

CLIFFORD 数による SCHWARZ 微分の一般化

奈良女子大学理学部 和田 昌昭 (MASAAKI WADA)

Lars V. Ahlfors をしのんで

この原稿は、[3] を日本語訳したものである。ここでは、 n 次元ユークリッド空間から自分自身への C^3 級局所写像に対して Schwarz 微分を拡張する試みを紹介する。

そのような試みとしては、[1] において Ahlfors が cross-ratio の $\mathbb{R}^n$ への一般化との関連で定義したものが知られている。その論文で Ahlfors は、古典的 Schwarz 微分の実部と虚部を別々に、いくぶん違った仕方で拡張している。実は、これら 2 つの Schwarz 微分の $\mathbb{R}^n$ への拡張は、Clifford 数を用いることにより統一的にとりあつかうことができる。ここではそのようにして、Clifford 数に値をもち、Ahlfors の Schwarz 微分を含むような Schwarz 微分の一般理論を展開する。

最初に Clifford 数と Möbius 変換との関係および高次微分に関する準備をした後、Schwarz 微分を定義する。主定理は Möbius 変換と Schwarz 微分の関係を示す公式である。その後 Schwarz 導関数を定義し、Möbius 変換に対して恒等的に 0 になることを示す。最後に低次元の場合の例をあげる。

1. Clifford 数と Möbius 変換.

ここでは Clifford 数と Möbius 変換について、後で必要になることがらを手短かに述べる。詳しくは [2] を参照のこと。

Clifford 代数 Cl_n は基本関係式

$$\begin{cases} i_j^2 = -1 & (j = 1, \dots, n) \\ i_j i_k = -i_k i_j & (j, k = 1, \dots, n, j \neq k) \end{cases}$$

をみたす n 個の元 $i_1, \dots, i_n$ によって生成される実結合的代数である。 Cl_n の元を Clifford 数と呼ぶ。任意の Clifford 数は生成元の積

$$I = i_{j_1} \cdots i_{j_r} \quad (j_1 < \cdots < j_r)$$

の一次結合として一意的に

$$a = \sum a_I I$$

と表わすことができる。このとき a のノルムは

$$|a|^2 = \sum a_I^2$$

によって定義される。

上記の積 I のうち異なる r 個の生成元の積になっているもの全部によって張られる Cl_n の部分ベクトル空間を $Cl_n^{(r)}$ で表わすことにする. するとベクトル空間としての直和分解

$$Cl_n = \bigoplus_{r=0}^n Cl_n^{(r)}$$

が得られるが、それにしたがって任意の Clifford 数 a は一意的に

$$a = a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(n)}$$

と書かれる. このとき成分 $a^{(r)} \in Cl_n^{(r)}$ を a の r -部と呼ぶことにする. 部分空間 $Cl_n^{(0)}$ は自然に $\mathbb{R}$ と同一視することができ、したがって 0-部のことを実部とも呼ぶ. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を $Cl_n^{(1)}$ と同一視することにより、 $\mathbb{R}^n$ のベクトルを常に Clifford 数であるとみなす. とくに、以下ではベクトルどうしの積は常に Clifford 数としての積であるものとする. ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対しては $v^2 = -|v|^2$ が成り立つ.

0 でないベクトル全体により生成される Cl_n の乗法群を Clifford 群と呼び、 Γ_n で表わす. Cl_n の反自己同型でベクトルを不変に保つものがただ一つ存在するが、それを $a \mapsto a^*$ で表わす. Clifford 群の元 $a \in \Gamma_n$ に対しては $aa^* = a^*a \in \mathbb{R}$ であり、したがって a の逆元は $a^{-1} = (1/aa^*)a^*$ と表わすことができる.

ベクトル $u \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、 $v \mapsto uvu$ ($v \in \mathbb{R}^n$) によって定まる $\mathbb{R}^n$ の変換は、 u に直交する超平面に関しての面对称と原点を中心とした $|u|^2$ 倍変換との合成である. よって $a \in \Gamma_n$ に対して $v \mapsto ava^*$ ($v \in \mathbb{R}^n$) で与えられる $\mathbb{R}^n$ の変換は、いくつかの面对称とスカラー倍変換との合成、つまり原点を保つ $\mathbb{R}^n$ の相似変換である.

Clifford 数係数の 2×2 行列

$$(1-1) \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で次の条件を満たすものを Clifford 行列と呼ぶ:

- (1) $a, b, c, d \in \Gamma_n \cup \{0\}$,
- (2) $ab^*, cd^*, a^*c, b^*d \in \mathbb{R}^n$,
- (3) $ad^* - bc^* = d^*a - b^*c = 1$.

ここでは次の事実が最も重要である: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ の任意の Möbius 変換は、向きを保つ保たないにかかわらず、Clifford 行列を用いて

$$g(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$$

と表わされる.

2. 高次微分.

一般に滑らかな多様体 X に対して X 内の滑らかな道の $0 \in \mathbb{R}$ における芽全体の集合を $\#X$ と表わすことにする. すなわち $\#X$ は X 内の滑らかな道

$$x: \mathbb{R} \longrightarrow X$$

全体からなり、2つの滑らかな道は $0 \in \mathbb{R}$ の十分小さな近傍上で一致するときに $\#X$ の同じ元を表わすものとする. 以下では道のパラメータとして常に文字 t を用いることにする. $t = 0$ における値を評価することにより射影

$$b: \#X \longrightarrow X, \quad b(x) = x(0) \quad (x \in \#X)$$

が定義される.

滑らかな写像

$$f: X \longrightarrow Y$$

に対しては、写像の合成により、自然な拡張

$$\#f: \#X \longrightarrow \#Y, \quad \#f(x) = f \circ x \quad (x \in \#X)$$

が存在する. 混同を起こしやすくするために、この拡張 $\#f$ を単に f と省略する.

さて、 X が有限次元ベクトル空間 V の開集合である場合を考えよう. パラメータ t に関する微分演算を

$$\#d: \#X \longrightarrow \#V, \quad \#dx = \frac{dx}{dt} \quad (x \in \#X)$$

と書くことにする. このとき $x \in \#X$ の r -階微分を

$$d^r x = \flat(\#d^r x) = \left. \frac{d^r x}{dt^r} \right|_{t=0} \in V$$

によって定義する. 再び記号の乱用により、 $\#d^r$ と d^r の両方を単に d^r と書くことにする. いずれにせよ d は線形作用素である.

補題. $x, y \in \#Cl_n$ に対し、次が成り立つ.

- (1) $d(xy) = dx y + x dy$
- (2) $d(x^{-1}) = -x^{-1} dx x^{-1}$

証明. Clifford 数の積演算は双線形なので、明らかに(1)が成り立つ. $xx^{-1} = 1$ の両辺の“ d ”をとり、(1)を適用すれば容易に(2)が得られる.

3. Schwarz 微分.

$x \in \#\mathbb{R}^n$ に対して Schwarz 微分 s^3x および s^2x を

$$s^3x = d^3x - \frac{3}{2} d^2x dx^{-1} d^2x \in \mathbb{R}^n$$

$$s^2x = s^3x dx^{-1} = d^3x dx^{-1} - \frac{3}{2} (d^2x dx^{-1})^2 \in Cl_n^{(0)} \oplus Cl_n^{(2)}$$

によって定義する.

定理 1. Möbius 変換 g が Clifford 行列 (1-1) によって与えられているものとする. このとき $x \in \#\mathbb{R}^n$ が g によって

$$y = g(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1} \in \#\mathbb{R}^n$$

に写されているとすれば、次がなりたつ.

- (1) $dy = (cx + d)^{* -1} dx (cx + d)^{-1}$,
- (2) $s^3y = (cx + d)^{* -1} s^3x (cx + d)^{-1}$,
- (3) $s^2y = (cx + d)^{* -1} s^2x (cx + d)^*$.

証明. $c = 0$ の場合の計算は容易なので読者の練習問題とする. 以下 $c \neq 0$ と仮定しよう. まず,

$$y(cx + d) = ax + b$$

に補題を適用して

$$dy(cx + d) + yc dx = a dx$$

を得る. 両辺に左から $(cx + d)^*$ を掛ければ,

$$\begin{aligned} (cx + d)^* dy(cx + d) &= (xc^* + d^*) a dx - (ax + b)^* c dx \\ &= (x(c^* a - a^* c) + (d^* a - b^* c)) dx \end{aligned}$$

となるが, $c^* a = (a^* c)^* = a^* c$ および $d^* a - b^* c = 1$ であるから, (1) が成り立つ.

次に進む前に $c^{-1}d$ がベクトルであることに注意しよう. 実際, $w = (1/d^* d)cd^* \in \mathbb{R}^n$ とおくと, $wd = c$ となり, $c^{-1}d = (1/cc^*)c^*d = (1/cc^*)d^*wd \in \mathbb{R}^n$ がベクトルであることがわかる.

そこでベクトル $c^{-1}d$ を v と書くことにしよう. すると(1) は

$$dy = c^{*-1}(x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} c^{-1}$$

となり, 補題によって

$$\begin{aligned} d^2y &= -2c^{*-1}(x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} c^{-1} \\ &\quad + c^{*-1}(x + v)^{-1} d^2x (x + v)^{-1} c^{-1} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} d^3y &= 6c^{*-1}(x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} c^{-1} \\ &\quad - 3c^{*-1}(x + v)^{-1} d^2x (x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} c^{-1} \\ &\quad - 3c^{*-1}(x + v)^{-1} dx (x + v)^{-1} d^2x (x + v)^{-1} c^{-1} \\ &\quad + c^{*-1}(x + v)^{-1} d^3x (x + v)^{-1} c^{-1} \end{aligned}$$

が得られる. あとはただ計算を進めれば,

$$s^3y = c^{*-1}(x + v)^{-1} s^3x (x + v)^{-1} c^{-1}$$

となる. 最後に, (3) は言うまでもなく(1) と(2) の自明な帰結である.

$cx + d \in \Gamma_n$ であることに注意すれば, [2] の Proposition と Lemma より次がわかる.

系 2. Schwarz 微分の実部 $(s^2x)^{(0)}$ および 2-部のノルム $|(s^2x)^{(2)}|$ は Möbius 変換によって不変に保たれる.

4. Schwarz 導関数.

f は $\mathbb{R}^n$ から自分自身への C^3 級の局所写像とし、 $x \in \mathbb{R}^n$ が f により

$$y = f(x) = \sum_i \mathbf{i}_i f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (x = \sum_j x_j \mathbf{i}_j \in \mathbb{R}^n)$$

に写されているものとしよう。このとき

$$dy = D_1(x, dx)$$

$$d^2y = D_2(x, dx, d^2x)$$

$$d^3y = D_3(x, dx, d^2x, d^3x)$$

と書かれる。ただし D_1, D_2, D_3 は次のように定義される変数 r_j, u_j, v_j, w_j ($j = 1, \dots, n$) の式である。

$$D_1(r, u) = \sum_i \mathbf{i}_i \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r) u_j,$$

$$D_2(r, u, v) = \sum_i \mathbf{i}_i \left(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(r) u_j u_k + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r) v_j \right),$$

$$D_3(r, u, v, w) = \sum_i \mathbf{i}_i \left(\sum_{j,k,l} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(r) u_j u_k u_l + 3 \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(r) v_j u_k + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r) w_j \right).$$

そこで、形式的な式 $\tilde{S}^3 f$ および $\tilde{S}^2 f$ を

$$\tilde{S}^3 f(r, u, v, w) = D_3 - \frac{3}{2} D_2 D_1^{-1} D_2$$

$$\tilde{S}^2 f(r, u, v, w) = D_3 D_1^{-1} - \frac{3}{2} (D_2 D_1^{-1})^2$$

と定義する。したがって

$$s^3 y = \tilde{S}^3 f(x, dx, d^2x, d^3x)$$

$$s^2 y = \tilde{S}^2 f(x, dx, d^2x, d^3x)$$

となっている。

定義. $\mathbb{R}^n$ における C^3 級の局所変換 f に対して、Schwarz 導関数 $S^3 f$ および $S^2 f$ を

$$S^3 f(x, dx, d^2x) = \tilde{S}^3 f(x, dx, d^2x, \frac{3}{2} d^2x dx^{-1} d^2x)$$

$$S^2 f(x, dx, d^2x) = \tilde{S}^2 f(x, dx, d^2x, \frac{3}{2} d^2x dx^{-1} d^2x)$$

と定義する。

ここで、Ahlfors が[1] において定義した Schwarz 導関数の一般化は、上の $S^2 f$ を用いれば、 $S^2 f(x, dx, 0)$ の実部および 2-部に対応することを注意しておく。

系 3. f は $\mathbb{R}^n$ における C^3 級の局所変換、 g は Möbius 変換であるとする。 g が Clifford 行列 (1-1) で与えられているとすれば、

$$\begin{aligned} S^3(g \circ f)(x, dx, d^2x) &= (cf(x) + d)^{* -1} S^3f(x, dx, d^2x) (cf(x) + d)^{-1} \\ S^2(g \circ f)(x, dx, d^2x) &= (cf(x) + d)^{* -1} S^2f(x, dx, d^2x) (cf(x) + d)^* \end{aligned}$$

が成り立つ。

これは、定理 1 の直接の帰結である。 Möbius 変換の Schwarz 導関数については次がなりたつ。

系 4. f が Möbius 変換ならば $S^3f \equiv S^2f \equiv 0$ 。

証明. 任意に与えられたベクトル $r, u, v \in \mathbb{R}^n$ ($u \neq 0$) に対して道 $x \in \# \mathbb{R}^n$ を

$$x(t) = r + tu + \frac{t^2}{2}v + \frac{t^3}{4}vu^{-1}v$$

によって定義する。したがって $dx = u$, $d^2x = v$, $d^3x = (3/2)vu^{-1}v$ となり、 $s^3x = 0$ が成り立つ。ここで、Möbius 変換 f によって x が $y = f(x)$ に写されているとすると、定理 1 より $s^3y = s^2y = 0$ である。つまり $u \neq 0$ を満たす任意のベクトル $r, u, v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$S^3f(r, u, v) = S^2f(r, u, v) = 0$$

がなりたつ。

系 4 の逆もなりたつと期待される。

予想. $\mathbb{R}^n$ の C^3 級の局所変換 f がある開集合上の各点 r において $S^3f(r, u, v) \equiv 0$ を満たすならば、 f は局所的には Möbius 変換である。

5. 低次元における例。

複素解析的関数の場合の考察から始めよう。まず複素数体を対応 $1 \leftrightarrow i_1$, $i \leftrightarrow i_2$ によって $Cl_2^{(1)}$ と同一視する。したがって複素解析的関数 f は $Cl_2^{(1)}$ の変換とみなすことになる。その場合複素数の積は $Cl_2^{(1)}$ においては

$$(u, v) \mapsto u i_1^{-1} v \quad (u, v \in Cl_2^{(1)})$$

という演算に対応することに注意する。

$$y = f(x), \quad (x, y \in \# Cl_2^{(1)})$$

とすれば

$$dy = f'(x) i_1^{-1} dx$$

となる。ここで f' は複素関数 f の導関数を $Cl_2^{(1)}$ の変換とみなしたものである。同様に

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x) (i_1^{-1} dx)^2 + f'(x) i_1^{-1} d^2x \\ d^3y &= f'''(x) (i_1^{-1} dx)^3 + 3 f''(x) i_1^{-1} d^2x i_1^{-1} dx + f'(x) i_1^{-1} d^3x \end{aligned}$$

が得られ、ベクトル $u, v, w \in Cl_2^{(1)}$ に対して $uvw = wvu$ となることを用いてさらに計算を続ければ、

$$s^3 y = \left(f'''(x) - \frac{3}{2} f''(x) f'(x)^{-1} f''(x) \right) (\mathbf{i}_1^{-1} dx)^3 + f'(x) \mathbf{i}_1^{-1} (d^3 x - \frac{3}{2} d^2 x dx^{-1} d^2 x)$$

$$s^2 y = \left(f'''(x) f'(x)^{-1} - \frac{3}{2} (f''(x) f'(x)^{-1})^2 \right) (dx \mathbf{i}_1^{-1})^2 + d^3 x dx^{-1} - \frac{3}{2} (d^2 x dx^{-1})^2$$

となる。Schwarz 導関数は

(5-1)

$$S^3 f(x, dx, d^2 x) = \left(f'''(x) - \frac{3}{2} f''(x) f'(x)^{-1} f''(x) \right) (\mathbf{i}_1^{-1} dx)^3$$

(5-2)

$$S^2 f(x, dx, d^2 x) = \left(f'''(x) f'(x)^{-1} - \frac{3}{2} (f''(x) f'(x)^{-1})^2 \right) (dx \mathbf{i}_1^{-1})^2$$

となる。この場合には Schwarz 導関数は 2 階微分 $d^2 x$ によらない量である。ベクトル $v \in Cl_2^{(1)}$ の複素数の積に関する逆元が $\mathbf{i}_1 v^{-1} \mathbf{i}_1$ であることに注意すれば、 f の古典的な意味での Schwarz 導関数 $Sf(x) \in Cl_2^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} Sf(x) &= f'''(x) \mathbf{i}_1^{-1} (\mathbf{i}_1 f'(x)^{-1} \mathbf{i}_1) - \frac{3}{2} f''(x) \mathbf{i}_1^{-1} (\mathbf{i}_1 f'(x)^{-1} \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1^{-1} f''(x) \mathbf{i}_1^{-1} (\mathbf{i}_1 f'(x)^{-1} \mathbf{i}_1) \\ &= \left(f'''(x) f'(x)^{-1} - \frac{3}{2} (f''(x) f'(x)^{-1})^2 \right) \mathbf{i}_1 \end{aligned}$$

で与えられることを指摘しておこう。

一変数実数値関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で C^3 級の場合の計算も上と同様になる。公式 (5-1) と (5-2) もそのままの形で成り立つ。

平面 $\mathbb{R}^2$ における任意の C^3 級の変換の場合には、Schwarz 導関数 $S^3 f(x, dx, d^2 x)$ および $S^2 f(x, dx, d^2 x)$ はもはや dx だけではなく $d^2 x$ も含んだ複雑な式になる。ただしこの場合次がなりたつ。

系 5. f が $\mathbb{R}^2$ における C^3 級の局所変換で、 g が向きを保つ $\mathbb{R}^2$ の Möbius 変換ならば

$$S^2(g \circ f)(x, dx, d^2 x) = S^2 f(x, dx, d^2 x).$$

証明. Möbius 変換 g は Clifford 行列 (1-1) によって与えられているものとする。 g が向きを保つのは

$$cx + d \in Cl_2^{(\text{ev})} \equiv Cl_2^{(0)} \oplus Cl_2^{(2)} \quad (x \in Cl_2^{(1)})$$

となっている場合である。ここで $Cl_2^{(\text{ev})}$ は Cl_2 の可換な部分代数なので、

$$S^2 f(x, dx, d^2 x) \in Cl_2^{(\text{ev})}$$

に注意すれば、系 3 によって、

$$\begin{aligned} S^2(g \circ f)(x, dx, d^2 x) &= (cf(x) + d)^{* -1} S^2 f(x, dx, d^2 x) (cf(x) + d)^* \\ &= S^2 f(x, dx, d^2 x) \end{aligned}$$

となる。

REFERENCES

1. L. V. Ahlfors, *Cross-ratios and Schwarzian derivatives in $\mathbb{R}^n$* , Complex Analysis: articles dedicated to Albert Pfluger on the occasion of his 80th birthday (J. Hersch and A. Huber, eds.), Birkhäuser Verlag, Basel, 1988, pp. 1–15.
2. M. Wada, *Conjugacy invariants of Möbius transformations*, Complex Variables **15** (1990), 125–133.
3. ———, *A generalization of the Schwarzian via Clifford numbers*, preprint.

〒630 奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部情報科学科

E-mail address: wada@ics.nara-wu.ac.jp