

Circle packing の型問題

高木 理 谷口 雅彦

(Masahiko Taniguchi)

位相開円板の任意の三角形分割 T に対し, carrier が $U = \{ |z| < 1 \}$ か $\mathbb{C}$ となる circle packing P_T がある.
 P_T の contact graph (nerve) が $T^{(1)}$ と組み合わせ的
 同値なものか. Möb の元での共役を除き一意に存在する
 ことが知られている (He-Schramm)

とある.

T : hyperbolic $\Leftrightarrow P_T$ の carrier が U

T : parabolic $\Leftrightarrow P_T$ の carrier が $\mathbb{C}$

とある.

この定義は T に対しては直接的でない. そこで, T から
 得られる criterion を述べる. まず,

定義 X : 可算集合

Γ : X の部分集合 ($\neq \emptyset$) の族 ($\neq \emptyset$)

m : X 上の metric

$\Leftrightarrow m : X \rightarrow [0, +\infty)$

に於て.

$$\text{area}(m) = \|m\|^2 = \sum_{x \in X} m(x)^2$$

$$A \subset X \text{ の } m\text{-length } L_m(A) = \sum_{x \in A} m(x)$$

$$P \text{ の } m\text{-length } : L_m(P) = \inf_{A \in P} L_m(A)$$

P の extremal length

$$EL(P) = \sup_m \left\{ \frac{L_m(P)^2}{\text{area}(m)} \right\}$$

$$(m: 0 < \text{area}(m) < +\infty)$$

一般に、局所有限・連結単純無限 graph G に於て.

$$V = \{v : G \text{ の vertex}\}$$

$$E = \{e : G \text{ の edge}\}$$

また G 内の path γ に於て.

$$V(\gamma) = \{v \in V : \gamma \text{ の vertex}\}$$

$$E(\gamma) = \{e \in E : \gamma \text{ の edge}\}$$

と可る。次に $v \in V$ を固定して.

$$\Gamma(\{v\}, \infty) = \{\gamma : \text{始点 } v \text{ へ } \gamma \text{ transient}\}$$

という path family を考へ.

定義

$$\text{EEL}(\{v\}, \infty) = \text{EL}(\{E(t) : t \in \Gamma(\{v\}, \infty)\})$$

$$VEL(\{v\}, \infty) = EL(\{v(t) : \quad " \quad \})$$

とある。 ℓ は ℓ -edge extremal length, vertex extremal length とある。

空義

$$T : \text{VEL-parabolic} \Leftrightarrow \text{VEL}(\{v\}, \infty) = +\infty$$

$$T : \text{EEL - parabolic} \Leftrightarrow \text{EEL}(\{v\}, \infty) = +\infty$$

定理 (He-Schrämmer)

$$T : \text{parabolic} \iff T : \text{VEL-parabolic}$$

すなわち一般に局所有限 graph G に対し、

$$G : \text{EEL-parabolic} \Rightarrow G : \text{VEL-parabolic}$$

2". G is bounded valence $\Rightarrow$ is not a tree

より幾何学的には、三角形分割 T を多様体として実現すればよい。各 2 単体を単位正三角形とみなして得られる多様体は $|T|$ とあると。

定理 (Rodin - Sullivan)

T has bounded valence $q \neq \pm 1$.

$T : \text{hyperbolic} \iff |T| \subset U$ が等角同値

- 3. $K \geq 1$ に對し, $f : |T| \rightarrow |T|$ が coarse K -quasi-isometry (K -cqi) とは.

$$\frac{d(u,v)}{K} - K \leq d(f(u), f(v)) \leq K d(u,v) + K$$

$$(u, v \in |T|)$$

かつ, $\forall w \in |T|$ には

$$d(w, f(u)) \leq K$$

ある $u \in |T|$ が存在する: $\epsilon \geq \frac{1}{K}$ である.

さらに, $|T|$ が coarsely quasi-homogeneous (cqh) とあるとは, $\exists K \geq 1$, $\forall u, v \in |T|$,

$$\exists f : K\text{-cqi}, |T| \rightarrow |T| \text{ s.t. } f(u) = v$$

定理 (He)

$T : \text{hyperbolic}$, bounded valence

$|T| : \text{cqh}$

$\Rightarrow |T|$ が双曲平面 $\mathbb{H}^2$ への標準写像は quasi-isometry

以下, この定理の証明を述べる。

まず、次の主張は容易

補題 1 T : hyperbolic, bdd valence ($\leq M$)

P_T : T に対応する CP

$\Rightarrow \exists C(M)$ s.t. P_T の任意の円 $\cap$ 双曲半径
が $C(M)$ より小さい

pf) P_T 内の円 C に対し、中心 O としてよいが。
 C の半径 $\rightarrow 1 \Rightarrow C$ に接する円 $\cap$ 鎖は
無限に長くなる //

そこで同様の仮定の下でさらに

定理 $|T| : cgh$

$\Rightarrow \exists r > 0$ s.t. P_T 内の $\forall$ 円 $\cap$ 双曲半径
が r より小さくない

を示せばよい。このためには、 U から円板 $\overline{C}$ を
除いた二重連結領域の modulus $m(C)$ が有界であるこ
とを示せばよい。すなわち、 $C_0 \in P_T$ を固定すると
 $m(C_0^*) \leq M \cdot m(C_0)$

が任意の $c_0^* \in P_T$ に対し成り立つような M が存在することを示す。

補題 2 $u, v \in |T^{(n)}|$ に対し.

$d(u, v)$: u, v 間の $|T^{(n)}|$ 上での距離
とすると, $(|T^{(n)}|, d)$, $(T^{(0)}, d)$, $|T|$ は互いに
cqi である。

特に, $(T^{(0)}, d) : \text{cqi}$.

従って, $v_0, v_0^* \in T^{(0)} \iff c_0, c_0^* \in P_T$ とすると,
 $\exists h : T^{(0)} \rightarrow T^{(n)}, K\text{-cqi} \rightarrow \dagger$
 $h(v_0) = v_0^*$

($K : v_0, v_0^*$ に対応する)。

$\chi = \tau$. $c \in P_T$ に対し, χ の k -近傍 (k 世代
以下の内点の集合) $\Sigma N_k(c)$ とするとき.

補題 3 $c_1, c_2 \in P_T$: 接する, $c_2 \neq c_0$.

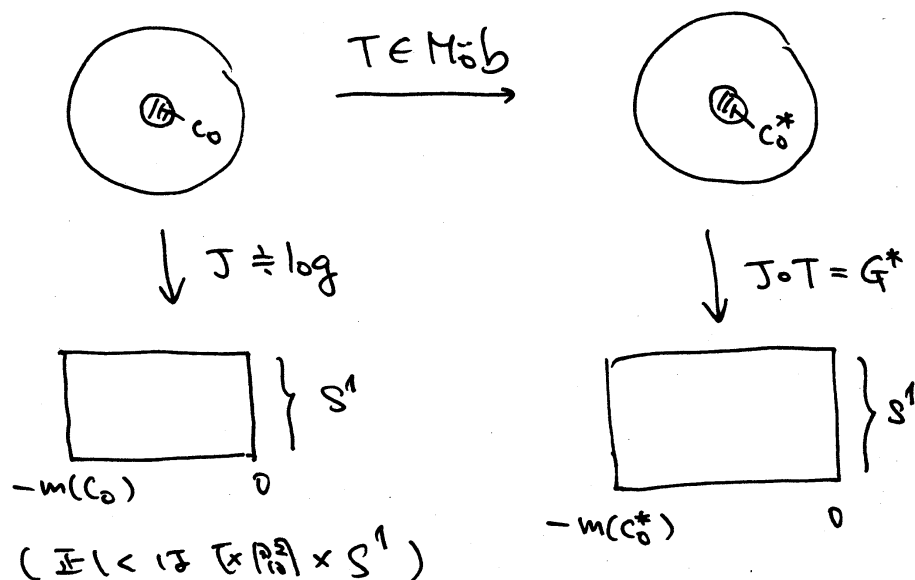
$$E(c^*) = \bigcup \{ N_{2k+1}(c^*) \setminus c_0^* \}$$

$$\Rightarrow E(h(c_2)) \text{ は } h(c_1), h(c_2) \text{ を含む}$$

$$\text{pf) } c_1, c_2 : \text{接する} \Rightarrow h(c_2) \in N_{2k}(h(c_1)) //$$

さて, c_0, c_0^* の中心を Möb でそれぞれ 0 に移し.

$\log$ で写して, 「長方形」で考える.



補題 4 $c \neq c_0 \Rightarrow \text{diam}^2(J(c)) \leq C \cdot \text{area}(J(c))$

$c^* \neq c_0^*$ でも同様で, C は絶対定数にとれる.

pf) $c \neq c_0$ ならば

$$c \text{ の半径 } \leq \tilde{C} \cdot \text{dist}(0, c)$$

となる絶対定数 $\tilde{C}$ が存在する.

あとは, 具体的に $\tilde{C}$ を使った形から, 微分を評価できる.

//

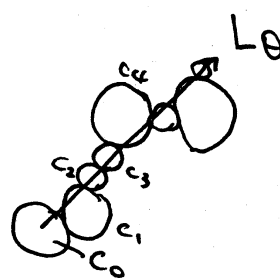
$\gamma = \tau$ 各 $\theta \in S^1$ に対応する族 $\{c_i\} \in L_\theta \subset L$.

L_θ に沿う円鎖 $\{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\}$ ($c_n \rightarrow \partial U$)

と取る

補題 3.5')

$$\bigcup_{j \geq 1} E(h(c_j))$$



は $U \setminus \bar{c}_0^*$ 内で c_0^* と ∂U を

結ぶ連結体となるから

$$m(c_0^*) \leq \sum_{\substack{c \neq c_0 \\ c \cap L_\theta \neq \emptyset}} \text{diam}(G^*(E(h(c))))$$

0 で評価して, Schwarz を使うと.

$$\{2\pi m(c_0^*)\}^2 \leq \left\{ \sum_{c \neq c_0} \text{diam}(G^*(E(h(c)))) \right. \\ \left. \times \text{diam}(G(c)) \right\}^2$$

$$\leq \sum_{c \neq c_0} \text{diam}^2(G^*(E(h(c)))) \cdot \sum_{c \neq c_0} \text{diam}^2(G(c))$$

== τ bdd-valency $\neq$).

$$\# \{ \tilde{c} \in E(h(c)) \} : \text{bdd}$$

さらに, $h: K \rightarrow \mathbb{C}^n$ $\neq$). $\forall c^* \neq c_0^*$ に対す

$$\# \{ E(h(c)) : c^* \in E(h(c)) \} : \text{bdd}$$

がわかる。

從, 2. $\exists c' > 0$ s.t.

$$\sum_{c \neq c_0} \text{diam}^2(G^*(E(h(c)))) \leq c' \sum_{c \neq c_0} \text{diam}^2(G^*(c^*))$$

從, 2. 補題 4.5').

$$4\pi^2 m(c^*)^2 \leq 4\pi^2 c^2 c' m(c^*) \cdot m(c)$$

を得る。

///

References

- [1] Z. He, Coarsely quasi-homogeneous circle packings in the hyperbolic plane, Michigan Math. J. 41 (1994) 175 - 180.
- [2] Z. He and O. Schramm, Hyperbolic and parabolic packings, preprint.
- [3] J. W. Cannon, The theory of negatively curved spaces and groups, "Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces", 1991, Oxford Univ. Press.
- [4] W. Woess, Random walks on infinite graphs and groups, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 1 - 60.