

Bordism Algebra of Involutions

阪大 理 内田伏一

§ 1. 序

$\mathcal{N}_*$ を unoriented Thom bordism ring, $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ を fixed point free smooth involutions の作る unoriented bordism 群とする。 $[S^n, a]$ を n 次元球面上の antipodal involution の bordism 類とすると、 $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ は $\{[S^n, a]\}_{n \geq 0}$ を基とする $\mathcal{N}_*$ 上の自由加群であることが知られている ([2], 定理 23.2)。

$T_1: M_1 \rightarrow M_1$ 及び $T_2: M_2 \rightarrow M_2$ を fixed point free smooth involutions とするとき, $T_1 \times T_2, T_1 \times 1, 1 \times T_2$ は互いに可換な $M_1 \times M_2$ 上の fixed point free smooth involutions であり, $T_1 \times 1$ 及び $1 \times T_2$ は orbit 多様体 $M_1 \times M_2 / T_1 \times T_2$ 上の同一の fixed point free smooth involution $\overline{T_1 \times 1} = \overline{1 \times T_2}$ を与える。そこで, 積を

$$[M_1, T_1][M_2, T_2] = [M_1 \times M_2 / T_1 \times T_2, \overline{T_1 \times 1}]$$

によって定義すれば, $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ は $\mathcal{N}_*$ -algebra になる。本稿では $\mathcal{N}_*$ -algebra $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ の構造について解説する。

J. C. Sullivan [6] は *trivialism* 特性数の考察によって、幸運にも次の定理を得ることが出来た。

定理 1 (J. C. Sullivan). $\mathcal{R}_*(\mathbb{Z}_2)$ は $\mathcal{R}_*$ -algebra として exterior algebra になる。即ち、 $x_n = [S^{2^n}a] + [p^{2^n}][S^0a]$ として

$$\mathcal{R}_*(\mathbb{Z}_2) \cong \bigwedge_{n=0}^{\infty} (x_n)_{n=0}^{\infty}$$

しかし、 $\mathcal{R}_*$ -module としての基 $\{[S^k a]\}_{k \geq 0}$ を個々に $\{x_n\}$ を用いて表現することには成功していない。従って Smith 準同型写像等と積の関係については不明のままであった。

そこで我々は $\mathcal{R}_*$ -module としての基 $\{[S^k a]\}_{k \geq 0}$ の間の積を、この基を用いて表すことを試みる。鎌田氏 [3] が $L_*(B\mathbb{Z}/n)$ の積構造を考察した際に Mischenko 列を用いた方法を Boardman [1] による $\mathcal{R}^*(B\mathbb{C}/n)$ における primitive な元 P_W を用いて再現することによって次の定理を得る。

定理 2. $\alpha_k(m, n) \in \mathcal{R}_k$ を次式で与える。

$$[S^m a][S^n a] = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(m, n) [S^k a]$$

このとき、

$$(a) \quad \exists z_i \in \mathcal{R}_i : z_0 = 1, z_i = 0 \quad (i / (i+1 = 2, 4, 8, 16, 32, \dots)) \text{ s.t.}$$

$$\sum_{i \geq 1} z_{i-1} \alpha_{k+i}(m, n) = \sum_{i \geq 1} z_{i-1} (\alpha_k(m-1, n) + \alpha_k(m, n-1)) \quad \text{for } \forall k, m, n$$

$$(b) \quad \alpha_{m+n}(m, n) = \binom{m+n}{m} \pmod{2}$$

$$(c) \quad \alpha_0(m, n) = [P^m][P^n] + \sum_{k \geq 1} \alpha_k(m, n) \cdot [P^k].$$

$$(d) \quad [H_{m,n}] = \sum_{k \geq 1} \alpha_k(m, n) \cdot [P^{k-1}]$$

ここへ $K, p = \min(m, n)$ とおくと

$$H_{m,n} = \{ (x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n) \in P^m \times P^n : x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_p y_p = 0 \}.$$

等式 (a) は次のように行列表示出来る。

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{m+n-1} \\ & z_0 & z_1 & \dots & z_{m+n-2} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & z_0 & \dots & z_{m+n-k} \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(m, n) \\ \alpha_2(m, n) \\ \vdots \\ \alpha_k(m, n) \\ \vdots \\ \alpha_{m+n}(m, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i \geq 1} z_{i-1} (\alpha_0(m-i, n) + \alpha_0(m, n-i)) \\ \vdots \\ \sum_{i \geq 1} z_{i-1} (\alpha_{k-1}(m-i, n) + \alpha_{k-1}(m, n-i)) \\ \vdots \\ \alpha_{m+n-1}(m-1, n) + \alpha_{m+n-1}(m, n-1) \end{pmatrix}.$$

従って, m, n についての帰納法により, 各 $\alpha_k(m, n)$ は z_k 及び $[P^i]$ によって決定出来るが, 更に差

$$\binom{m+n}{m} z_{m+n-1} - [H_{m,n}]$$

は $z_0, z_1, \dots, z_{m+n-2}$ 及び $[P^2], \dots, [P^{m+n-1}]$ に関する多項式として表わし得ることが分る。即ち, 各 z_k は $[P^k], [H_{m,n}]$ によって表わし得る。これに関して, 例えば

$$z_{2k} = [P^{2k}], \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

であることが示されている [7]。

§2. 周辺の状態

前記定理の証明に入る前に、周辺の状態について知られて
いることを列挙しておこう。一般に compact Lie 群 G に対
して、bordism 群 $\mathcal{R}_*(G)$, $\Omega_*(G)$, $L_*(G)$ 等が定義され ([2],
§19 以降) 種々研究されているが、特に G が可換であれば、
 $\mathcal{R}_*(\mathbb{Z}_2)$ の場合と同様に積構造をもつ。これについて

$$(i) \quad \mathcal{R}_*(\mathbb{Z}_2) \cong \bigwedge \mathcal{R}_*(\chi_n)_{n=0}^{\infty}, \quad \chi_n = [S^{2^n}, a] + [p^{2^n}] [S^0, a], \quad [S^0, a] = 1.$$

$$(ii) \quad \mathcal{R}_*(\mathbb{Z}_k) \cong \mathcal{R}_* \quad (k: \text{odd}), \quad [Z_k, Z_k] = 1.$$

$$(iii) \quad \mathcal{R}_*(S^1) \cong \bigwedge \mathcal{R}_*(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}, \quad \gamma_n = [S^{2^{n+1}}, \mu] + [cp^{2^n}] [S^1, \mu], \quad [S^1, \mu] = 1$$

$$\text{但し, } \mu: S^1 \times S^{2k+1} \rightarrow S^{2k+1}, \quad \mu(\lambda, (z_0, \dots, z_k)) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_k).$$

$$(iv) \quad L_*(\mathbb{Z}_k), (k: \text{自然数}): L_*\text{-module with generators}$$

$$[Z_k, Z_k] = 1, [S^1, T_k], [S^3, T_k], \dots, [S^{2^{n+1}}, T_k], \dots; [S^{2^{n+1}}, T_k][S^{2^{n+1}}, T_k] = 0.$$

$$\text{但し, } T_k(z_0, \dots, z_n) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n), \quad \lambda = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}}.$$

$$(v) \quad L_*(S^1): \text{free } L_*\text{-module with basis}$$

$$[S^1, \mu] = 1, [S^3, \mu], \dots, [S^{2^{n+1}}, \mu], \dots$$

(a) 素数 p に対して, $L_*(S^1) \otimes \mathbb{Z}_p$ の $L_* \otimes \mathbb{Z}_p$ -algebra として q
simple system of generators を求められている [3].

$$(b) \quad L_*(S^1) \otimes \mathbb{Q} \cong L_* \otimes \mathbb{Q}[x], \quad x = [S^3, \mu].$$

ここに, (ii), (iv) は bordism spectral 列により積の自明な分り, L_* -

module の構造は [4], [5] によって研究されている。 (iii) は, (i) を求めた J.C. Su の方法, 即ち bordism 特性数による。 (iv) の (a), (b) は更に Mischenko 引を用いた鎌田氏の方法 [3] による。 更に, (iv), (v) に当る $\Omega_*(G)$ については, 生成元が $L_*(G)$ の場合と同じであることによって, $L_*(G)$ より直接に求められる。

§ 3. Bordism algebra $\mathcal{R}_*(BO(1))$

fixed point free involution $T: M \rightarrow M$ に対し, double covering $M \rightarrow M/T$ に associate した M/T 上の line bundle を対応させることによって, $\mathcal{R}_*$ -module としての同型

$$\mathcal{R}_*(\mathbb{Z}_2) \cong \mathcal{R}_*(BO(1))$$

を得ることが出来て, $[S^n, a]$ には $P^n = S^n/a$ 上の canonical line bundle ξ_n の類 $[\xi_n]$ が対応している。 更に, line bundles の bordism 群 $\mathcal{R}_*(BO(1))$ は external tensor 積によって, $\mathcal{R}_*$ -algebra となるが, 上の対応は $\mathcal{R}_*$ -algebra としての同型を与えており, $[S^m, a][S^n, a]$ には $[\xi_m \otimes \xi_n]$ が対応している。

従って, 今 $\alpha_i(m, n) \in \mathcal{R}_i$ を

$$[S^m, a][S^n, a] = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i(m, n) [S^i, a]$$

によって与えると, 次式が成り立つ。

$$[\xi_m \otimes \xi_n] = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i(m, n) [\xi_i].$$

さて, M^n 上の line bundle ξ に対して, bordism 特性数

$$\langle W_{i_1}(M) \cdots W_{i_r}(M) W_1(\xi)^k, \sigma_M \rangle, \quad i_1 + \cdots + i_r + k = n$$

を考える. ここに, $W_i(M)$ は M の i -次 Stiefel-Whitney 類, $W_1(\xi)$ は ξ の 1-次 Stiefel-Whitney 類, $\sigma_M \in H_n(M^n; \mathbb{Z}_2)$ は M の基本類を表わす. Conner-Floyd ([2], 定理 17.2, 23.1) によって, M 上の ξ と M' 上の ξ' とは, すべての bordism 特性数が等しいとき, そのときに限り $\mathcal{R}_*(BO(1))$ の同じ元を表わすことが知られてゐる. J.C. Su は, この事実を用いて定理 1 を証明したが, ここでは紙数の都合で, その要旨だけを挙げておく.

$$(i) \quad \langle W_1(\xi_m \otimes \xi_n)^{m+n}, \sigma_{p^m \times p^n} \rangle \equiv \binom{m+n}{m} \pmod{2} \text{ より } \alpha_{m+n}(m, n) \equiv \binom{m+n}{m}.$$

(ii) $p^n \times p^n$ 上の line bundle $\xi_n \otimes \xi_n$ に対する bordism 特性数の中で $W_1(\xi_n \otimes \xi_n)^k, k > 0$ を含む項はすべて零である. 従つて

$$[\xi_n \otimes \xi_n] = [p^n]^2 [\xi_0] \quad \text{即ち} \quad ([S^n, a] + [p^n][S^0, a])^2 = 0.$$

§ 4. $\mathcal{R}^*(BO(1))$ の primitive element P_n について

$MO = \{MO(k)\}$ を unoriented Thom spectrum とする.

任意の finite CW-complex X と, その subcomplex A の組に対して

$$\mathcal{R}^k(X, A) = \varinjlim_q [S^q(X/A), MO(q+k)]$$

$$\mathcal{H}^*(X, A) = \sum_k \mathcal{H}^k(X, A)$$

と置くことにより, $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\{\text{a point}\})$ 上の環 $\mathcal{H}^*(X, A)$ が与えられる。更 $(X, A), (Y, B)$ を finite CW-complexes の組とすると, cross 積によって

$$\mathcal{H}^*(X, A) \otimes_{\mathcal{H}^*} \mathcal{H}^*(Y, B) \cong \mathcal{H}^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$$

が成り立つ。

今, X を compact smooth n -manifold とすると, τ -regularity theorem によって, Atiyah-Poincaré の duality

$$D_X: \mathcal{H}^k(X) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{n-k}(X, \partial X)$$

が与えられ, 次の二つの図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^*(X) & \xrightarrow{D_X} & \mathcal{H}_*(X, \partial X) \\ \downarrow i^* & & \downarrow \partial \\ \mathcal{H}^*(\partial X) & \xrightarrow{D_{\partial X}} & \mathcal{H}_*(\partial X) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^*(X) \otimes \mathcal{H}^*(Y) & \xrightarrow{D_X \otimes D_Y} & \mathcal{H}_*(X, \partial X) \otimes \mathcal{H}_*(Y) \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \\ \mathcal{H}^*(X \times Y) & \xrightarrow{D_{X \times Y}} & \mathcal{H}_*(X \times Y, \partial X \times Y) \end{array}$$

ここに, $i: \partial X \hookrightarrow X$, $\partial Y = \emptyset$, κ は cross 積である。

特に, n 次元実射影空間 P^n の cobordism 環 $\mathcal{H}^*(P^n)$ 及び Atiyah-Poincaré duality について考えてみよう。 inclusion

$$P^n \xhookrightarrow{f_n} P^\infty = BO(1) \hookrightarrow MO(1)$$

の表わす $\mathcal{N}^1(P^n)$ の元を $W_i(\xi_n)$ と書く (この元は ξ_n の cobordism Stiefel-Whitney 類と呼ばれる元である)。このとき、次の事実が示される。

$$\text{補題 1. } \mathcal{N}^*(P^n) \cong \mathcal{N}^* \otimes (\mathbb{Z}_2[W_i(\xi_n)] / W_i(\xi_n)^{n+1})$$

$$D_{P^n}(W_i(\xi_n)^k) = [P^{n-k} \hookrightarrow P^n] \in \mathcal{N}_{n-k}(P^n)$$

従って, $\mathcal{N}^*(BO(1)) = \varinjlim \mathcal{N}^*(P^n)$ と定義し, $W_i \in \mathcal{N}^1(BO(1))$ を $f_n^*(W_i) = W_i(\xi_n)$ なる元とすれば, $\mathcal{N}^*(BO(1)) \cong \mathcal{N}^* \otimes \mathbb{Z}_2[W_i]$ 。

さて $BO(1)$ 上の universal line bundle を γ^1 とすれば, $f_n^*(\gamma^1) \cong \xi_n$ であり, $BO(1) \times BO(1)$ 上の external tensor 積による line bundle $\gamma^1 \otimes \gamma^1$ に対する classifying map μ

$$\mu: BO(1) \times BO(1) \longrightarrow BO(1)$$

とすれば, $\xi_m \otimes \xi_n$ に対する classifying map は, 合成

$$P^m \times P^n \xrightarrow{f_m \times f_n} BO(1) \times BO(1) \xrightarrow{\mu} BO(1)$$

で与えられる。写像 μ を用いて, $\mathcal{N}^*(BO(1))$ は graded Hopf algebra になるが, Boardman [1] によって 次のような primitive element P_W の存在が知られている。

$$\mathcal{N}^1(BO(1)) \ni P_W = W_1 + \bar{Z}_1 W_1^2 + \bar{Z}_2 W_1^3 + \cdots + \bar{Z}_{n-1} W_1^n + \cdots$$

$$D\bar{Z}_n = Z_n \in \mathcal{N}_n, \quad Z_i = 0 \text{ if } i+1 = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

但し, $D: \mathcal{H}^{-n}(pt) \cong \mathcal{H}_n$, P_W が primitive といふ

$$\mu^*(P_W) = 1 \times P_W + P_W \times 1$$

なること。

この P_W が $L^*(B\mathbb{Z}(1)) \otimes \mathbb{Q}$ における Mischenko 39 に
当る。そこで Mischenko 39 を用いて degree -2 の L^* -
module homomorphism $L^*(B\mathbb{Z}(1)) \rightarrow L^*(B\mathbb{Z}(1)) \otimes \mathbb{Q}$ を
構成した鎌田氏の方法 [3] にならって, degree -1 の $\mathcal{H}_*$ -module
homomorphism

$$\textcircled{H}: \mathcal{H}_*(B\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow \mathcal{H}_*(B\mathbb{Z}(1))$$

を $\textcircled{H}([M, f]) = f_* D_M f^* P_W$ によって与える。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}'(B\mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{H}'(M^n) \\ \downarrow P_W & & \downarrow \cong D_M \\ \mathcal{H}_{n-1}(M^n) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{H}_{n-1}(B\mathbb{Z}(1)) \end{array}$$

Atiyah-Poincaré に関する前述の二つの可換図式によって,
この $\textcircled{H}$ が well-defined な $\mathcal{H}_*$ -module homomorphism
であることを証明出来る。ここで特に, $\textcircled{H}([\xi_n])$, $\textcircled{H}([\xi_m] \otimes [\xi_n])$
を 補題 1 を用いて計算してみると,

$$\text{補題 2.} \quad \textcircled{H}([\xi_n]) = \sum_{k \geq 1} \sum_{k-1} [\xi_{n-k}].$$

$$\textcircled{H}([\xi_m] \otimes [\xi_n]) = \sum_{k \geq 1} \sum_{k-1} ([\xi_m] \otimes [\xi_{n-k}] + [\xi_{m-k}] \otimes [\xi_n]).$$

証明.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{H}([\xi_n]) &= \sum_{k \geq 1} f_{n*} D f_n^* (\bar{z}_{k+1} W_1^k) = \sum_{k \geq 1} f_{n*} D (\bar{z}_{k+1} W_1 (\xi_n)^k) \\
 &= \sum_{k \geq 1} f_{n*} (z_{k+1} [P^{n-k} \hookrightarrow P^n]) = \sum_{k \geq 1} z_{k+1} [\xi_{n-k}].
 \end{aligned}$$

$\downarrow$ <i>by definition</i> $\downarrow$	$ \begin{aligned} &P_W \quad \mathcal{N}^*(BC(1)) \\ &\downarrow \mu^* \\ &\mathcal{N}^*(BC(1) \times BC(1)) \\ &\downarrow (f_m \times f_n)^* \\ &\mathcal{N}^*(P^m \times P^n) \\ &\downarrow \cong D \\ &\mathcal{N}_*(P^m \times P^n) \\ &\downarrow (f_m \times f_n)_* \\ &\mathcal{N}_*(BC(1) \times BC(1)) \\ &\downarrow \mu_*(\text{external tensor product}) \\ &\textcircled{H}([\xi_m \hat{\otimes} \xi_n]) \quad \mathcal{N}_*(BC(1)) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &P_W \\ &\downarrow \\ &1 \times P_W + P_W \times 1 \\ &\downarrow \\ &1 \times f_n^* P_W + f_m^* P_W \times 1 \\ &\downarrow \\ &[P^m \hookrightarrow P^m] \times D f_n^* P_W + D f_m^* P_W \times [P^n \hookrightarrow P^n] \\ &\downarrow \\ &[\xi_m] \times \textcircled{H}([\xi_n]) + \textcircled{H}([\xi_m]) \times [\xi_n] \\ &\downarrow \\ &\sum_{k \geq 1} z_{k+1} ([\xi_m \hat{\otimes} \xi_{n-k}] + [\xi_{m-k} \hat{\otimes} \xi_n]). \end{aligned} $
--	--	--

§ 5. 定理 2 の証明

$\alpha_k(m, n) \in \mathcal{N}_k$ を次式で与える.

$$[S^m, a][S^n, a] = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(m, n) [S^{k+1}, a]$$

このとき, § 3 で考察したように, 次式が成り立つ.

$$[\xi_m \hat{\otimes} \xi_n] = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(m, n) [\xi_k]$$

この等式の両辺の (4) による係数を比べると、補題 2 によって

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq i} z_{k-1} \left(\sum_{l \geq 0} (\alpha_l(m, n-k) + \alpha_l(m-k, n)) [\xi_l] \right) \\ = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(m, n) \left(\sum_{l \geq 1} z_{l-1} [\xi_{k-l}] \right). \end{aligned}$$

さて、 $\mathcal{N}_*(BO(1))$ は $[\xi_i], i=0, 1, 2, \dots$ を基とする free $\mathcal{N}_*$ -module であるから、両辺の $[\xi_i]$ の係数を比較することによって、定理 2 の等式 (a) を得る。等式 (b) は、(a) より

$$\alpha_{m+n}(m, n) = \alpha_{m+n-1}(m-1, n) + \alpha_{m+n-1}(m, n-1)$$

が示されるので、 m, n についての帰納法で証明される。

最後に、等式 (c), (d) を示すため、二つの $\mathcal{N}_*$ -module homomorphisms

$$\varepsilon: \mathcal{N}_*(Z_1) \rightarrow \mathcal{N}_*, \quad \Delta: \mathcal{N}_*(Z_1) \rightarrow \mathcal{N}_*(Z_2)$$

を定義しよう。ここに、 ε は augmentation homomorphism と呼ばれ、 $\varepsilon([M, T]) = [M/T]$ によって与えられ、 Δ は Smith homomorphism と呼ばれる degree -1 の homomorphism であり、次のように定義される。

例. $T: M^n \rightarrow M^n$ を fixed point free smooth involution とし、 $f: M^n \rightarrow S^k$ を smooth map であり、 S^{k-1} 上 t -regular であって、更に $f \circ T = a \cdot f$ を満たすものとする。ここに $a: S^k \rightarrow S^k$ は antipodal involution を表わす。このとき、 $V^{n-1} = f^{-1}(S^{k-1})$ は M^n の closed submanifold である。

あり, $T(V^{n-1}) = V^{n-1}$ となっている。そこで,

$$\Delta([M^n, T]) = [V^{n-1}, T|_V]$$

によって, Δ を定義する。この Δ が well-defined な $\mathcal{R}_*$ -module homomorphism であることは容易に示される ([2], 定理 26.1)。

定義より次式が成り立つ。

$$\varepsilon([S^n, a]) = [P^n], \quad \varepsilon\Delta([S^m, a])[S^n, a] = [H_{m,n}].$$

従って, $\alpha_k(m, n) \in \mathcal{R}_k$ の定義式

$$[S^m, a][S^n, a] = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(m, n) \cdot [S^k, a]$$

の両辺に, 夫々 $\varepsilon, \varepsilon\Delta$ を作用させた像を考えれば, それが等式 (c), (d) を与えている。 (証明終)

参考文献

- [1] J. M. Boardman: Unoriented bordism and cobordism, Univ. of Warwick (1966).
- [2] P. E. Conner - E. E. Floyd: Differentiable Periodic Maps, Springer-Verlag (1964).
- [3] M. Kamata: On the ring structure of $L_*(BL(1))$, Osaka J. Math. 7(1970), 417-422.

- [4] M. Kamata : The structure of the bordism group $L_*(B\mathbb{Z}_p)$,
Osaka J. Math. 7 (1970), 409-416
- [5] K. Shibata : Oriented and weakly complex bordism
algebra of free periodic maps, (to appear)
- [6] J.C. Su : A note on the bordism algebra of
involutions, Michigan Math. J. 12 (1965), 25-31
- [7] F. Uehida : Bordism algebra of involutions,
Proc. Japan Acad., 46 (1970), 615-619.