾 する。

Lemma 3.18 R が finite と injective von Neumann 環 ち 〃

ば性質 (A) をもつ。

(証明) R の各 direct summand が injective となることは、 R が injective となることは同値だから R の center が faithful な normal state φ をもつことを示せばよい。 Φ を center valued trace とし $\varphi \circ \Phi$ を φ でかくことにする (R の normal state) きの Lemma から $\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in R$ には

$$|\varphi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*)| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha$$

$R \in \pi_\varphi(R)$ と同一視し、 $\xi \in \pi_\varphi$ による cyclic separating vector とする。 J をこれに関する canonical involution とする、 ξ は trace vector であるから

$$J\xi\xi = \xi^*\xi$$

よって $x^c \longleftrightarrow x \longleftrightarrow JxJ$ となるので R^c と R' とは同型になっている。 $\varphi(x) = (x\xi, \xi)$ から

$$|(\sum_{i=1}^n a_i Jb_i J\xi, \xi)| = |\varphi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*)| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes Jb_i J\|_\alpha$$

よって $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R, y_1, y_2, \dots, y_n \in R'$ には

$$|((\sum_{i=1}^n x_i y_i)\xi, \xi)| \leq \|\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\|_\alpha$$

従って functional $\phi(x) = (\eta(x)\xi, \xi)$ は $R \otimes R'$ 上で α -norm に拘りて連続である。 よって $\phi \in R \otimes R'$ 上で拡大したものを ϕ とかく (state になっている)

$\forall x, y \in R \otimes R'$ について

$$\begin{aligned} \|\gamma(x)\gamma(y)\|^2 &= \phi(y^*x^*xy) \leq \|x\|_\alpha^2 \phi(y^*y) \\ &= \|x\|_\alpha^2 \|\gamma(y)\|^2 \end{aligned}$$

$[\gamma(R \otimes R')] = H$ であるから、よから

$$\|\gamma(x)\| \leq \|x\|_\alpha$$

ゆえ γ は α -ノルムで連続である。

以上から finite と von Neumann 環について injective と semidiscrete が同値になる。I型の von Neumann 環はあにのべたように injective であつ semidiscrete でもあるから、テンソル積の結果から semifinite と von Neumann 環について injective と semidiscrete と同値 (A) とは同値になることがわかる。(テンソル積について、 $R \otimes S$ が injective ならば R と S は又 injective である — slice map を使えばよい)

最後に III型の von Neumann 環についての証明には竹崎[33]の duality を用いる。 M を H 上の von Neumann 環とする。又 $u(t)$ を実数 R の H 上への強連続ユニタリ表現とし、更に $u(t)Mu(-t) \subseteq M$ ($t \in R$) と仮定するものとする。今 $\alpha_t(x) = u(t)xu(-t)$ とおけば $t \rightarrow \alpha_t$ は M の one parameter * 同型群として R の表現である $K(H, R) \in R$ 上の compact support を有する H -valued 連続関数の空間でノルムを

$$\|\xi\|_2 = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \|\xi(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$$

とつけたものとす。

$\mathbb{R}$ 上の complex valued 連続関数で compact support をもつものの全体を $K(\mathbb{R})$ とかく。 $K(H, \mathbb{R})$ は自然な形で $H \otimes L^2(\mathbb{R})$ の dense な部分空間と考えることが出来る。 任意の $K(H, \mathbb{R})$ の関数 ξ に対して $t \rightarrow U(-t)\xi(t)$ は又 $K(H, \mathbb{R})$ の関数としてもいえるから、

$$\exists U : H \otimes L^2(\mathbb{R}) \text{ のユニタリ作用素 ; } (U\xi)(t) = u(-t)\xi(t) \\ (\xi \in K(H, \mathbb{R}))$$

よって $x \in M$ に対して $\pi_\alpha(x) = U(x \otimes 1)U^*$ とかく。

$\forall \xi \in K(H, \mathbb{R})$ に対しては

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(t) = u(-t)xu(t)\xi(t) = \alpha_{-t}(x)\xi(t)$$

次に $H \otimes L^2(\mathbb{R})$ のユニタリ $\lambda(t)$ を

$$(\lambda(t)\xi)(s) = \xi(s-t) \quad (\xi \in K(H, \mathbb{R}))$$

と定義する。 すると $H \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上の von Neumann 環

$$R(M, \alpha) = \{ \pi_\alpha(M), \lambda(\mathbb{R}) \}''$$

が action α による M の crossed product である。

$y \in M'$ に対して $\pi'_\alpha(y) = y \otimes 1$ とかく。

$$\pi'_\alpha(M') \subseteq R(M, \alpha)' \quad ((\pi'_\alpha(y)\xi)(t) = y\xi(t) \quad \xi \in K(H, \mathbb{R}))$$

である。 よって又ユニタリ作用素 $\mu(t)$ を $\xi \in K(H, \mathbb{R})$ に対して

$$(\mu(t)\xi)(s) = e^{-ist}\xi(s)$$

と定義する. このとき $t \rightarrow \mu(t)$ は強連続な R のユニタリ表現であり, つくろわかる

$$\mu(t) \pi_\alpha(x) \mu(-t) = \pi_\alpha(x), \quad \mu(t) \lambda(s) \mu(-t) = e^{-is t} \lambda(s)$$

よって

$$\mu(t) R(M, \alpha) \mu(-t) = R(M, \alpha)$$

で $\hat{\alpha}_t(x) = \mu(t) x \mu(-t)$ は $R(M, \alpha)$ の $*$ 同型写像である. $\hat{\alpha}$ は R の $R(M, \alpha)$ への dual action とする. 以下の証明では竹崎の duality: $R(R(M, \alpha), \hat{\alpha}) \cong M \bar{\otimes} L(L^2(k))$ と $R(M, \alpha)$ から $\pi_\alpha(M)$ への 1 の projection が常に存在するといふことが本質的である. あとのことは定数群 R の amenability と $\pi_\alpha(M)$ が dual action $\hat{\alpha}$ の fixed point algebra であることに起因している.

Lemma 3.19 M は H 上の III 型の von Neumann 環とする. M が injective ならば性質 (A) 成立

(証明) Duality から $R(R(M, \alpha), \hat{\alpha}) \cong M \bar{\otimes} L(L^2(k)) \cong M$ であるが更にこのとき [53; 定理 8.2] から action d は $R(M, \alpha)$ が semifinite に与えるように選ぶことが出来る. M が injective とすると $R(R(M, \alpha), \hat{\alpha})$ は injective である. 従って

$\pi_\alpha(R(M, \alpha))$ が injective になり, $R(M, \alpha)$ が injective であることがわかる. 従ってこのことから $R(M, \alpha)$ は性質

値(A)をもつ。即ち $a_i \in R(M, \alpha)$, $b_i \in R(M, \alpha)'$ なる

$$\left\| \sum_i a_i b_i \right\| \leq \left\| \sum_i a_i \otimes b_i \right\|_\alpha$$

よって特に $x_i \in M$, $y_i \in M'$ なる

$$\left\| \sum_i \pi_\alpha(x_i) \pi'_\alpha(y_i) \right\| \leq \left\| \sum_i \pi_\alpha(x_i) \otimes \pi'_\alpha(y_i) \right\|_\alpha$$

$$= \left\| \sum_i x_i \otimes y_i \right\|_\alpha$$

ここで $\xi \in H$, $f \in K(R)$ にとると

$$\left\| \sum_i \pi_\alpha(x_i) \pi'_\alpha(y_i) (\xi \otimes f) \right\|^2 = \int_R \left\| \sum_i \alpha_{-t}(x_i) y_i \xi \right\|^2 |f(t)|^2 dt$$

$$\leq \left\| \sum_i \pi_\alpha(x_i) \pi'_\alpha(y_i) \right\|^2 \|\xi\|^2 \|f\|_2^2$$

$$\leq \left\| \sum_i x_i \otimes y_i \right\|_\alpha^2 \|\xi\|^2 \|f\|_2^2$$

ここで $t \rightarrow \sum_i \alpha_{-t}(x_i) y_i \xi$ は連続な H -valued 関数で
 $f \in K(R)$ は任意であるから上のことから

$$\left\| \sum_i \alpha_{-t}(x_i) y_i \xi \right\| \leq \left\| \sum_i x_i \otimes y_i \right\|_\alpha \|\xi\| \quad (t \in R)$$

よって

$t=0$ として ξ を動かせば

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_i x_i \otimes y_i \right\|_\alpha$$

即ち M は値(A)をもつ。

求める同値性は von Neumann 環の各 direct summand なる
 こととだけ十分であるからこれで定理の証明が終ることに
 なる。

主 要 文 献

[12], [13], [24], [46], [55]

§4. Completely positive map による approximation property. C^* 環の場合.

前節の定理による C^* 環の nuclear 性と von Neumann 環の近似性値との関係が次のように明らかになる. C^* 環 A についてその enveloping von Neumann 環を $\tilde{A}$ とかく.

定理 4.1 次の同値である

(1) A は nuclear

(2) A^* の単位作用素は有限次の CP-map で各 $\varepsilon > 0$ に対して $1/\varepsilon$ 近似が出来る (1) 以下 i.e. contraction)

(3) $\tilde{A}$ が injective (4) $\tilde{A}$ が semidiscrete

(証明) (4) $\Rightarrow$ (2) $(\tilde{A})_* = A^*$ であるから Lemma 3.10 の前節のべたようにして (2) が成り立つ.

(2) $\Rightarrow$ (1) 任意の任意の C^* 環 B について, B より A^* への CP-contraction map は有限次の CP-contraction map で弱*位相で近似出来る. よって Lemma 3.6 から A は nuclear.

(1) $\Rightarrow$ (3) A の任意の state φ について $\pi_\varphi(A)''$ が injective であることを示せばよい. 従って $\pi_\varphi(A)'$ が injective であることを示せばよい. $\forall C^*$ 環 $B_1 \supset B$ (部分環)

$$\tau: B \longrightarrow \pi_\varphi(A)' \quad \text{CP-map}$$

τ が B_1 上で CP -map として拡大出来ることを示す。先ず B_1 はユニタリで $1_{B_1} = 1_B$ と仮定してあるから、

$$\theta_\varphi \circ \tau : B \longrightarrow \pi_\varphi(A)' \longrightarrow [\varphi] \subset A^*$$

は有限次元 CP -map. よって定理 2.2 から

$$\exists f, \text{ positive linear functional on } A \otimes B; L(f) = \theta_\varphi \circ \tau$$

そこで f は C^* 環 $A \otimes B$ 上の positive functional とみてよく、又仮定から $A \otimes B = A \otimes B \subset A \otimes B_1$

と仮定するから f の $A \otimes B_1$ への positive extension を $\tilde{f}$ とする。
 $0 \leq b \leq 1 \quad b \in B_1$ に対して

$$0 \leq L(\tilde{f})(b) \leq L(\tilde{f})(1) = L(f)(1) = \theta_\varphi \circ \tau(1)$$

から $L(\tilde{f})(b) \in [\varphi]$ 従って $L(\tilde{f})(B_1) \subset [\varphi]$.

これから

$$\tilde{\tau} = \theta_\varphi^{-1} \circ L(\tilde{f}) : B_1 \longrightarrow \pi_\varphi(A)'$$

と仮定すれば、つくり方から $\tilde{\tau}$ は τ の B_1 への CP -extension である。

系 4.1. nuclear C^* 環の quotient algebra は nuclear

上と同様に nuclear C^* 環の ideal も又 (3) から nuclear であることが言えるが、部分環についてはいまのところ成立しないことが Choi, [11] により示されている。

次に approximation property の C^* 環を示すために Lemma

3.6 を精密化するところから始める.

Lemma 4.2 $f \in S^0(A \otimes B)$

$\Rightarrow R(f) (L(f) \text{ によって })$ が 下の type の有限次 CP-contraction で近似出来る

$$\begin{array}{ccc} & M_n & \\ \sigma \nearrow & & \searrow \tau \\ A & \xrightarrow{R(f)} & B^* \end{array} \quad \|\tau \circ \sigma\| \leq 1$$

(上をやる時に上の diagram は pointwise W^* -topology で approximately commute とする)

(証明) $A \in H$ 上に作用し, $B \in K$ 上に作用してゐるとすると $S^0(A \otimes B)$ の f で

$$f = \sum \lambda_i \omega_{\xi_i} \quad \xi_i \in H \otimes K, \quad \|\xi_i\| = 1 \\ \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i \leq 1$$

の形の functional は弱*-dense なるから上の形の f によって $R(f)$ が diagram の map に分解出来ることを示せばよい.
 ようなには先ず分解出来るような map の集合が n を動かしたときに convex cone を作ることを示す.

$$A \xrightarrow{\sigma_i} M_{n_i} \xrightarrow{\tau_i} B^* \quad i=1, 2 \quad \text{によって}$$

$$\sigma: A \longrightarrow M_{n_1+n_2}, \quad \tau: M_{n_1+n_2} \longrightarrow B^* \quad \text{を}$$

$$\sigma(a) = \begin{bmatrix} \sigma_1(a) & 0 \\ 0 & \sigma_2(a) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau} \tau_1(\alpha) + \tau_2(\delta) \in B^*$$

と定める. 定理 2.6 から

$$\sigma_i = \Delta(\varphi_i) \quad \varphi_i \in M_{n_i}(A)^{*+}$$

$$\tau_i = \theta(\psi_i) \quad \psi_i \in M_{n_i}(B)^{*+} \quad \text{とかける.}$$

このとき $M_{n_1+n_2}(A)$ 上の positive functional

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \text{但し}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \varphi \right\rangle = \langle a_1, \varphi_1 \rangle + \langle a_4, \varphi_2 \rangle$$

と $M_{n_1+n_2}(B)$ 上の positive functional

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \psi \right\rangle = \langle b_1, \psi_1 \rangle + \langle b_4, \psi_2 \rangle$$

に $\sigma = \Delta(\varphi)$ と $\tau = \theta(\psi)$

$$\sigma = \Delta(\varphi), \quad \tau = \theta(\psi)$$

とかけるから σ, τ は共に cp-map でつくろえるから

$$\tau_1 \circ \sigma_1 + \tau_2 \circ \sigma_2 = \tau \circ \sigma$$

convexity 上の $\tau_i \circ \sigma_i$ に weight をつけたものである.

これから分解出来る map で $\|\tau \circ \sigma\| \leq 1$ とするものが全体

は convex である. 他の方は明らかに positive cone になる. 以上から結局 $R(\omega_3)$ の分解が出来るはずになる. ここで ω_3 は又 $H \otimes K$ の元と見えてよいから

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^m \xi_i \otimes \eta_i \quad \begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \\ \eta &= (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \end{aligned} \quad \text{と書く}$$

$$\omega_\xi = [\omega_{\xi_j, \xi_i}] \in M_m(A)^{**}$$

$$\omega_\eta = [\omega_{\eta_j, \eta_i}] \in M_m(B)^{**}$$

ここで

$$\sigma = \Delta(\omega_\xi), \quad \tau = \Delta(\omega_\eta) \quad (\text{CP-map}) \quad \text{とる.}$$

$$\langle b, R(\omega_3)(a) \rangle = \omega_3(a \otimes b) = \sum_{i,j} (a \xi_i, \xi_j) (b \eta_i, \eta_j)$$

$$= \langle b, \sum_{i,j} \Delta(\omega_3)(a)_{ij} \omega_{\eta_j, \eta_i} \rangle = \langle b, \theta(\omega_\eta) \circ \Delta(\omega_\xi)(a) \rangle$$

$$= \tau \circ \sigma(a)(b) \quad \text{i.e.} \quad R(\omega_3) = \tau \circ \sigma$$

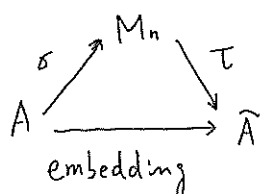
$$\text{又} \quad \|\tau \circ \sigma\| = \|R(\omega_3)\| \leq \|\omega_3\| = 1$$

定理 4.3 C^* 環 A が nuclear であるための必要十分条件は, A の単位作用素が有限次の CP-contraction map で各点 z と 1 の間に近似出来ることである.

(証明) 十分性は定理 2.2 - Lemma 3.6 で示されてゐるから, 必要性のみを示せばよい. 先ず A がユニタルの時を証明する.

次の diagram が approximately commute (point- σ -weak

topology) である。 $\tilde{A}$ が H 上に作用しているとする。



$$\|\tau \circ \sigma\| \leq 1, \sigma(1) = 1$$

$\tilde{A}$ は normal state は皆 vector state であるから、 η は

$$\forall a_1, \dots, a_s \in A, \xi_1, \dots, \xi_t \in H \quad \|\xi_i\| \leq 1 \quad \text{に対して}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma, \tau: \text{上の } \sigma \text{ は } CP\text{-map}$$

$$|((\tau \circ \sigma(a_i) - a_i)\xi_j, \xi_j)| < \varepsilon$$

である。

$$e_j = [\tilde{A}'\xi_j] \text{ の projection } (\in \tilde{A}) \text{ とし}$$

$$e = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} e_j \quad \text{とする。}$$

e は countably decomposable な projection である。よって

[20: 定理 4 の系, p. 223] から eH は separating vector $\xi_0 \in$

をもつ, i.e. $e = p_{[\tilde{A}'\xi_0]}$. $\xi_j \in eH$ であるからここでは

$$b_1, b_2, \dots, b_t \in \tilde{A}' \text{ によって } \sigma, \tau \text{ をとって}$$

$$|((\tau \circ \sigma(a_i) - a_i)b_j\xi_0, b_j\xi_0)| < \varepsilon$$

が言える。 $R = \tilde{A}'e$ とおくと $b_j \in$

R の元とみて差支えない。

$$\varphi = \omega_{\xi_0} \in R_* \quad \text{とし} \quad \eta: A \rightarrow R' \quad \text{を } \eta(a) = eae$$

と定義すると $\pi_\varphi(R)$ は spacial に R と同一視出来るから

$$\theta_\varphi: R' \longrightarrow [\varphi] \subseteq R_*$$

が成り立つ。 A は nuclear であるから Lemma 4.2 からこの diagram は point-weak topology で approximately commute

$$\begin{array}{ccc} & M_n & \\ \sigma \nearrow & & \searrow \tau \\ A & \xrightarrow{\theta_\varphi \circ \gamma} & [\varphi] \subseteq R_* \subset R^* \end{array}$$

又 Lemma の証明からわかるようにこの時の CP-map $\tau \circ \sigma$ は $\tau \circ \sigma(A) \subseteq R_*$ となるようにとれる。従って diagram は point-weak topology で approximately commute. よって γ の convex combination β と τ (同じ型になる) 上の diagram が point-norm topology で approximately commute であることが言える。 $\theta_\varphi \circ \gamma(1) = \varphi$. このとき Lemma 3.10, 3.11 より近似する CP-map β として $\tau \circ \sigma(1) = \varphi$ とおくとよい。 $\beta = \sigma(1)$ とおく。

Proposition 1.10 から

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \text{ CP-map } \sigma' : A \longrightarrow M_n$$

$$\sigma(x) = \beta^{\frac{1}{2}} \sigma'(x) \beta^{\frac{1}{2}}$$

$$\exists \tau' : M_n \longrightarrow R_* \quad \varepsilon$$

$$\tau'(x) = \tau(\beta^{\frac{1}{2}} x \beta^{\frac{1}{2}}) \quad \text{と } \alpha < \varepsilon$$

$$\tau'(1) = \tau \circ \sigma(1) = \varphi \quad \text{だから} \quad \tau' \circ \sigma' = \tau \circ \sigma$$

$$\text{又 } \tau'(M_n) \subseteq [\varphi].$$

従って $\theta_\varphi \circ \gamma$ と $\{\sigma', \tau'\}$ という family が approximately

commute となる。次の diagram を示す

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M_n & & \\
 & \nearrow \sigma' & & \searrow \theta_\varphi^{-1} \circ \tau' & \\
 A & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & \tilde{A}e & \xrightarrow[\text{injection}]{\quad \iota \quad} & \tilde{A}
 \end{array}$$

$$\tau'' = \iota \circ \theta_\varphi^{-1} \circ \tau' \quad \text{となる}$$

$$((\tau'' \circ \sigma'(a_i) - a_i) b_j \zeta_0, b_j \zeta_0)$$

$$= (b_j^* b_j (\theta_\varphi^{-1} \circ \tau' \circ \sigma'(a_i) - \iota(a_i)) \zeta_0, \zeta_0)$$

$$= \langle b_j^* b_j, \tau' \circ \sigma'(a_i) - \theta_\varphi \cdot \iota(a_i) \rangle \longrightarrow 0$$

よって

$$\begin{array}{ccc}
 & M_n & \\
 \nearrow \sigma' & & \searrow \tau'' \\
 A & \xrightarrow[\text{embedding}]{} & \tilde{A}
 \end{array}$$

が成り立つ diagram である。

$$\|\tau'' \circ \sigma'\| = 1$$

$$\text{また } A \xrightarrow{\sigma_\nu} M_n \xrightarrow{\tau_\nu} \tilde{A} \quad \sigma_\nu(1) = 1$$

$$\tau_\nu \circ \sigma_\nu(a) \longrightarrow a \quad \sigma\text{-weakly } (a \in A)$$

となる。定理 2.6 から

$$\exists u_\nu \in M_n(\tilde{A})^+; \theta(u_\nu) = \tau_\nu$$

よって $M_n(A)$ は $M_n(\tilde{A})$ で σ -weakly dense となる

$$\exists u_{\nu\mu} \in M_n(A)^+; u_{\nu\mu} \longrightarrow u_\nu \quad \sigma\text{-weakly}$$

$$\text{よって } \tau_{\nu\mu} = \theta(u_{\nu\mu}); M_n \longrightarrow A$$

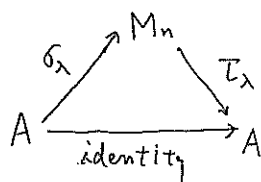
は各点 z と $\|\cdot\|$ σ -weak topology で τ_λ に収束する. 従って

$$\tau_{\nu\mu} \circ \sigma_\nu : A \longrightarrow A$$

は各点 z と $\|\cdot\|$ σ -weakly $\|\cdot\|$ 単位作用素に収束する. しかし

A 上では σ -weak 位相は弱位相と同じなから, 上の CP-map

の convex combination (又同じ型) をとる z と $\|\cdot\|$ diagram



$\sigma_\lambda(1) = 1$, approximately commute
in point-norm topology

このとき $\tau_\lambda(1) = \tau_\lambda \circ \sigma_\lambda(1) \longrightarrow 1$ (ノルム収束)

であるから $\|\tau_\lambda\| = \|\tau_\lambda(1)\| \longrightarrow 1$

よって τ_λ を $\tau_\lambda / \|\tau_\lambda\|$ でとりかえれば求める CP-contraction による近似 diagram が出来る.

A が non-unital のときは, $A + \lambda 1 = A_1$ が nuclear になるから上の結果が求まり, それを A に制限すれば有限次 CP-contraction による単位 (恒等) 作用素の近似が得られる.

上の証明からわかるように得られる近似は単に有限次の CP-contraction というだけでなく上のより分解の出来る map $\tau_\lambda \circ \sigma_\lambda$ でのいうことで中身がより精密になっているわけである. 上の結果の一つの大きな帰結として次のことがある

系 4.3 Nuclear C^* 環は Grothendieck の metrical approximation property をもっている。

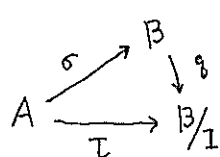
上の逆が最近までは成立つるのではなかったかと思われていたが、Haagerup [31] が non-nuclear C^* 環の典型ともいえるべき 2 の生成元をもつ自由群からの (reduced) C^* 群環が metrical approximation property をもつことを示したので、その性質をもつ C^* 環の class がどんなものになるのか予想もつかないことになってきている。

主 文 献

[15], [24], [46]

あ と が ま

CP-map の話題で本稿から始めてしまつたせゐに *lifting* の話と *Fubini* 種の話がある。CP-map に関する話題の集成としてはこの二つとも追加すべきであらうがこの二つは講義から完全にぬけていたので *lecture note* という原型をあまりこわしたくない気持ちもあつて、ここではこの詳細は割愛することにした。興味をもたれる方のために一応のスケッチをべてみる。 A, B を C^* 環, I を B の *ideal* とする。 A から



B/I への CP-map τ に対して ϕ を B から B/I への quotient map としたとき, A より B への CP-map σ が $\tau = \phi \circ \sigma$

とすることができるかというのが CP-map の *lifting* の問題である。これは元々は positive map の *lifting* の問題として考えられていたが作用素環として本質的なのはやはり CP-map の *lifting* である。この講義では第 3, 4 節を目標とした場合の同様の利用ではなれたが話としては §1 に入るべきものである。

一般の C^* 環についてはこの問題は例えば $B = \ell^\infty$, $I = C_0$

$A = B/I$ としてこの恒等写像を考えるとみればわかるように、可換の場合でも *lifting* の存在は negative であるがある class の (特に可分な) C^* 環についてはこれが存在するかどうかは、たとへば BDF 理論などと深い関係をもっている。実際 Arveson

(4) (cf. [8]) は $\text{Ext}(X)$ の場合について (BDF [7], $A = C_0(X)$
 $B = L(H)$, $I = C(H)$, H 可分ヒルベルト空間の場合) CP -
 map の *lifting* の結果 (この時には可換な場合として positive
 map の *lifting* の結果) を用いて $\text{Ext}(X)$ の元が逆元をもつこ
とに従って $\text{Ext}(X)$ が群になること) を非常に簡単に示して
いる. その後 BDF 理論が更に発展し ([6], [8] etc) 非可換
の C^* 環 について $\text{Ext}(A)$ の構造が問題になってきたが Choi-
Effros [18] は多くの議論の *technique* を用いて可分 nuclear
 C^* 環 A について前述の *diagram* で CP-map の *lifting* が存
在することを証明した. $\text{Ext}(A)$ は Voiculescu [58] によって可分
な C^* 環 については一般に単位元をもつ (可換) semigroup になる
ので, 上の結果により, A が可分 nuclear 環 のときは $\text{Ext}(A)$ は
群になる. 更に Anderson [1] は $\text{Ext}(A)$ が必ずしも群になるこ
とを可分 C^* 環 の例を示し, 合せて可分 C^* 環 について lifting
の問題は一般には *negative* であることも示した (前の ℓ^∞ の
例では ℓ^∞/C は可分 C^* 環 になる). 又これらについて
は Arveson [5] が更に見通しのある商構造を与えている. 一
般の Banach 空間での *lifting* の最近の結果としては多々でも
とりあげた, *metrical approximation property* をもつ可分
空間 については *contractive lifting* の存在が知られている
([19]).

C^* 環の Fubini 積の CP -map としての問題は定理 2.3 (す
Proposition 2.1) の直接の延長上にあるものである。 $A, B \in C^*$
環 C, D のそれぞれ C^* 部分環としたとき

$$F_{C \otimes D}(A, B) = \{x \in C \otimes D \mid R_\varphi(x) \in B, L_\psi(x) \in A \\ \forall \varphi \in C^*, \psi \in D^*\}$$

を $(C \otimes D)$ に因する A, B の Fubini 積と呼ぶ (富山, [48], [49]
[50]). $F_{C \otimes D}(A, B)$ はある場合には $A \otimes B$ に常に等しくなる
が Wassermann [54], [56] によって示されたように一般には
 $A = C(H)$ といふような単純な C^* 環でも $L(H) \otimes L(H)$ の中で
 $F_{L(H) \otimes L(H)}(C(H), L(H))$ は $C(H) \otimes L(H)$ とは等しくなるもの
しかし x が $F_{C \otimes D}(A, B)$ の元の場合には $R_\varphi(x)$ の値は $\varphi|_A$ (φ の A
への制限) によってのみ定まるので $x \in A \otimes B$ の時も系 2.3
の対応 map

$$r(x) \mid \varphi \in A^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in B \quad (\varphi \text{ は } \varphi \text{ の拡大})$$

が成り立つ。 $x \neq 0$ の場合には $r(x)$ は CP -map になる。従って
Fubini 積の問題は A^* より B (又は B^* より A) への有限次 CP -map
のある種の closure の問題を含み、このような map の集合の大き
さとその中で部分空間 $\{r(x) \mid x \in F_{C \otimes D}(A, B)\}$ (特に $\{r(x) \mid$
 $x \in A \otimes B\}$) の性格の問題であるとも言える。 これは入
lifting の問題とも関連をもつ。実際上の $L(H) \otimes L(H)$ にわたる
Wassermann の結果は Calkin algebra $L(H)/C(H)$ の恒等写像

が $\mathcal{L}(H)$ まで持ち上げられること (知られている) 結果の列記を与えている. 更に又 [56] でこの議論は $\text{Ext}(A)$ の反例を与えた [1] のやり議論に負ける所が多い. 一方上述のように CP -map の空間の characterization は直接の関連として (定理 2.3 に与えられたように) von Neumann 環として C^* コンソル積 $R \otimes S$ と (C^* コンソル積 $R \otimes S$ との比較の問題も含んでいる ([50])).

$R \otimes S$ の $\mathcal{L}(H) \otimes \mathcal{L}(K)$ に関する σ -weakly continuous σ -slie map による Fubini 積は trivial になり, このが定理 2.3 の中身であるとも言える (定理 2.3 の on the right の証明参照)

Fubini 積は又その中の特定の場合には nuclearity と深い関係がある ([50]; 定理 4.4 の (i)) ばかりでなく approximation property とも関係が深く, 実際 Banach 空間の C^* コンソル積において E が approximation property をもつことと

$$\forall G \supset E, \forall K \supset F \text{ について}$$

$$F_{G \otimes K}(E, F) = E \otimes F$$

と与えることは同値である ([50]).

このほか §1 に付いては C^* 環ばかりでなくその subspace 上 (又はその向の) CP -map に関する Arveson [2], [3] の研究をみることが出来るものである

最後に C^* 環の injective hull についての注記 [60] にふれておく. Injective な C^* 環は自動的に最低 AW^* 環に

ちてしまふ(43)の一般の C^* 環の category の中では injectivity を考えることが出来る。しかし Banach 空間で事情から推察してもちとちた C^* 環 A のある意味での C^* -envelope として A を含む injective C^* 環の存在が考えられるが次名 [59] はこれを証明したものである。ただ Banach 空間の場合と違って、ここでは A がある injective な C^* 環 B の部分環にちていても A の C^* -injective envelope は B の中に C^* 部分環としては(必ずしも)埋めこまけにはいかず、

しかし B の self-adjoint な subspace としてちる埋めこめることが出来る。これから injectivity の C^* 環への関係について §4 とは別方面での色々を研究が期待される。 A の例えは self-adjoint part の Banach 空間としての injective hull と C^* -injective hull との関係などもいっつである。

文 南大

1. J. Andersen, A C^* -algebra A for which $\text{Ext}(A)$ is not a group, preprint
2. W. B. Arveson, Subalgebras of C^* -algebras, Acta Math. 123 (1969), 141-224
3. ———, ——— II, Acta Math. 128 (1972), 271-308
4. ———, A note on essentially normal operators, Proc. Roy. Irish. Acad. (1974), 143-146
5. ———, Notes on extension of C^* -algebras, Duke Math. J., 44 (1977), 329-356
6. L. G. Brown, Extensions and the structure of C^* -algebras, Symposia Math. 20 (1975), 539-566
7. L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras, Lecture Note in Math. 345 (1973), 58-128. Springer
8. ———, Extensions of C^* -algebras and K -homology, Ann. Math., 105 (1977), 265-324
9. M. D. Choi, Positive linear maps on C^* -algebras,

Can. J. Math. 24 (1972), 520-529

10. M. D. Choi, A Schwartz inequality for positive linear maps on C^* -algebras, Illinois J. Math. 18 (1974), 565-574
11. ———, A simple C^* -algebra generated by two finite order isometries, preprint
12. A. Connes, Classification of injective factors, Ann. of Math. 104 (1976), 73-115
13. ———, On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms, Symposia Math. 20 (1975), 435-478
14. M. D. Choi and E. G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Functional Anal. 24 (1977), 156-209
15. ———, Nuclear C^* -algebras and the approximation property, Amer. J. Math. 12掲載の予証
16. ———, Separable nuclear C^* -algebras and injectivity, Duke Math. J. 43 (1976), 301-322
17. ———, Nuclear C^* -algebras and injectivity; The general case, preprint
18. ———, The completely positive lifting problem, Ann. of Math. 104 (1976), 585-609
19. ———, Lifting problem and the cohomology

of C^* -algebras, preprint

- 20 J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2nd ed. Paris, 1969.
- 21 E. G. Effros, Approximation problems for C^* -algebras, preprint
22. ———, Injectives and tensor products for convex sets and C^* -algebras, Lecture Note at NATO Institute at the Univ. College of Swansea, Wales 1972.
23. ———, Aspects of noncommutative order, 才2回田示セエ十一講演記録, Los Angeles, 1977.
- 24 E. G. Effros and E. C. Lance, Tensor products of operator algebras, Advances in Math. 25(1977), 1-34
- 25 T. Furuya, Remarks on the slice map problems for C^* -algebras, preprint
- 26 D. B. Goodner, Projections in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 69(1950), 89-108
- 27 E. P. Greenleaf, Invariant means on topological groups, von Nostrand 1969
- 28 A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16(1955)
- 29 M. Hasumi, The extension property of complex Banach

- spaces, Tôhoku Math. J., 10(1958), 135-142
30. U. Haagerup, The standard form of von Neumann algebras, Math. Scand. 37(1975), 271-283
31. ———, An example of a non nuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property, preprint
32. J. Hakeda and J. Tomiyama, On some extension property of von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 19(1967), 315-323
33. J. L. Kelley, Banach spaces with the extension property, Trans. Amer. Math. Soc., 72(1952), 323-326
34. L. Nachbin, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 68(1950), 28-46
35. E. C. Lance, On nuclear C^* -algebras, J. Functional Anal., 12(1973), 157-176
36. ———, Tensor products of non-unital C^* -algebras, J. London Math. Soc., 12(1976), 166-168
37. T. Okayasu, Some cross norms which are not uniformly cross, Proc. Japan Acad., 46(1970), 57-59
38. ——— and M. Takesaki, Dual spaces of tensor products of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 18(1966), 332-337
39. T. Okayasu, On the tensor products of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 18(1966), 325-331

- 40 R. T. Powers and E. Størmer, Free states of the canonical anticommutation relations, Comm. Math. Phys., 16 (1970), 1-33
- 41 S. Sakai, C^* -algebras and W^* -algebras, Springer 1971.
- 42 W. F. Stinespring, Positive functions on C^* -algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 211-216
- 43 J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^* -algebras, Proc. Japan Acad. 33 (1957), 608-612
- 44 ———, On the product projection of norm one in the direct product of operator algebras, Tohoku Math. J., 11 (1959), 305-313
- 45 ———, On the tensor products of von Neumann algebras, Pacific J. Math., 30 (1969), 263-270
- 46 ———, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture note, Univ. of Copenhagen (1970)
- 47 ———, Applications of Fubini mappings to tensor products of Banach algebras, seminar, Univ. of Copenhagen (1970)
- 48 ———, Tensor products and approximation problems of C^* -algebras, Publ. Research Inst. for Math. Sci. Kyoto Univ., 11 (1975), 163-183

49. J. Tomizama, Fubini algebras and the commutation theorem for tensor products of C^* -algebras, Symposia Math. 20 (1976), 27-37
50. ———, Some aspects of the commutation theorem for tensor products of operator algebras, Proc. of International Colloquium on "Algebras of operators and their applications to mathematical physics", Marseille 1977.
51. M. Takesaki, A note on the cross norm of the direct product of operator algebras, Kodai Sem. Rept. (Math.) 10 (1958), 137-140
52. ———, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture note in Math. 128, Springer
53. ———, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. 131 (1973), 249-310
54. J. Wansermann, On tensor products of certain group C^* -algebras, J. Functional Anal. 23 (1976), 239-254
55. ———, Injective W^* -algebras, preprint
56. ———, A pathology in the ideal space of $L(H) \otimes L(H)$, preprint
57. P. Enflo; A counterexample to the approximation

- problem in Banach spaces, *Acta Math.* 130 (1973), 309-317
58. D. Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, *Rev. Roum. Math.*, 21 (1976), 95-113
- 59 M. Hamana, Injective envelopes of C^* -algebras,
J. Math. Soc. of Japan に掲載予定
- 60 ———, Injective envelopes of operator systems,
preprint

