

## 多人数資産処分問題の game 解について

### (A game solution for a multi-person selling assets problem)

千葉大学 理学部 中神潤一 (Jun-ichi NAKAGAMI)

#### 1. Introduction

多数の player が、それぞれの資産を売却しようと考えている。それぞれの資産価格は、各期の確率変数で観測される。もし、ある期に複数の player が同時に売却しようとする、売却希望の人数に応じて各自の資産価格が変動する。(例えば、資産を合併することにより資産価格が上がる場合と、競争相手がいることにより資産価格が下がる場合が考えられる。)

本稿では、上記の問題意識を 2 人非ゼロ和 game の停止問題で定式化し、解 (平衡点) の存在と性質を調べるものである。

player を  $i, j (i \neq j; i, j = 1, 2)$  とする (player の数が多くても同様の定式化は可能である)。確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の 4 次元確率変数列  $\{((X_n^i, Y_n^i), (X_n^j, Y_n^j)); n = 1, 2, \dots\}$  は各期 ( $n$  について) 独立とする。 $(X_n^i, Y_n^i)$  と  $(X_n^j, Y_n^j)$  は互いに独立とする。 $E[X_n^i] < \infty, E[Y_n^i] < \infty (i = 1, 2)$  とする。 $c^i (i = 1, 2)$  は定数で player  $i$  の 1 期当りの観測費用とする。

この確率変数列と費用に対して、次の停止問題を考える。

(a)  $n$  期において player  $i, j$  が同時に stop すれば、 $i$  は  $Y_n^i - nc^i$ 、 $j$  は  $Y_n^j - nc^j$  をもらい、観測を停止する。

(b)  $n$  期において player  $i$  が stop で、player  $j$  が continue ならば、 $i$  は  $X_n^i - nc^i$  をもらい、観測を停止する。 $j$  は  $n+1$  期以後、process  $\{X_{n+k}^j; k = 1, 2, \dots\}$  に対して 1 人で停止問題を行なう。i.e.,  $j$  は  $m$  期 ( $m > n$ ) で stop すれば、 $X_m^j - mc^j$  をもらい、観測を停止する。

(c)  $n$  期において player  $i, j$  が共に continue ならば、 $i, j$  は  $n+1$  期以後も同じ process  $\{((X_{n+k}^i, Y_{n+k}^i), (X_{n+k}^j, Y_{n+k}^j)); k = 1, 2, \dots\}$  に対して 2 人で停止問題を行なう。

ここでは、上記の停止問題を非 0 和・非協力 game として扱うので、player  $i$  は自分の資産価格  $(X_n^i, Y_n^i)$  だけを各期に観測して、stop か continue の決定を下すものと仮定する。i.e., player  $i$  の停止戦略 (stopping strategy) を表現する停止領域 (stopping region) を  $S_n^i (\subset R^2)$  とする。これは確率変数  $(X_n^i, Y_n^i)$  の実現値が領域  $S_n^i$  に入れば stop で、入らなければ continue であることを示す。ここで  $S_n^i \in \sigma(X_n^i, Y_n^i)$  である。また、 $(X_n^i, Y_n^i)$  と  $(X_n^j, Y_n^j)$  は独立と仮定したので、 $S_n^i$  と  $S_n^j$  も互いに独立になる。

注:  $X_n^i$  と  $Y_n^i$  は独立でなくてよい。例えば、 $Y_n^i = \varphi_n^i(X_n^i, \xi_n^i)$ 、但し  $\varphi_n^i(\epsilon) \mathcal{B}_2, \xi_n^i$  は  $(X_n^j, Y_n^j)$  と独立な確率変数としてよい。

以後、記号の便利のため期の番号  $n$  を逆にする。i.e., 期間  $n$  は あと  $n$  回 process を観測できることを示す。

## 2. 1 期間問題の定式化

確率変数  $((X_1^i, Y_1^i), (X_1^j, Y_1^j))$  と与えられた定数  $((I_0^i, J_0^i), (I_0^j, J_0^j))$  に対して、次の様に 1 期間資産処分問題を定義する。

(a) 1 期において player  $i, j$  が同時に stop すれば、 $i$  は  $Y_1^i - c^i$ 、 $j$  は  $Y_1^j - c^j$  をもらい、終了する。

(b) 1 期において player  $i$  が stop で、player  $j$  が continue ならば、 $i$  は  $X_1^i - c^i$ 、 $j$  は  $I_0^j - c^j$  をもらい、終了する。

(c) 1 期において player  $i, j$  が共に continue ならば、 $i$  は  $J_0^i - c^i$ 、 $j$  は  $J_0^j - c^j$  をもらい、終了する。

player  $(i, j)$  の停止領域  $(S_1^i, S_1^j)$  に対して、player  $i$  の 1 期の期待利得  $M_1^i$  が次式で定義される。但し、 $\bar{A}$  は  $A$  の補集合、 $E[X; A] \doteq \int_A x \mu_X(dx)$ 、 $\mu_X$  は  $X$  の確率法則とする。

$$(1) \quad M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) = E[Y_1^i - c^i; S_1^i S_1^j] \\ + E[X_1^i - c^i; S_1^i \bar{S}_1^j] + E[I_0^i - c^i; \bar{S}_1^i S_1^j] + E[J_0^i - c^i; \bar{S}_1^i \bar{S}_1^j].$$

$S_1^i$  と  $S_1^j$  が独立なことより、(1) 式は次の表現 (2) になる。

$$(2) \quad M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) = \\ E[P(S_1^j)(Y_1^i - I_0^i) + P(\bar{S}_1^j)(X_1^i - J_0^i); S_1^i] + I_0^i P(S_1^j) + J_0^i P(\bar{S}_1^j) - c^i.$$

(2) 式を見ると、player  $i$  の利得は 相手  $j$  の stop する確率  $P(S_1^j)$  だけに依存することが分る。 $p_1^j \doteq P(S_1^j)$ ,  $\bar{p}_1^j \doteq P(\bar{S}_1^j) = 1 - p_1^j$  とおく。

もし、player  $i$  が 相手  $j$  の stop する確率  $p_1^j$  を知っているならば、 $i$  は停止領域  $S_1^i$  を次式 (3) の  $*S_1^i$  とするのが、 $i$  の利得を最大にする。

$$(3) \quad *S_1^i(p_1^j) \doteq \{(x, y); \bar{p}_1^j(x - J_0^i) + p_1^j(y - I_0^i) > 0\},$$

$$(4) \quad \partial^* S_1^i(p_1^j) \doteq \{(x, y); \bar{p}_1^j(x - J_0^i) + p_1^j(y - I_0^i) = 0\}.$$

注： $i$  の利得を最大にする停止領域を (3) 式の内部  $*S_1^i$  で定義したが、(4) 式の境界  $\partial^* S_1^i(p_1^j)$  をこれに含めてもよい。

注：(3) 式の内部  $*S_1^i(p_1^j)$  は  $p_1^j$  の値で決る開半平面である。(4) 式の境界  $\partial^* S_1^i(p_1^j)$  は  $xy$ -座標の直線で、点  $(J_0^i, I_0^i)$  を中心として、 $p_1^j$  の値が 0 から 1 まで動くとき、縦方向から横方向まで反時計回りに 90 度回転する。

$j$  の stop する確率が  $p_1^j$  のとき、 $i$  の停止領域  $*S_1^j$  が定まる。従って、 $i$  の stop する確率  $*p_1^i$  を  $p_1^j$  の関数として次式 (5) で定義できる。

$$(5) \quad *p_1^i(p_1^j) \doteq P(*S_1^i(p_1^j)).$$

注：確率変数  $(X_1^i, Y_1^i)$  は高々可算個の不連続部分を持つので、関数 (5) の不連続点は高々可算個である。また右側及び左側極限值  $*p_1^i(p_1^j \pm 0)$  は次式 (6) を満足する。

$$(6) \quad P(*S_1^i(p_1^j)) \leq *p_1^i(p_1^j \pm 0) \leq P(cl^*S_1^i(p_1^j)) = P(*S_1^i(p_1^j)) + P(\partial^*S_1^i(p_1^j)).$$

関数 (5) の不連続点を結んで、連続な graph を作る。この graph において、変数  $p_1^j$  で示した集合値関数を新たに  $*p_1^i(p_1^j)$  と定義する (これを (5') とおく)。すると、(5') 式の関数は変数  $p_1^j (0 \leq p_1^j \leq 1)$  の集合値関数として連続になる。

(5') の graph 上の任意の点  $(p_1^i, p_1^j)$  に対して、相手  $j$  の stop する確率が  $p_1^j$  であることを知って、自分の stop する確率が  $p_1^i$  となる、player  $i$  の最適停止戦略を次の定義 1. より唯一定めることができる。

定義 1.

case(i) : (5) の関数の連続点  $(p_1^i, p_1^j)$  において、player  $i$  は

$$(7) \quad \begin{aligned} &\text{確率 1 で stop する if } (x, y) \in \text{内部}^*S_1^i(p_1^j), \\ &\quad \text{with } p_1^i = P(*S_1^i(p_1^j)). \end{aligned}$$

case(ii) : (5) の関数の不連続点を結んだ線分上の点  $(p_1^i, p_1^j)$  において、player  $i$  は

$$(8) \quad \begin{aligned} &\text{確率 1 で stop する if } (x, y) \in \text{内部}^*S_1^i(p_1^j) \\ &\text{and 確率 } \alpha_1^i(p_1^j) \text{ で stop する if } (x, y) \in \text{境界} \partial^*S_1^i(p_1^j), \\ &\text{where } \alpha_1^i(p_1^j) = \frac{p_1^i - P(*S_1^i(p_1^j))}{P(\partial^*S_1^i(p_1^j))}, \quad 0 \leq \alpha_1^i(p_1^j) \leq 1, \\ &\text{with } p_1^i = P(*S_1^i(p_1^j)) + \alpha_1^i(p_1^j)P(\partial^*S_1^i(p_1^j)). \end{aligned}$$

注：この定義 1 の (7)(8) 式で定まる拡張された停止領域を  $*S_1^i(p_1^j)$  と新たに定義する。このとき、停止確率は  $p_1^i$  となる。

注：境界上で stop する確率を  $\alpha_1^i$  とすることにより、全体としての stop する確率を指定された  $p_1^i = P(*S_1^i(p_1^j)) + \alpha_1^i(p_1^j)P(\partial^*S_1^i(p_1^j))$  にすることができる。この考え方は仮説検定における Neyman-Pearson の補題と同じものである。

注：player  $j$  についても定義 1 で同様に最適停止領域  $*S_1^j(p_1^i)$  を定義できる。以後、両 player  $(i, j)$  の停止領域  $(*S_1^i(p_1^j), *S_1^j(p_1^i))$  等は拡張したものをを用いる。

### 3. 1 期間問題の平衡点 (equilibrium point)

この節では、1 期間問題における両 player  $(i, j)$  の平衡停止戦略を求める。

定理 1. (角谷の不動点定理：例えば [1] p.129 を参照)

$K$  を  $R^n$  上の compact 集合とする。 $K(K)$  を  $K$  の空でない閉凸集合の族とする。このとき、写像  $f: K \rightarrow K(K)$  が上半連続ならば、不動点  $*p \in K$  such that  $*p \in f(*p)$  が存在する。

(5') 式で定義された写像  $(*p_1^i(p_1^j), *p_1^j(p_1^i))$  は  $R^n$  の compact 集合  $[0, 1] \times [0, 1]$  からこの中への写像として、上半連続である (集合値関数としては連続)。角谷の定理を使えば、次の方程式 (9) の不動点が存在する。

$$(9) \quad *p_1^i(p_1^j) = p_1^i, \quad *p_1^j(p_1^i) = p_1^j.$$

方程式 (9) の不動点を  $(*p_1^i, *p_1^j)$  とする。すると、この不動点を player  $(i, j)$  の停止確率とする拡張された停止領域  $(*S_1^i(p_1^j), *S_1^j(p_1^i))$  が (7) (8) 式より定まる。従って、以後 player  $(i, j)$  の停止戦略を不動点である停止確率  $(*p_1^i, *p_1^j)$  で表現することもある。

1 期間問題のまとめとして、次の補題 2 つを証明なしで述べる。

補題 1. 1 期間問題  $(M_1^i, M_1^j)$  ((2) 式で与えられる) を考える。

任意に与えられた定数  $(I_0^i, J_0^i) i = 1, 2$ , に対して、(9) 式で定まる停止戦略  $(*p_1^i, *p_1^j)$  は平衡点である。i.e., for  $\forall S_1^i \in B_1$ ,

$$(10) \quad M_1^i((S_1^i, *p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \geq M_1^i((S_1^i, *p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \quad (i = 1, 2).$$

補題 2. for  $\forall$  given  $(S_1^i, S_1^j) \in B_1 \times B_1$ ,

$$(11) \quad M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \text{ は } (I_0^i, J_0^i) \text{ の非減少関数である。}$$

#### 4. n 期間問題

この節では、n 期間問題における両 player  $(i, j)$  の平衡停止政策を求める。

定義 2. 数列  $\{I_n^i; i = 1, 2, n = 0, 1, 2, \dots\}$  の定義。

$$(12) \quad I_0^i = E[X_0^i] - c^i, \quad I_n^i = E[X_0^i - I_{n-1}^i] + I_{n-1}^i - c^i.$$

注：(12) 式は player  $i$  が 1 人で確率変数列  $\{X_n^i\}$  に対して停止問題をするときの最適解を示すものである。i.e., n 期の最適停止領域は  $\{x; X_n^i > I_{n-1}^i\}$  で、n 期の期待利得は  $I_n^i$  (reward with Individual stop) となる。

player  $i$  の任意の n 期の停止戦略  $S_n^i (1 = 1, 2, n = 1, 2, \dots)$  に対して、player  $i$  の停止政策 (stopping policy) (停止戦略の列)  $S^i$  を次式 (13) で定義する。

$$(13) \quad S^i = \{S_1^i, \dots, S_n^i, \dots\} \quad (i = 1, 2).$$

player  $(i, j)$  の任意の停止政策  $(S^i, S^j)$  に対して、player  $i$  の期待利得  $M_n^i (i = 1, 2, n = 1, 2, \dots)$  を次式で定義する。

$$(14) \quad \begin{aligned} M_n^i((S_n^i, S_n^j), (I_{n-1}^i, M_{n-1}^i)) \\ = E[P(S_n^j)(Y_n^i - I_{n-1}^i) + P(\bar{S}_n^j)(X_n^i - M_{n-1}^i); S_n^i] \\ + I_{n-1}^i P(S_n^j) + M_{n-1}^i P(\bar{S}_n^j) - c^i, \\ \text{where } M_0^i = J_0^i = E[Y_0^i] - c^i. \end{aligned}$$

これにより 数列  $\{M_n^i(S_n^i, S_n^j)\}$  が逐次に定義できる。

**定義 3.** 数列  $\{(*p_n^i, *p_n^j); n = 1, 2, \dots\}$  と数列  $\{J_n^i; n = 0, 1, 2, \dots\}$  の定義。

$I_0^i = E[X_0^i] - c^i, J_0^i = M_0^i = E[Y_0^i] - c^i, (i = 1, 2)$  であるので、 $(I_0^i, J_0^i) (i = 1, 2)$  を用いた方程式 (9) で不動点  $(*p_1^i, *p_1^j)$  を 1 つ定める。この不動点を用いて、次式 (15) より  $J_1^i (i = 1, 2)$  を求める。以下、順次に  $(*p_n^i, *p_n^j)$  と  $(J_n^i, J_n^j)$  を求めていく。

$$(15) \quad \begin{aligned} J_1^i &= M_1^i((*p_1^i, *p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \\ &= E[*p_1^j(Y_1^i - I_0^i) + *p_1^j(X_1^i - J_0^i)]^+ + *p_1^j I_0^i + *p_1^j J_0^i - c^i. \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} J_n^i &= M_n^i((*p_n^i, *p_n^j), (I_{n-1}^i, J_{n-1}^i)) \\ &= E[*p_n^j(Y_n^i - I_{n-1}^i) + *p_n^j(X_n^i - J_{n-1}^i)]^+ + *p_n^j I_{n-1}^i + *p_n^j J_{n-1}^i - c^i. \end{aligned}$$

$n$  期間問題のまとめとして、次の定理を証明なしで述べる。

**定理 1.**  $n$  期間問題  $(M_n^i, M_n^j)$  ((14) 式で与えられる) を考える。

(9) 式及び (16) 式で定まる停止政策  $(*p^i, *p^j)$  は平衡点である。但し、 $*p^i = \{*p_n^i; n = 1, 2, \dots\}$   $*p^j = \{*p_n^j; n = 1, 2, \dots\}$ 。 i.e.,

任意の停止政策  $S^i$  defined by (13) に対して、

$$(17) \quad \begin{aligned} J_n^i &= M_n^i((*p_n^i, *p_n^j), (I_{n-1}^i, J_{n-1}^i)) \\ &\geq M_n^i((S_n^i, *p_1^j), (I_{n-1}^i, M_{n-1}^i)) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

注：(15)(16) 式は、player  $(i, j)$  が 2 人で確率変数列  $\{(X_n^i, Y_n^i), (X_n^j, Y_n^j)\}$  に対して平衡政策  $(*p^i, *p^j)$  を行なったとき、player  $i$  の  $n$  期の平衡期待利得  $J_n^i$  (reward with Jointly stop) を示す。

注：(9) 式で定めた不動点は unique でない。従って、平衡点である停止政策  $(^*p^i, ^*p^j)$  は無数に存在する。次の 5 節でこれが unique になる具体的例題を解いて見る。

## 5. 無限期間問題 省略

## 6. 例題 (example)

この節での例題は (9) 式で定めた不動点が unique になるものを考えてみる。

### 例題の仮定

(a) player  $i$  と  $j$  は同一分布と同一費用をもつとする (player の区別をしない)。i.e.,

$$X_n^i =^L X_n^j =^L X_n, Y_n^i =^L Y_n^j =^L Y_n, c^i = c^j = c.$$

但し、 $X =^L Y$  は確率変数  $X$  と  $Y$  が同一の分布関数をもつことを示す。この仮定 (a) があると (9) の方程式が player  $i$  と  $j$  で同じになる。

(b) 各期 ( $n$  について) 同一分布とする。i.e.,

$$X_n =^L X_{n-1} =^L X, Y_n =^L Y_{n-1} =^L Y.$$

(c)  $Y = aX (a \in [0, \infty))$  とする。

この仮定 (c) があると (3)(3') で定まる停止領域が半平面 (2 次元) でなく半直線 (1 次元) になる。i.e., 確率変数  $X$  がある値より大きくなれば stop することになる。

$a$  の値について、次の 2 つの分類が考えられる。

( $0 \leq a < 1$ ) 競走相手がいることで自分の資産価値が下がる場合  $\Rightarrow J_n \leq I_n$  がいえる。

( $1 \leq a < \infty$ ) 相手と資産を合併し自分の資産価値が上がる場合  $\Rightarrow J_n \geq I_n$  がいえる。

(d) 確率変数  $X$  は区間  $(0, 1)$  の一様分布に従う。 $c = 0$  とする。

一般に、確率変数  $(X, Y)$  が Lebesgue 測度に対して密度をもてば、停止領域  $^*S_n^i$  は  $P(\partial^*S_n^i) = 0$  となり、定義 1 の case(ii) の場合だけになる。また、 $X$  が有界ならば、 $c = 0$  でも無限期間問題を考えることができる。

以上の仮定の下で、player  $(i, j)$  が同じ政策になる不動点を見つけることにする。

### 例題の解

(3) の  $^*S$  の定義 :  $\bar{p}(x - J) + p(y - I) > 0$  に仮定 (c) の  $y = ax$  を代入する。

$$^*S = \{x > (pI + \bar{p}J)/(\bar{p} + pa) \doteq ^*x\}.$$

仮定 (d) の一様分布を代入し、(9) の不動点  $^*p$  を求める。

$$^*p = P(X > ^*x) = 1 - ^*x.$$

$$(18) \quad {}^* \bar{p} = ({}^* p I + {}^* \bar{p} J) / ({}^* \bar{p} + {}^* p a) .$$

(18) の右辺は、 ${}^* \bar{p}$  の値が 1 から 0 まで動くとき、 $J(< 1)$  から  $I/a(> 0)$  まで変化する。従って、区間  $(0, 1)$  の根は奇数個になる。また、(18) は  ${}^* p$  の 2 次方程式なので、 ${}^* p$  の区間  $(0, 1)$  の根は唯一存在することが保証される。

(18) に  $I = I_0 = 1/2$ ,  $J = I_0 = 1/2$  を代入して、2 次方程式から  ${}^* p_1$  を計算する。次式より 1 期の停止領域  ${}^* S_1$  と期待利得  $J_1$  が得られる。

$${}^* S_1 = \{x > 1 - {}^* p_1\} .$$

$$(19) \quad J_1 = E[{}^* p(aX - 1/2) + {}^* \bar{p}(X - 1/2)]^+ + 1/2 .$$

上で得られた  $J = J_1$  と (12) 式より得られる  $I = I_1$  を (18) 代入して  ${}^* p_2$  を求め、これを (19) に代入して、2 期の期待利得  $J_2$  を得る。以下同様にして、 ${}^* p_n$ ,  $J_n$  を計算していく。

#### 参考文献

[1] Store, J. and C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer-Verlag, Berlin, (1970).