

Smooth 2-knots in $S^2 \times S^2$

九州大・理 佐藤 好久

(Yoshihisa Sato)

§ 1. Introduction

$S^4, \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2$ は最も基本的な 1-connected, closed, oriented 4-manifolds であり、そして余次元 2 の manifold (例えば、球面) の埋め込み問題は重要な研究対象であると思われる。 S^4 の中への S^2 の埋め込みの理論は通常の結び目理論であり、また、 $\mathbb{CP}^2$ の中への自己交点数 1 の S^2 の locally flat な埋め込みは、位相的には、 $(\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^1)$ であることが知られている。本稿では、 $S^2 \times S^2$ の場合について考え、null-homotopic でない一般 knot について考察することにする。

$\xi \in H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$ を実現する $S^2 \times S^2$ の中へなめらかに埋め込まれた 2-sphere S に対して、 S 又は空間対 $(S^2 \times S^2, S)$ を、 ξ を実現する $S^2 \times S^2$ 内の (smooth) 2-knot と呼ぶことにする。この時、Kuga によって次の証明された。

Theorem 1.1 (1984 [5]) $\zeta = [S^2 \times *], \eta = [* \times S^2]$

を、 $H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元とし、 S を $p\zeta + q\eta$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) を実現する $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot とする。この時、 $|p| \leq 1$ 又は $|q| \leq 1$ である。 $\square$

よ、て、長い間、問題になっていた $S^2 \times S^2$ 内の 2-knots と 2次元 homology classes との関係は、こうして完全に解決されたので、次の事が自然に問題となる。

Problem $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot の homeomorphism type (又は diffeomorphism type) を分類せよ。

この問題を考えるにあたり、まず $S^2 \times S^2$ 内の standard な 2-knots を用意する必要がある。即ち、 $S^2 \times S^2$ の cross-section は p 個の disjoint な fibres と transverse に 1 点ずつで交わるので、その交点のところで連結和をとることにより、 $\zeta + p\eta$ を実現する $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot Σ_p を得る。各 $p \geq 0$ に対して、この Σ_p を、 $\zeta + p\eta$ を実現する $S^2 \times S^2$ 内の standard な 2-knot とする。

§2 で、位相的に Σ_p であるための必要十分条件を考え、§3 では、 ζ を実現する $S^2 \times S^2$ 内の non-standard な 2-knots を構成する。また、得られたのと同様の結果が、locally flat な埋め込みの場合にも成り立つことを注意しておく。

§ 2. Main Theorem

まず次のことに注意する。

Proposition 2.1. S を $pS+q?$ を実現する $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot とする。この時、

$$H_1(S^2 \times S^2 - S; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } |p|=1 \text{ or } |q|=1 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{if } pq=0 \text{ and } m=|p|+|q| \neq 1 \end{cases}$$

▮

従って、特に補空間の基本群が自明である 2-knot $(S^2 \times S^2, S)$ は、 $\pm pS \pm q?$ or $\pm S \pm p?$ の型の元を実現する。

本篇で紹介する結果は、次の弱い意味での unknotting 定理である。

Theorem 2.1. S を $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot とする。この時、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$ であるための必要十分条件は、ある非負整数 p に対して、pairwise homeomorphism

$$\varphi: (S^2 \times S^2, S) \longrightarrow (S^2 \times S^2, \Sigma_p)$$

が存在することである。

▮

また、この定理は次の様に言い換えることもできる。

Corollary 2.1 p を任意の非負整数とする。この時、その自己交点数が $\pm 2p$ で、補空間の基本群が自明であるような $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot は、位相的に唯一つ存在する。 $\square$

$S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S は、次のように分解できる。 $E(S)$ を S の exterior, m を S の自己交点数とする。また、 $D(m)$ を Euler 数 m の S^2 上 D^2 -bundle とし、 $\nu: S^2 \rightarrow D(m)$ を zero-section とする。この時、 $(S^2 \times S^2, S) = (E(S) \cup_\nu D(m), \nu(S^2))$ 。ここに、 $\gamma: L(m, m-1) \rightarrow L(m, m-1)$ は、貼り合わせの diffeomorphism である。 ($L(0, -1) = S^2 \times S^1$ 。) 故に、Isotopy 拡張定理により、 $E(S)$ を exterior にもつ $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot は、 γ の isotopy class にのみ依存する。

$\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$ と仮定する。Prop. 2.1. により、一般性を失うことなく、ある非負整数 p に対して S は $\pm 2p$ を実現するとしてよい。この時、 $H_2(E(S); \mathbb{Z}) \cong H_2(E(S), \partial E(S); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 。そして、 $E(S)$ の intersection form $(H_2(E(S); \mathbb{Z}), \cdot)$ が $(\mathbb{Z}, (2p))$ であることが容易に確かめられる。ただし、 $(2p): \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は、 $(2p)(1, 1) = 2p$ で定義される bilinear form である。故に $E(S)$ は、lens space $L(2p, 2p-1)$ を境界にもち、その intersection form が $(\mathbb{Z}, (2p))$ である 1-connected compact 4-manifold である。[2] の結果をみると、一般にこのような 4-manifold

は、位相的に有限個存在する。特に、 $p=0, 1$, 素数の時は、1個である。(この個数の値は p によってのみ定まる数である。) しかし、今の場合、exterior $E(S)$ は $S^2 \times S^2$ に埋め込まれた 4-manifold であり、このことから、 $E(S)$ は p に関する条件なしに、位相的に $D(2p)$ であることがわかる。よって定理を証明するには、貼り合わせの写像 γ の isotopy class を調べればよい。lens space の diffeotopy group に関する [1], [3], [4] の結果により、このような状況下では、 γ は $D(2p)$ へ拡張することができるとわかる。こうして定理は証明される。

また、この証明の方針からわかるように、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$ なる条件のもとで、 $E(S)$ が $D(2p)$ に diffeomorphic であることが言えるならば、上の定理は、diffeomorphism に対して成立することになる。

S を $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot, K を S^4 内の 2-knot とする。この時、この 2つの 2-knot の連結和は、 $S^2 \times S^2$ 内のもう一つ別の 2-knot $(S^2 \times S^2, S') = (S^2 \times S^2, S) \# (S^4, K)$ を与える。しかし、この連結和が常に新しい $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot を与えるとは限らない。実際、

Corollary 2.2. S を $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$ である 2-knot とする。この時、任意の S^4 内の 2-knot K に対して、

$$(S^2 \times S^2, S) \# (S^4, K) \underset{\text{homeo.}}{\cong} (S^2 \times S^2, S)$$

(proof). $(S^2 \times S^2, S') = (S^2 \times S^2, S) \# (S^4, K)$ とする。また、 $E(S)$, $E(S')$, $E(K)$ を各々 S, S', K の exteriors とする。この時、 $E(S') \cong E(S) \cup_T E(K)$ 。ただし、 $T = \partial E(S) \cap \partial E(K)$ は meridinal solid torus である。 $\pi_1(E(S)) = 1$ であり、 $\pi_1(E(K))$ は weight 1 なので、van Kampen の定理により $\pi_1(E(S')) = 1$ 。よって定理により結果がわかる。 $\blacksquare$

Remark 2.1 $\mathcal{K}_2$ を S^4 内の 2-knots の全体とする。

$$I(S^2 \times S^2, S) = \{(S^4, K) \in \mathcal{K}_2 \mid (S^2 \times S^2, S) \# (S^4, K) \underset{\text{diffeo.}}{\cong} (S^2 \times S^2, S)\},$$

$$I'(S^2 \times S^2, S) = \{(S^4, K) \in \mathcal{K}_2 \mid (S^2 \times S^2, S) \# (S^4, K) \underset{\text{homeo.}}{\cong} (S^2 \times S^2, S)\}.$$

とおく。この時、[7] 中の Lemma 6.27 により、次の条件(*)

をみたす $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S に対して、 $I(S^2 \times S^2, S) = \mathcal{K}_2$.

である。: (*) 自己交点数 0 の $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S' が存在して S は S' と 1 点で transverse に交わる。

しかし、この条件(*)をみたす 2-knot S は、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$ である。そこで条件(*)を除いた場合について考えると、上の系により、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$ をみたす $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S に対して $I'(S^2 \times S^2, S) = \mathcal{K}_2$ である。 $\blacksquare$

§ 3. Examples of 2-knots in $S^2 \times S^2$

$S^2 \times S^2$ 内の 2-knot の構成を [7] と同様の方法です。即ち、 K を S^4 内の 2-knot とし、 C を S^4 内になめらかに埋め込まれた circle とする。ただし、 C は 2-knot K と交わらないとする。この時、 C は S^4 内に standardly に埋め込まれているとしてよく、 C の exterior は、 $S^2 \times D^2$ である。 K はこの $S^2 \times D^2$ に含まれているので、この 2-knot K によって、 $S^2 \times S^2 = S^2 \times D^2 \cup S^2 \times D^2$ 内の 2-knot S を与えることにする。van Kampen の定理から、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S)$ は $\pi_1(S^4 - K)/H$ に同型である。ただし、 H は $[C] \in \pi_1(S^4 - K)$ で生成された normal closure である。

Proposition 3.1. C が $S^4 - K$ にて、 K の meridian に homologous であるならば、 K と C から構成された $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S は $\mathbb{Z}$ を実現する。 $\square$

Remark 3.1. 一般に、 C が $S^4 - K$ にて、 $(K \text{ の meridian })^p$ に homologous であるならば、 S は $p\mathbb{Z}$ を実現する。 $\square$

Example 3.1. K を trefoil knot の 5-twist spun 2-knot とする。この時、 $\pi_1(S^4 - K) \cong \mathbb{Z} \times \mathcal{D}$ 。ただし、 $\mathcal{D} = \langle a, b ; a^3 = b^5 = (ab)^2 \rangle$ (the binary dodecahedral group)。

$\mathbb{Z}$ は K の meridian に homologous な元 μ で生成される無限巡回群である。今、circle C を $\mu \in \pi_1(S^4 - K)$ を実現するものとし、 H を μ で生成される normal closure とする。これら K と C から構成された $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S は ζ を実現し、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) \cong \pi_1(S^4 - K)/H \cong \mathbb{Z}$ である。 $\blacksquare$

Example 3.2. K を S^3 内の knot とし、 m と l を K の meridian と longitude とする。この時、 K 上 $\frac{1}{n}$ -surgery して、得られる 3-manifold $M(K; \frac{1}{n})$ は、homology 3-sphere で、 $\pi_1(M(K; \frac{1}{n})) \cong \pi_1(S^3 - K)/H$ (ただし、 H は $ml^n \in \pi_1(S^3 - K)$ で生成される normal closure) である。今、 L を K の spun 2-knot とすると、 $\pi_1(S^4 - L) \cong \pi_1(S^3 - K)$ である。 $\bar{m}, \bar{l} \in \pi_1(S^4 - L)$ をそれぞれ、この同型により $m, l \in \pi_1(S^3 - K)$ に対応するものとする。 $S^4 - L$ 内の circle C を $\bar{m}\bar{l}^n \in \pi_1(S^4 - L)$ を実現するものとする、これら L と C から構成される $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot S は、 ζ を実現し、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) \cong \pi_1(S^4 - L)/H' \cong \pi_1(S^3 - K)/H \cong \pi_1(M(K; \frac{1}{n}))$ である。 $\blacksquare$

従って、この Example から次がわかる。

Proposition 3.2. Dehn surgery で得られるすべての homology 3-sphere M に対して、 ζ を実現し、その knot group が $\pi_1(M)$ に同型であるような $S^2 \times S^2$ 内の 2-knot が存在する。 $\blacksquare$

更に、この Proposition は次のことも意味している。

Proposition 3.3. Dehn surgery で得られるすべての homology 3-sphere M に対して、その基本群が $\pi_1(M)$ に同型であるような homology 4-sphere が存在する。 $\square$

Remark 3.2. $\mathcal{D}$ の center は $C = a^3$ で生成される。そこで circle $C \subset S^4 - K$ (K は Example 3.1 の 2-knot) として $\mu C^{-1} \in \pi_1(S^4 - K)$ を実現するものをとると、この場合も、 K と C から構成される 2-knot S は、 ζ を実現し、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) \cong \mathcal{D}$ 。

また、Example 4.2 において、 K として trefoil knot をとり、 C として、 $\bar{m} \bar{l} \in \pi_1(S^4 - L)$ を実現するものをとると、これらから構成される 2-knot S も ζ を実現し、 $\pi_1(S^2 \times S^2 - S) \cong \pi_1(\Sigma(2,3,5)) \cong \mathcal{D}$ である。

これら 3 つの $S^2 \times S^2$ 内の 2-knots は、違う材料 (S^4 内の 2-knots と circles) から構成されたものであるが、このようにどれも ζ を実現し、その補空間の基本群が $\mathcal{D}$ に同型である。これらは、同じ 2-knot なのだろうか、それとも違うのだろうか？ $\square$

References

- [1] F.Bonahon : Difféotopies des espaces lenticulaires,
Topology 22 (1983), 305-314.
- [2] S.Boyer : Simply-connected 4-manifolds with a given
boundary, Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), 331-357.
- [3] H.Gluck : The embedding of two-spheres in the four-
sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308-333.
- [4] C.D.Hodgson : Involutions and isotopies of lens spaces,
Master Thesis, Univ. of Melbourne (1981).
- [5] K.Kuga: Representing homology classes of $S^2 \times S^2$,
Topology 23 (1984), 133-137.
- [6] Y.W.Lee : Contractibly embedded 2-spheres in $S^2 \times S^2$,
Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 280-282.
- [7] R.Mandelbaum : Four-dimensional topology : an
introduction, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 1-159.