

Mackey functor と G -functor 再論

北大・理 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

筆者は昔有限群の transfer 定理に興味を持って勉強していたのだが、この過程で transfer 定理の証明に必要なのは、transfer 写像の持つ性質のうちほんのわちかのこと（とくに Mackey 分解）があることに気付いた。また有限群の表現論にも transfer 定理に似た形のものがあるのを不思議に思っていた。それ以来有限群の transfer 定理を、Green の導入した G -functor に拡張し、さらにそれをモジュラー表現論に応用しようとしてきた。この考えは成巧したとはとても言えないが、応用についてはやっと目鼻がついてきた状況である。単なる一般論から脱しつつある現状を紹介したい。ここでの最終目標は、群の作用するグラフやデサインへの応用である。

§1. G -functor.

J. A. Green が 1971 年に導入した G -functor の概念を、

記号を少し変えて定義する.

Def. G を有限群, k を可換環とする. G -functor

$(\mathcal{Q}, \tau, \rho, \sigma)$ は, k -加群の族 $\mathcal{Q}(H)$, $H \leq G$ と写像の族

$$\tau_H^K: \mathcal{Q}(H) \rightarrow \mathcal{Q}(K); \alpha \mapsto \alpha^K, \quad H \leq K \leq G;$$

$$\rho_H^K: \mathcal{Q}(K) \rightarrow \mathcal{Q}(H); \beta \mapsto \beta_H, \quad H \leq K \leq G;$$

$$\sigma_H^g: \mathcal{Q}(H) \rightarrow \mathcal{Q}(H^g); \alpha \mapsto \alpha^g, \quad H \leq G, g \in G,$$

(ここで, $H^g := g^{-1}Hg$) 次の公理をみたすものから成る.

以下では, $\alpha \in \mathcal{Q}(H)$, $\beta \in \mathcal{Q}(K)$ とする.

$$(G.1) \quad \alpha^H = \alpha, \quad (\alpha^K)^L = \alpha^L \quad \text{if } H \leq K \leq L \leq G;$$

$$(G.2) \quad \beta_K = \beta, \quad (\beta_H)^D = \beta_D \quad \text{if } D \leq H \leq K \leq G;$$

$$(G.3) \quad (\alpha^g)^{g'} = \alpha^{gg'}, \quad \alpha^h = \alpha \quad \text{if } g, g' \in G, h \in H;$$

$$(G.4) \quad (\alpha^K)^g = (\alpha^g)^{K^g}, \quad (\beta_H)^g = \beta_{H^g}^{g^{-1}} \quad \text{if } H \leq K \leq G, g \in G;$$

$$(G.5) \text{ (Mackey 分解)} \quad H, K \leq L \leq G \text{ に対し,}$$

$$\alpha^L_K = \sum_{g \in H \backslash L / K} \alpha^g_{H^g \cap K} \quad (\alpha \text{ は代表元を重たく}).$$

明らかに, $H \mapsto R(H)$ (指標環) は, induction map, restriction map をとくとともに, 上の公理をみたす. また, V が k - G -加群のとき, $H \mapsto H^n(H, V)$ (コホモロジー群) も $\text{cor}, \text{res}, \text{con}$ による G -functor となる. $n=0$ のときは, $H^0(H, V) = V^H := \{v \in V \mid v \cdot g = v \quad \forall g \in H\}$ に注意.

Def. G -functor の間の morphism $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は, k -linear map の族 $\theta(H): \mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$, $H \leq G$, z, τ, ρ, α と可換なものから成る. したがって G -functor のカテゴリ $\mathcal{M}_k(G)$ を得る.

例えば, $kG\text{-hom } U \rightarrow V$ は $H^u(-, U) \rightarrow H^u(-, V)$ を誘導する.

Def. G -functor $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ k に対し, pairing $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ は, k -bilinear map の族

$$\mathcal{A}(H) \times \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{C}(H) \quad ; \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$$

で, 以下の公理を満たすものから成る: ($H \leq K$, $g \in G$; $\alpha \in \mathcal{A}(H)$, $\alpha' \in \mathcal{A}(K)$, $\beta \in \mathcal{B}(H)$, $\beta' \in \mathcal{B}(K)$ とする),

$$(P.1) \quad (\alpha' \cdot \beta')_H = \alpha'_H \cdot \beta'_H, \quad (\alpha \cdot \beta)^g = \alpha^g \cdot \beta^g;$$

$$(P.2) \quad \alpha^K \cdot \beta' = (\alpha \cdot \beta'_H)^K;$$

$$(P.3) \quad \alpha' \cdot \beta^K = (\alpha'_H \cdot \beta)^K.$$

上で, (P.2) と (P.3) は Frobenius の相互律である.

これにより, 普通の環や加群の場合と同様と, G -functor により $\mathcal{M}_k(G)$ の "ring" や "module" の概念が定義される. 例えば, $H \mapsto R(H)$ は "ring" であり, また $U \times V \rightarrow W$ が kG 加群の G -pairing なら, $H^u(-, U) \times H^u(-, V) \xrightarrow{\psi} H^u(-, W)$ は

G -functor の pairing である. A が G -algebra なら,
 $H^*(-, A)$ は "ring" である.

さて, Green の結果を述べよう. G -functor Q と $D \leq H \leq G$ に対し,
 $Q(D)^H := \text{Im}(\tau_D^H: Q(D) \rightarrow Q(H))$ とおく.
 さらに H の部分群のある族 $\mathcal{X}$ に対し,

$$Q(\mathcal{X})^H := \sum_{x \in \mathcal{X}} Q(x)^H$$

とおく. $\text{Sub}(G) := \{H \leq G\}$ とする.

Def. G -functor Q と $\mathcal{X} \subseteq \text{Sub}(G)$ に対し, Q が $\mathcal{X}$ -
 projective $\stackrel{\text{def}}{\iff} Q(G) = Q(\mathcal{X})^G$. また $\mathcal{X}$ が Q の defect
 base $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{X}$ は subconjugate closed で Q は $\mathcal{X}$ -projective,
 かゝ $\mathcal{X}$ はこの性質をみたすもののうちで最小のもの.

例えば, $H \mapsto R(H)$ (指標環) とおくと言えば, その defect
 base はいわゆる基本部分群全体の族である. 加群の vertex
 や, マロウの defect group もこの方法で定義できる.

定理 (Green) G -functor Q が "ring"¹ なら, Q はただ一つの
 defect base をもつ.

定理 (Green). Q は G -functor, $D \leq H \leq G$ とし,

$$\mathcal{X} := \{ D^g \cap D \mid g \in G - H \} \subseteq \text{Sub}(D),$$

$$\mathcal{Y} := \{ D^g \cap H \mid g \in G - H \} \subseteq \text{Sub}(H)$$

とある、もし $\mathcal{Q}(\mathcal{X})^H = \mathcal{Q}(D)^H \cap \mathcal{Q}(\mathcal{Y})^H$ なら、

$$\mathcal{Q}(D)^G / \mathcal{Q}(\mathcal{X})^G \cong \mathcal{Q}(D)^H / \mathcal{Q}(\mathcal{X})^H,$$

これは H が G の Green 対応の変形である、このほか、

Green は、 $e^2 = e \in \mathcal{Q}(G)$ に対し、 G -functor $\mathcal{Q}e: H \mapsto$

$\mathcal{Q}_H \mathcal{Q}(H) \mathcal{Q}_H$ の defect base $\mathcal{Q}(e)$ $\mathcal{Q}(e)$ の defect base と呼んで、

ある場合 ($e \in A \subseteq J(A \subseteq)$ が division ring のとき) $K \mathcal{Q}(e) =$

$\{ X \leq_G D \}$ とする D の存在を示した、これは $K > H$ 、Brauer

の first main が成立している。

§ 2. transfer 定理と induction 定理.

Def G -functor $\mathcal{Q}$ が cohomological $\Leftrightarrow \beta_H^K = |K:H| \beta$
 $K \subseteq H \subseteq G$.

§ 2, cohomological G -functor $K > H$ と $H < K$ の
 transfer 定理がある、例えば D. Higman の focal subgroup
 定理は次のような形になる:

定理. $\alpha \in \text{cohomological}$ な G -functor, $P \in \text{Syl}_p(G)$,
 さらに係数環 R において $|G:P|$ が逆元をもつと仮定する.
 このとき, P_P^G により,

$$\alpha(G) \cong \{ \alpha \in \alpha(P) \mid \alpha^g_{P^g \cap P} = \alpha_{P^g \cap P} \quad \forall g \in G \}.$$

この結果は群のコホモロジ-群の場合に良く知られている.
 この他 Wielandt 型の transfer 定理も作れる ([Yo.80]).
 cohomological でない場合の transfer 定理は少し修正を要する.

定理. R を "ring", $\alpha \in "R\text{-module}"$, R は H -projective
 とする. すると $\exists \varphi \in R(H)$ st $\varphi^g = 1$. このとき次は完全系
 列である.

$$0 \rightarrow \alpha(G) \xrightarrow{P_H^G} \alpha(H) \xrightarrow[P'']^{P'} \prod_{g \in H \backslash G/H} \alpha(H^g \cap H)$$

$$\text{ここで, } P'(\alpha) = (\alpha^g_{H^g \cap H} \quad \varphi^g_{H^g \cap H})_g,$$

$$P''(\alpha) = (\alpha_{H^g \cap H} \quad \varphi^g_{H^g \cap H})_g.$$

$$\text{即ち, } \alpha(G) \cong \{ \alpha \in \alpha(H) \mid P'(\alpha) = P''(\alpha) \}.$$

(この結果は sheaf を思い出させる).

Wielandt 型の transfer 定理については, [Sa.82] にある.

応用として佐々木氏の次の定理がある.

定理. F を標数 $p \neq 0$ の体, U を直既約 $F G$ 加群, $\text{vt}_X(U) = D$ は p - Sylow 群, W を U の source とする. $N_G(D) \leq H \leq G$, V を U の Green 対応とする (i.e. V は直既約 $F H$ 加群で, $\text{vt}_X(V) = D$, $U \mid V G$). $\forall \alpha \in D$ に対し, $W(\alpha-1)^{p-1} = 0$ と仮定する. このとき, コホモロジ-群の同型

$$\hat{H}^*(G, U) \cong \hat{H}^*(H, V)$$

がある.

さて, G -functor $\kappa \rightarrow \mathbb{Z}$ は transfer 定理と並んで, induction 定理と呼ばれる結果がある. G -functor $\mathcal{Q}$ と部分群族 $\mathcal{X} \subseteq \text{Sub}(G)$ に対し,

$$\mathcal{Q}(\mathcal{X})^G := \sum_{X \in \mathcal{X}} \text{Im}(\tau_X^G: \mathcal{Q}(X) \rightarrow \mathcal{Q}(G)) \subseteq \mathcal{Q}(G),$$

$$K(\mathcal{Q}, \mathcal{X}) := \{ \alpha \in \mathcal{Q}(G) \mid d_X = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X} \} \subseteq \mathcal{Q}(G)$$

とおく. 例えば, $\mathcal{Q} = R: H \mapsto R(H)$ (指標環) のときは,

$\mathcal{C} := \{ \text{cyclic subgp} \}$, $\mathcal{H} := \{ \text{基本部分群} \}$ とおくことにより,

次のよく知られた induction 定理が得られる:

$$\text{Artin: } |G| R(G) \subseteq R(\mathcal{C})^G.$$

$$\text{Brauer: } R(G) = R(\mathcal{H})^G.$$

一般の G -functor $\kappa \rightarrow \mathbb{Z}$ には Dress の定理がある.

定理 (Dress) $\alpha \in G\text{-functor}$, p を素数, $\mathcal{X} \subseteq \text{Sub}(G)$,

$$H_p \mathcal{X} := \{H \leq G \mid \exists X \in \mathcal{X} \text{ s.t. } X \trianglelefteq H \text{ and } H/X \text{ is } p\text{-group}\}$$

とあるとき,

$$|G|_p, \alpha(G) \leq \alpha(H_p \mathcal{X})^G + K(\alpha, \mathcal{X}).$$

$\alpha = R$ で $\mathcal{X} = \mathcal{C} = \{\text{cyclic subgp}\}$ とすれば, Artin の定理と, Brauer の定理の中間段階 (hyper-elementary induction) がたどるに得られる. ($K(R, \mathcal{C}) = 0$ に注意). このことは相対 Grothendieck 群の場合に $\alpha = R$ は Dress [Dr. 74].

Dress の定理の証明には, 次節で述べる Burnside 環の理論が必要である.

5.3. 有限群のバーンサイド環.

有限群 G の Burnside 環 $B(G)$ は有限 G 集合のカテゴリ - の直和と直積に関する Grothendieck 環である. 対応 $H \mapsto B(H)$ は G -functor になる. これは "ring" であり, 指標環への準同型 $B(H) \rightarrow R(H); [H|G] \mapsto 1_H^G$ は G -functor の "ring homomorphism" を与える. Burnside 環と G -functor の関係は次の補題で明らかになる.

補題. $\alpha \in G\text{-functor}$ とすると bilinear map

$$\alpha(H) \times B(H) \longrightarrow \alpha(H); (\alpha, [D|H]) \mapsto \alpha_D^H$$

は G -functor の pairing $A \times B \rightarrow A$ を与える.

つまり Burnside ring は G -functor の理論において, 整数環にあたる. Burnside ring の理論については Tom Dieck の本 [Di, 79] に詳しい.

巾等元公式については述べたように, μ を G の部分群束 $\text{Sub}(G)$ の Möbius 関数とする. 即ち, $\mu(H, H) = 1$; $\mu(H, K) = 0$ if $H \not\leq K$; $\sum_{H \leq D \leq K} \mu(H, D) = \delta_{H, K}$. また $\mathbb{Z}_{(p)} := \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (b, p) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}$ とおく.

定理 (Gluck, Yoshida). (i) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ の原始巾等元は次の形をもちうる:

$$e_{G, H} := \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq H} |D| \mu(D, H) [D \setminus G].$$

$e_{G, H} = e_{G, K} \Leftrightarrow (H) = (K)$ (ie H と K が G で共役).

(ii) $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ の原始巾等元は次の形をもちうる:

$$e_{G, Q}^p := \sum_{(H): O^p(H) = Q} e_{G, H}$$

ここで, $O^p(H) = \langle p' \text{-元} \in H \rangle$ で, Q は p -perfect (ie $O^p(Q) = Q$) な部分群である.

この定理により, sub-conjugate closed な $X \subseteq \text{Sub}(G)$ に対し,

$$\mathbb{Z}_{(p)} \otimes B(G) = \bigoplus_{(Q)} e_{G, Q}^p (\mathbb{Z}_{(p)} \otimes B(G))$$

$$Q \in \mathcal{X} \Leftrightarrow |G|_p, e_{GQ}^p \in K(B, \mathcal{X}),$$

$$Q \notin \mathcal{X} \Leftrightarrow |G|_p, e_{GQ}^p \in B(H_p \mathcal{X})^G$$

であることがわかる。これより Burnside 環と $\mathcal{X}$ の Dress induction 定理が得られる。一般の場合は上の補題による。

他にも多くの応用がある。

定理 (Wielandt 1960). G と V を位数が互いに素な有限群とし、 G が V に作用しているとする。ここで G の巡回部分群全体、 μ を $\text{Sub}(G)$ の Möbius 関数とする。このとき、

$$|C_V(G)|^{|G|} = \prod_{Z \in \mathcal{C}} |C_V(Z)|^{|Z| \nu(Z)}$$

$$\text{ここで, } \nu(Z) := \sum_{Z \subseteq D \in \mathcal{C}} \mu(Z, D), \quad C_V(G) := \{v \in V \mid v^g = v \forall g \in G\}.$$

この定理の証明は V が FG -加群、ここで F は標数 p の体、 $p \nmid |G|$ の場合に帰着される。 $R_F(G)$ を FG -加群の Grothendieck 環とする。 $p \nmid |G|$ より $K(R_F, \mathcal{C}) = 0$ 。これより、 $B(G) \rightarrow R_F(G)$ による e_{GH}^p の像 Σ_{GH}^p は $H \neq G$ のとき 0、中等元公式より

$$|G| \cdot [V] = \sum_{Z \in \mathcal{C}} |Z| \nu(Z) [V \downarrow_Z^{FG}].$$

$$\therefore |G| \cdot \dim C_V(G) = \sum_Z |Z| \nu(Z) \dim C_V(Z).$$

と、Wielandt 位数公式を得る。

同様の方法でガロア拡大の中間体の Dedekind $\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Q}$ 関数
や類数の間の関係 ([H, 80], [KS, 82]) が得られる.

さて R が $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の可換多元環の場合を考える. このとき,
 G -functor $B: H \mapsto B(H)$ は直和分解

$$B = \bigoplus_{(Q)} e_{GQ}^P B$$

と成る. ここで, (Q) は $O^p(Q) = Q$ であり $Q \leq G$ の共役類
上を動かす. この分解は G -functor Q の分解

$$Q = \bigoplus_{(Q)} e_{GQ}^P Q$$

と成る. ここで, $e_{GQ}^P B$ は H -projective である. ここで $H \leq G$
で $H/Q \in \text{Syl}_p(N_G(Q)/Q)$. §2 の初めの 2 つの transfer 定
理は次のようになる.

定理: $e_{GQ}^P Q(G) \cong e_{N_G(Q), Q}^P Q(N_G(Q)).$

もし Q が cohomological なら, $e_{GQ}^P Q = Q$ である.

§4. cohomological G -functor と Hecke 環.

H_{RG} , m_{RG}^{triv} , m_{RG} はそれぞれ permutation RG -modules,
trivial source modules, RG -modules のカテゴリ - とする.

$H_{RG} \subseteq m_{RG}^{\text{triv}} \subseteq m_{RG}$ (full) である. H_{RG} は Hecke カテゴリ
- とする.

$m_R(G)^{\text{coh}}$ は cohomological G -functor のカテゴリ - とす

る、次の基本的である:

$$\text{定理 ([Y0.83a]) } m_R(G)^{\text{coh}} \cong [H_{RG}, m_R] (\text{functor cat}), \\ \cong [m_{RG}^{\text{triv}}, m_R].$$

対応は, $\alpha \mapsto (R[H|G] \mapsto \alpha(H))$ で与えられる. したがって α が cohomological G -functor なら $\alpha(H)$ は Hecke 環 $R[H|G/H] \cong \text{End}_{R_G}(R[H|G])$ 上の加群である. また $R_G = \bigoplus_B e_B R_G$ をブロックの分解とすれば, $\alpha = \bigoplus_B e_B \alpha$ となり, $m_R(G)^{\text{coh}}$ でもブロックの概念があることになる. 中心 $Z(R_G)$ の $\alpha(H)$ への作用は, C を G -共役類, $\alpha \in \alpha(H)$ とし $\bar{C} := \sum_{C \in C} C$ とし, $(\bar{C} := \sum_{C \in C} C)$,

$$\alpha(H) \times Z(R_G): (\alpha, \bar{C}) \mapsto |H \cap H^x: C_H(x)| \alpha^x$$

で与えられる. このことから次のよく知られた結果を得る:

定理. D が G の p -ブロックの defect 群なら, ある p' -元 x とシロ- p 群 P があ, $D = P \cap P^x \in \text{Syl}_p(C_G(x))$.

モジュラー表現との関係で少し述べておこう. k を標数 p の体としておく. カテゴリ-の full な埋め込み

$$\mathcal{C}: m_{RG} \longrightarrow m_R(G)^{\text{coh}}; V \mapsto \mathcal{C}_V$$

$$\text{ここで } \mathcal{C}_V \text{ は } \mathcal{C}_V(H) := \{v \in V \mid v_H = v \ \forall H \in H\},$$

$$T_{RH}^k = \tau_H^k: u \longmapsto \sum_{g \in H \backslash k} u g \quad (\text{trace}),$$

$$\sigma_H^g: u \longmapsto u g,$$

$$p_H^k : V \rightarrow V \quad (\text{inclusion})$$

で定義される G -functor.

V が既約 RG 加群でも C_V は既約とは限らない. 実際,

$$C'_V(H) := \text{Im}(\tau_H : V \rightarrow C_V(H)) \subseteq C_V(H)$$

とおけば $C'_V \subseteq C_V$. すると G -functor は既約なモジュール指標をさす分解することになる. ここでモジュール表現論に習って G -functor の理論を作ることが一つの目標となる. うまくいく所もあればうまくない所もある. 例えば丹原氏はカルタニ字便

$$\kappa : K_0(M_F(G)^{\text{co}}) \rightarrow G_0(M_F(G)^{\text{co}})$$

が単射でないことを示した. G -functor のカテゴリ - でも同様である. それでも G -functor について G_0 や K_0 を考えることは意義がある.

cohomological G -functor と Hecke 環について他の話題について [RS. 8.2], [Fo. 8.4].

§ 5. Mackey functor.

1972 年の論文で, Dress は G -functor の概念を抽象化して Mackey functor の概念を導入した. Dress のこの論文は難解だが今も一読に値する. 有限群の表現論よりもトポロジーでよく使われる概念である. また最近では Neukirch に

よ、2類体論の簡易化にも使われたと聞く。

Def. 2つの functor の対 $M := (M^*, M_*) : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ が Mackey functor であるとは、 M^* が反変、 M_* が共変で、object $X \in \Sigma$ に対し $M^*(X) = M_*(X)$ ($=: M(X)$) が次をみたすものとする： $(\Sigma$ は pull-back をもつとする)。

$$(M1) \quad \begin{array}{ccc} w \xrightarrow{u} X & & M(w) \xrightarrow{u_*} M(X) \\ w \downarrow & \downarrow f \text{ is pullback} \Rightarrow & w^* \uparrow \quad \cap \quad \uparrow f^* \\ Y \xrightarrow{g} Z & & M(Y) \xrightarrow{g_*} M(Z) \end{array}$$

ここで $f^* := M^*(f)$, $g_* := M_*(g)$ など。

(M2) M^* は Σ の直和図式 $X \rightarrow X+Y \leftarrow Y$ を直積図式 $M(X) \leftarrow M(X+Y) \rightarrow M(Y)$ に写し、始対象 $\subseteq$ 終対象に写す。

Set_G を有限 G -集合のカテゴリ-とすると、 Set_G は有限直和、有限直積をもつ。 Set_G から m_k (加法群のカテゴリ-)への Mackey functor のカテゴリ- $\in \text{Mc}(\text{Set}_G, m_k)$ とする。

補題. $m_k(G) \cong \text{Mac}(\text{Set}_G, m_k)$ 。

Mackey functor $M = (M^*, M_*)$ が Σ 上だけ定義されているとして、 $\alpha(H) := M(H|G)$, $\tau_H^K := M_*(H|G \rightarrow K|G)$, $\rho_H^K := M^*($

$H|G \rightarrow K|G)$ 存在すれば G -functor α を得る. 逆に G -functor α を与えれば,

$M(X) := \left(\prod_{x \in X} \alpha(G_x) \right)^G$ (G -fixed point set),
 ここで, G_x は x の stabilizer, $(\alpha_x)_{x \in X}^g := (\alpha_{xg^{-1}})^g_{x \in X}$
 によ, $z \in \prod \alpha(G_x)$ に作用させる. $f: X \rightarrow Y$ に対し,

$$f_*: (\alpha_x)_x \mapsto \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)/G_y} \alpha_x^{G_y} \right)_y,$$

$$f^*: (\beta_y)_y \mapsto (\beta_{f(x)}^{G_x})_x$$

とする. これによ, M は Mackey functor となる.

この補題によ, G -functor に関する概念は Mackey functor の言葉で書き表わせる. 例えは次は "focal subgroup theorem" の書き換えである.

定理. A が Mackey functor $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_R$ で "ring" であり, X -projective (ie $A(X) \rightarrow A(1)$). M が " A -module" とする. このとき次は完全

$$0 \leftarrow M(1) \xleftarrow{\partial} M(X) \xleftarrow{\partial} M(X^2) \leftarrow \dots$$

ここで $\partial = \sum (-1)^i M_*(\alpha_i)$, $\alpha_i: X^i \rightarrow X^{i-1}$ は face 作用素.

有限群の focal subgroup theorem は $M(X)$ の完全性を意味しうる. もっと高次での完全性は付を意味しうるのである.

補題. Mackey functor は表現可能. 即ち ある preadditive

カテゴリー $\mathcal{S}_p(\Sigma)$ の Mackey functor $\mathcal{S}_p: \Sigma \rightarrow \mathcal{S}_p(\Sigma)$ があ

る, $\forall M \in M_c(\Sigma, B) \exists F: \mathcal{S}_p(\Sigma) \rightarrow B$ s.t. $M = F \circ \mathcal{S}_p$.

と $M_c(\Sigma, B) \cong [\mathcal{S}_p(\Sigma), B]$.

カテゴリー $\mathcal{S}_p(\Sigma)$ は次のように作られる.

$$Ob(\mathcal{S}_p(\Sigma)) = Ob(\Sigma),$$

$$Hom_{\mathcal{S}_p(\Sigma)}(X, Y) = \{ X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y \mid A \in \Sigma \} / \cong.$$

ここで $\cong$ は $X \times Y$ 上の object の同型を意味する. (f', f'')

と (g', g'') の合流は次で決まる (h', h'') である:

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{h''} & B & \xrightarrow{g''} Z \\ & \swarrow & & \downarrow & \\ C & \xrightarrow{h'} & A & \xrightarrow{f''} Y \\ & \downarrow & \text{pull-back} & \downarrow g' \\ & A & \xrightarrow{f''} Y \\ & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ & X & & Y \end{array}$$

有限群の場合, 次のような functor の列がある.

$$Set_{\Sigma}^G \xrightarrow{\quad} \mathcal{S}_p(Set_{\Sigma}^G) \rightarrow H_{\mathbb{R}G} \hookrightarrow M_{\mathbb{R}G}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}X & \xrightarrow{\quad} & X \quad \xrightarrow{\quad} \quad \mathbb{R}X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{f} Y & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} X \xleftarrow{f'} X \xrightarrow{f''} Y \\ (Y \xleftarrow{f'} X \xrightarrow{f''} Y) \end{array} \end{array}$$

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) \mapsto (|f'^{-1}(x)|, |f''^{-1}(y)|)_{x, y}.$$

(上の補題を用いて), G -functor の induction をとて定義できる:

$$\begin{aligned} \text{Set}_f^H & \xrightleftharpoons[\text{res}]{\text{ind}} \text{Set}_f^G \\ \therefore \text{Sp}(\text{Set}_f^H) & \xrightleftharpoons[\text{res}]{\text{ind}} \text{Sp}(\text{Set}_f^G) \\ \therefore m_k(H) & \xrightleftharpoons[\text{res}]{\text{ind}} m_k(G) \quad (\text{Kan extension}). \end{aligned}$$

J. A. Green などは, functor category $[m_{kG}^{\text{op}}, m_k]$ を考えさせる. (しかし $m_k(G) \cong [\text{Sp}(\text{Set}_f^G), m_k]$ や $m_k(G)^{\text{cof}} \cong [H_{kG}, m_k]$ も色々良い性質を持つてゐる. 例えは良が体などのとき, これらのカテゴリ - で既約な object は有限個である.

Mackey functor M があれば, $\text{End}_{\text{Sp}(Z)}(X)$ は $M(X)$ に作用してゐる. 実際 $(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} X)$ の作用を

$$M(X) \xrightarrow{f'^*} M(A) \xrightarrow{f''_*} M(X)$$

で定義すればよい. この作用を G -functor の言葉でいうと, 作用 $[H, x, A, H]: Q(H) \rightarrow Q(H); a \mapsto a^x_A^H$ とするこになる. (Hecke 環の元 $(H \times H)$ の作用は $a \mapsto a^x_{H^x, H^H}$).

モジュラー表現の Brauer 準同型にともなう考える. $D \trianglelefteq N \leq G$ とする. このとき, 対応 $X \mapsto X^D := \{x \in X \mid x\alpha = x \forall \alpha \in D\}$ は functor $\text{Br}: \text{Set}_f^G \rightarrow \text{Set}_f^N$ を与える. これは次の

functor を誘導する:

$$B_r: \mathcal{S}_p(\text{Set}_f^G) \longrightarrow \mathcal{S}_p(\text{Set}_f^N): X \longmapsto X^D.$$

これはいくらも次を誘導する:

$$B_r: \mathcal{M}_R(N) \longrightarrow \mathcal{M}_R(G).$$

$$b_r = Z(B_r): Z(\mathcal{S}_p(\text{Set}_f^G)) \longrightarrow Z(\mathcal{S}_p(\text{Set}_f^N)) \quad (\text{中心}).$$

Hecke category を考えるとき, D が P -部分群 ^($P = \mathcal{H}_R$) のときのみ,

$$B_r: \mathcal{H}_{R,G} \longrightarrow \mathcal{H}_{R,N}: R[X] \longmapsto R[X^D],$$

$$B_r: \mathcal{M}_R(N)^{\text{coh}} \longrightarrow \mathcal{M}_R(G)^{\text{coh}},$$

$$b_r = Z(B_r): Z(\mathcal{H}_{R,G}) \longrightarrow Z(\mathcal{H}_{R,N})$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ Z(\mathcal{H}_{R,G}) & \longrightarrow & Z(\mathcal{H}_{R,N}) : \sum_{g \in G} a_g g \longmapsto \sum_{g \in \mathcal{H}_R(D)} a_g g. \end{array}$$

が誘導され, 最後の b_r は Brauer 準同形である. しかし,

2 B_r は Brauer functor と呼ぶのがふさわしい.

§6. 組合せ論への応用.

組合せ論への応用が当然考えられる. 例えば (P, B) をブローウデグインとし, $A := \{(p, b) \mid p \in b \in B\} \subseteq P \times B$ とおけば自然な写像 $p \leftarrow A \rightarrow B$ がある. これは $\text{Hom}_{\mathcal{S}_p(\text{Set}_f)}(P, B)$ の元とみなせる.

明らかに $\mathcal{S}_p(\text{Set}_f) \cong \text{Mat}_{\mathbb{N}_0}$, $\mathcal{H}_R \cong \text{Mat}_R$. ここで Mat_R は object が有限集合で, $\text{Hom}_{\text{Mat}_R}(X, Y) = \text{Mat}(X \times Y; R)$

($X \times Y$ 型の行列全体). しかし, 2 代数的組合せ論のいくつかの概念や結果を G -functor や Mackey functor という面から見ることもできる. 以下では有限集合のカテゴリ Set_f のかわりに有限 G -集合のカテゴリ Set_f^G で考える. これは有限群 G の作用している組合せ論を研究するのに役立つと思う. 群の作用がない場合は与えられた結合構造から何らかの functor category を作り, そこでも同いように Hecke 環などを調べるということになる. しかしまだ成果は上がっていない.

次は Fischer の不等式である.

定理. (P, B) を 2 - (r, k, r, b, λ) デザインとする. $\underbrace{G \leq \text{Aut}(P, B)}_{\text{where } G \leq \text{Aut}(P, B)}$ 可換環 R において, $r, k, n := r - \lambda$ は可逆と仮定する. $\alpha \in R$ 係数の cohomological G -functor とする. このとき,

$$\bigoplus_{p \in P/G} \alpha(G_p) \text{ は } \bigoplus_{b \in B/G} \alpha(G_b) \text{ の直和因子.}$$

(ここで $p \in P/G$ は完全代表系をとり, G_p は p の stabilizer).

実際, $M: H_{RG} \rightarrow M_R$ を α に対応する functor とする.

$$(r-\lambda)I + \lambda J: RP \xrightarrow{A} RB \xrightarrow{\tilde{A}} RP$$

は同型 ($\det = rk(r-\lambda)^{r-1} \in R^*$) をから, M で飛ばすと, 定理を得る.

$\alpha = \alpha_a$ とすることにより、有名な $|P/G| \leq |B/G|$ を得る。また RP/RB もわかる。なお A, A' の誘導する写像は次で与えられる:

$$A: \left(\bigoplus_{p \in P} \alpha(G_p) \right)^G \longrightarrow \left(\bigoplus_{b \in B} \alpha(G_b) \right)^G$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha_p)_{p \in P} \longmapsto \left(\sum_{p \in b/G_b} \alpha_p G_{pb} \right)_{b \in B},$$

$$A': (\beta_b)_{b \in B} \longmapsto \left(\sum_{\substack{b \in B/G_p \\ p \in b}} \beta_b G_{pb} \right)_{p \in P}.$$

ここで $p \in b/G_b$ は p が G_b の b の G_b -orbit の完全代表系を動くことを意味する。

最後に強正則グラフ (X, E) を考える。 $G \leq \text{Aut}(X, E)$ とする。 $E = \bar{E} \subseteq X \times X$ だが $(X \leftarrow E \rightarrow X) \in \text{End}_{\mathcal{S}_p(\text{Set}_f G)}(X)$ である。しかし $\mathcal{S}_p(\text{Set}_f G)$ では計算がうまくゆかない。 H_{RG} を考えるを得ない。 $X \leftarrow E \rightarrow X$ を H_{RG} に落とすと

$$A: RX \rightarrow RX; x \longmapsto \sum_{y \in \Gamma(x)} y$$

となる。ここで $\Gamma(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in E\}$ 。仮定により $|\Gamma(x)| = k = \text{const}$ 。 A を行列で書いたものが結合行列である。パラメータ $n := |X| = 1 + k + \ell$, λ, μ は次の図で定まる:

$$a \quad \Gamma(a) \quad \Lambda(a)$$

$$x \leftarrow k \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \quad \mu \rightarrow \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right)$$

$$n = 1 + k + \ell$$

すると, A の最小多項式は

$$(A - k)(A^2 - (\lambda - \mu)A - (k - \mu)) = 0.$$

また $\mathcal{Q}$ を cohomological G -functor とすると, A は次の写像を誘導する:

$$P_A: \left(\bigoplus_{x \in X} \mathcal{Q}(G_x) \right)^G \longrightarrow \left(\bigoplus_{x \in X} \mathcal{Q}(G_x) \right)^G$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha_x)_{x \in X} \longmapsto \left(\sum_{g \in \Gamma(x)/G_x} \alpha_g \cdot G_{xg} \right)_{x \in X}.$$

ここで G が X 上可移で, $H := G_\infty$, $\infty \in X$ とすると,

$$P_A: \mathcal{Q}(H) \rightarrow \mathcal{Q}(H); \alpha \mapsto \sum_{H^g H \in \mathcal{H}/H; \infty \neq g \in \Gamma(\infty)} \alpha_g \cdot H^g \cdot H$$

しかるに, G が X 上 rank 3 なら, これは Hecke 環の元 $(H^g H)$ の作用 $\alpha \mapsto \alpha_g \cdot H^g \cdot H$ と一致する.

P_A は A と同じ多項式を 0 にするので, G 集合でない場合に對し, G の作用をもつ強正則グラフを研究できる. 例えば G が素数位数の巡回群で X 上正則に作用する場合を考える. すると $P = \sum_{g \in G; \infty \neq g \in \Gamma(\infty)} g \in \mathbb{Q}G$ も A と同じ多項式を 0 にする. $\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ をから整数論的議論により (カウス和), (X, E) が Paley グラフの dual となる.

次に G が X 上可移, $H = G_\infty (\infty \in X)$, $P \in \text{Syl}_p G$, $N_G(P) \subseteq H$, さらに P は可換と仮定する. G -functor

$$\alpha: H \mapsto H_1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong H/H^p[H, H]$$

をとる. transfer の計算によつて, $\rho_A = 0$ となる. したがって, $2 \neq 0$ が $(x - \lambda)(x^2 - (\lambda - \mu)x - (\lambda - \mu)) = 0$ の $GF(p)$ での根となる. 結局, 上の仮定のもとで

$$\lambda \equiv 0 \text{ or } \mu \pmod{p} \quad \text{if } \exists H_0 \overset{p}{\triangleleft} H$$

となる.

§ 8. あとがき.

Mackey functor の理論はさらに発展する. A は有限カテゴリリ - $\mathcal{A}$ とし, $\varphi: \mathbb{Z}[A/\sim] \rightarrow \mathbb{Z}^{A/\sim}; a \mapsto (|A(a, a)|)_i$ とおき, A が unique epi-mono 分解性をもつ, $\forall a \in A \quad \forall o \in \text{Aut}(a)$ に対する 1_a と o の等化 $a/\langle o \rangle$ の存在を仮定すると, φ は単射で有限余核をもつ, φ の像は部分環となる. したがって $\mathbb{Z}[A/\sim]$ は環構造をもつ. これを Abstract Burnside ring とし, これから Abstract Hecke カテゴリリ -, Abstract Mackey functor が順に定義される. この理論は数値計算法や母関数の理論 (Rota) とも接しつづける. 近く論文として出る予定である.

References for Transfers.

- [Di.73] Tammo tom Dieck, Equivariant homology and Mackey functors, Math. Ann. 206 (1973), 67-78.
- [Di.79] Tammo tom Dieck, "Transformation groups and representation theory", Lecture Notes in Math., 766, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [Dr.69] Andreas Dress, A characterization of solvable groups, Math. Z. 110 (1969), 213-217.
- [Dr.71] Andreas Dress, Notes on the Theory of Representations of Finite Groups I: The Burnside ring of a finite groups and some AGN-applications, Multicopied lecture notes, Bielefeld, 1971.
- [Dr.72] Andreas Dress, Contributions to the theory of induced representations, in "Algebraic K-Theory II", Proc. Battelle Institute Conference 1972, Springer Lecture Notes in Math., 342 (1973), 183-240.
- [Dr.74] Andreas Dress, On relative Grothendieck rings, Springer Lecture Notes in Math., 488 (1974), 79-131.
- [Fo.84] Timothy J. Ford, Hecke actions on Brauer groups, J. Pure and Applied Algebra 33 (1984), 11-17.
- [Gl.81] David Gluck, Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial

complex, Illinois J. Math. 25 (1981), 63-67.

[Gr.64] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, J. Algebra, 1 (1964), 73-84.

[Gr.71] J. A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, J. Pure and Applied Algebra, 1 (1971), 41-77.

[Hu.79] D. Husemoller, Burnside ring of a Galois group and the relations between zeta functions of intermediate fields, The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), pp. 603-610, Proc. Symp. in Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1980.

[La.68] Tsit-Yuan Lam, Induction theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e serie, 1 (1968), 91-148.

[RS.82] Klaus Roggenkamp and Leonard Scott, Hecke actions on Picard groups, J. Pure and Applied Algebra, 26 (1982), 85-100.

[Sa.82] Hiroki Sasaki, Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G-functors, J. Algebra, 79 (1982), 98-120.

[Wi.60] Helmut Wielandt, Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe, Math. Zeitschr., 73 (1960), 146-158.

[Yo.78] Tomoyuki Yoshida, Character-theoretic transfer, J.

Algebra, 52 (1978), 1-38.

[Yo.80] Tomoyuki Yoshida, On G-functors (I):Transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J., 9 (1980), 222-257.

[Yo.83a] Tomoyuki Yoshida, On G-functors (II):Hecke operators and G-functors, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 179-190.

[Yo.83b] Tomoyuki Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra, 80 (1983), 90-105.