

The stability of positively expansive open maps

筑波大数学系 平出耕一 (Koichi Hiraide)

(X, d) はコンパクト距離空間とし, $f: X \rightarrow X$ は X への連続写像とする. f が正拡大的 (positively expansive) であるとは, 定数 $c > 0$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $d(f^i(x), f^i(y)) \leq c$ ($i \geq 0$) ならば $x = y$ となることをいう. ここで c は f の拡大定数と呼ばれる. 正拡大性の概念は X の距離の取り方に依存しない (拡大定数は変わるかもしれないが), また位相共役に関して不変である. X が閉位相多様体のとき, 正拡大的写像 $X \rightarrow X$ は開写像である. しかし一般には正拡大的写像が開写像になるとは限らない. 次のことが知られている.

“正拡大的写像 $f: X \rightarrow X$ が開写像であるための必要十分条件は f が POTP をもつことである”

このことから, 正拡大の開写像はある種の安定性をもつことが予想される. このノートでは, 安定性に関連する次の問題を考える.

Q. 正拡大的開写像 $f: X \rightarrow X$ が与えられたとき, f に十分近い正拡大的開写像 $g: X \rightarrow X$ は f と位相共役か?

以下では次の3つの場合に上の問題に対する部分解を与える.

- A. X は閉位相多様体
- B. X はコンパクト連結局所連結距離空間
- C. X はコンパクト連結距離空間

Case A. この場合, $\delta > 0$ を十分小さくとると, 2つの連続写像 $f, g: X \rightarrow X$ に対し

$$* \quad d(f, g) = \max \{d(f(x), g(x)) : x \in X\} < \delta$$

ならば, f と g はホモトピックである. ホモトピックな2つの正拡大的写像は位相共役であるから, 問題Qは, $*$ の距離に関して肯定的に解ける.

Case B. この場合は, さらに X が弱局所単連結である場合とそうでない場合に分かれる. X が弱局所単連結の場合, 正拡大的開写像 $X \rightarrow X$ が存在すれば, X は閉位相多様体でなければならない ([5]). したがって X は弱局所単連結でないとしてよい. そのような X 上の正拡大的開写像の例は, 複素力学系の理論の中に見い出せる ([2]):

(例) $P: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $P(z) = z^2 - 1$ とする. P のジュリア集合を J とおく. そのとき $P^{-1}(J) = J = P(J)$ で $P|_J: J \rightarrow J$ は正拡大的開写像である. さらに J は連結かつ局所連結であるが, 弱局所単連結でない.

問題 Q に対する一つの答えとして, 次の成り立つ.

定理 1. X はコンパクト連結局所連結距離空間で, $f: X \rightarrow X$ は正拡大的開写像とする. そのとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して, 正拡大的開写像 $g: X \rightarrow X$ が

$$(1) \quad d(f, g) < \delta$$

$$(2) \quad \deg f = \deg g$$

を満たすならば, 同相写像 $h: X \rightarrow X$ が (一意的に) 存在して $d(h, id) < \varepsilon$, $f \circ h = h \circ g$ となる. ここで $\deg f$, $\deg g$ はそれぞれ f , g の被覆度である.

$f: X \rightarrow X$ が ε -locally expansive ($\varepsilon > 0$) であるとは, $0 < d(x, y) < \varepsilon$ ならば $d(f(x), f(y)) > d(x, y)$ となるときをいう. この概念は距離 d に依存することに注意する. ε -locally expansive な写像 $f: X \rightarrow X$ は拡大定数 $\varepsilon/2$ をもつ正拡大的写像である. 定理 1 より次が得られる.

系. (X, d) はコンパクト連結局所連結距離空間とし, $f_i: X \rightarrow X$ ($i=0, 1, 2, \dots$) は ε -locally expansive な開写像とする. f_i が f_0 に一様収束するならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N > 0$ が存在して $i \geq N$ に対して同相写像 $h_i: X \rightarrow X$ が (一意的に) 存在して $d(h_i, \text{id}) < \varepsilon$, $f_0 \circ h = h \circ f_i$ となる.

これは Hu-Rosen ([6]) の結果—不動点の安定性—, Sakai ([7]) の結果—周期点の安定性—を含んでいる.

Case C. X は局所連結でないとする. 先ず, そのような X 上の拡大的開写像の例を上げる ([1]):

(例) $\mathbb{Z} \subsetneq \tilde{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{Q}$, $2\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneq \tilde{\mathbb{Q}}$ となる部分群 $\tilde{\mathbb{Q}}$ をとる. S_1 を $\tilde{\mathbb{Q}}$ の双対とする. そのとき S_1 は局所連結でないコンパクト連結距離空間 (ソレノイダル群) である. さらに 1 対 1 連続写像 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow S_1$ と図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{x \mapsto 2x} & \mathbb{R} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ S_1 & \xrightarrow{f} & S_1 \end{array}$$

を可換にする $f: S_1 \rightarrow S_1$ が存在する. このとき f は正拡大的開写像である.

問題 Q に対して次が成り立つ.

定理 2. X はコンパクト連結距離空間とする. $f: X \rightarrow X$ は正拡大的開写像とする. そのとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して, 正拡大的写像 $g: X \rightarrow X$ が

$$(1) \max \{d(f, g), \max_{x \in X} H(f^{-1}(x), g^{-1}(x))\} < \delta$$

$$(2) \deg f = \deg g$$

を満たせば, 被覆写像 $h: X \rightarrow X$ が (一意的に) 存在して $d(h, id) < \varepsilon$, $f \circ h = h \circ g$ となる. ここで $H(\cdot, \cdot)$ はハウスドルフの距離である.

上の定理で, h は同相写像にできないことに注意する.

References

- [1] N. Aoki, Expanding maps of Solenoids, Mh. Math., 105(1988), 1-34.
- [2] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc., 11(1984), 85-141.
- [3] E.M. Coven and W.L. Reddy, Positively expansive maps of compact manifolds, Lecture Notes in Math., 819, Springer, 1980, 96-110.

- [4] K. Hiraide, Positively expansive maps and growth of fundamental groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 104(1988), 934-941.
- [5] _____, Positively expansive open maps of Peano spaces, preprint.
- [6] T. Hu and H. Rosen, Locally contractive and expansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 86(1982), 656-662.
- [7] K. Sakai, Periodic points of positively expansive maps, *Proc. Amer. Math. Soc.* 94(1985), 531-534.