

2次元トーラス上の Furstenberg 変換と その C^* 接合積について

琉大理 小高一則 (Kazunori Kodaka)

1. 準備

X を compact 空間, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体からつくられる C^* 環, ϕ を X 上の同相写像とし, ϕ から定まる $C(X)$ 上の自己同型写像も同じ ϕ を使って表わす。次のような集合を考える。

$$G_0(\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ は } \phi \text{ の固有値で } |\lambda| = 1\}$$

$$G_1(\phi) = \{f \in C(X) \mid \text{ある } \lambda \in G_0(\phi) \text{ に対して } f \circ \phi = \lambda f \text{ かつ } |f| = 1\}$$

$\vdots$

$$G_j(\phi) = \{g \in C(X) \mid \text{ある } f \in G_{j-1}(\phi) \text{ に対して } g \circ \phi = f g \text{ かつ } |g| = 1\}$$

定義 $\bigcup_{j=0}^{\infty} G_j(\phi)$ から生成される C^* 環が $C(X)$ になるとき, ϕ は topologically quasi-discrete spectrum をもつという。topologically quasi-discrete spectrum をもつという性質は位相共役に関して不変である。

θ を $(0, 1)$ に属す無理数とし、 $f \in 1$ 次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数とする。2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の同相写像 ϕ_f を

$$\phi_f(x, y) = (e^{2\pi i \theta} x, e^{2\pi i f(x)} xy) \quad , \quad x, y \in \mathbb{T}$$

と定義する。 ϕ_f を Furstenberg 変換という。 $f=0$ のとき、つまり、

$$\phi_0(x, y) = (e^{2\pi i \theta} x, xy) \quad x, y \in \mathbb{T}$$

を Anzai 変換という。

Rouhani [5] により ϕ_0, ϕ_f は minimal であり ϕ_0 は topologically quasi-discrete spectrum をもつことがわかる。

定義 $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数 f に対して

$$f(x) = g(x) - g(e^{2\pi i \theta} x) + C \quad \text{a.e.}$$

となる実数値可測関数 g と、実数 C とが存在するとき f は $e^{2\pi i \theta}$ に関して split するという。

定義 無理数 $\theta \in (0, 1)$ が Liouville 数であるとは、

$$|e^{2\pi i n \theta} - 1| \geq \frac{C}{n^r} \quad n \in \mathbb{N}$$

となるような $C > 0, r > 1$ が存在しないことである。

Furstenberg 変換 ϕ_f から定まる接合積 $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\phi_f} \mathbb{Z}$ を

$A(\phi_f)$ で表わす。Rouhani は [5] の中で次のような結果を示している。

結果1. ある Liouville 数 θ に対しては、Furstenberg 変換 ϕ_f が topologically quasi-discrete spectrum をもたないが、uniquely ergodic であるような $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数 f が存在する。

結果2. $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数 f が $e^{2\pi i \theta}$ に関して split するならば、Furstenberg 変換 ϕ_f は uniquely ergodic である。

結果1に対して、

問題1. ϕ_{f_1}, ϕ_{f_2} を同じ無理数 θ に関する2つの Furstenberg 変換としたとき、 $A(\phi_{f_1}) \cong A(\phi_{f_2})$ であつ ϕ_{f_1} が topologically quasi-discrete spectrum をもつならば、 ϕ_{f_2} も topologically quasi-discrete spectrum をもつか。

結果2に対しては、

問題2. $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数 f が $e^{2\pi i \theta}$ に関して split であるという条件を除いても、 ϕ_f はなお uniquely ergodic になるか。

という2つの問題を Rouhani [5] は述べている。以下、上の問題に対してわかったことを述べる。

2. Topologically quasi-discrete spectrum と位相共役問題 1 については、次のようなことがわかる。

定理1. 次の3つの条件は同値。

- (1) ϕ_f は ϕ_0 と位相共役である。
- (2) ϕ_f は、topologically quasi-discrete spectrum をもつ。
- (3) $\exists g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ の実数値連続関数、

$$\text{s.t. } g(x) - g(e^{2\pi i \theta} x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}} f(z) dz \quad x \in \mathbb{T}$$

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) : ϕ_0 は topologically quasi-discrete spectrum をもち、 ϕ_f は ϕ_0 と位相共役だから、 ϕ_f も topologically quasi-discrete spectrum をもつ。

(2) $\Rightarrow$ (3) : Rouhani [5, Theorem 2.1] あるいは $G_1(\phi_f)$ を定義に従って計算すると、

$$G_1(\phi_f) = \{au^k \mid k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}, |a|=1\}$$

となる。ここで、 u は $u(x, y) = x$ $x, y \in \mathbb{T}$ で定まる $\mathbb{T}$ 上の連続関数。 $G_0(\phi_f) \cup G_1(\phi_f)$ では、 $C(\mathbb{T})$ を生成しないので、 ϕ_f が topologically quasi-discrete spectrum をもつ。

とから、 $G_2(\phi_f)$ には $G_0(\phi_f) \cup G_1(\phi_f)$ とは別の元が存在する。
従って、ある $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して

$$\exists h \in C(\mathbb{T}^2) \text{ s.t. } h \circ \phi_f = a u^k h, |h|=1.$$

h は $C(\mathbb{T}^2)$ の unitary なので

$$h(x, y) = x^m y^n e^{2\pi i S(x, y)}$$

と書ける。ここで、 m, n は整数で S は、 $\mathbb{T}^2$ 上の実数値連続関数。このとき、 $h \circ \phi_f = a u^k h$ なので、 $m=k$ かつ

$$e^{2\pi i \{S(\phi_f(x, y)) - S(x, y) + kf(x)\}} = a e^{-2\pi i m\theta}$$

従って、

$$S(\phi_f(x, y)) - S(x, y) + kf(x) = b + p(x, y)$$

ここで、 p は $\mathbb{T}^2$ 上の整数値関数であり、 b は実数。上の式から p は連結集合 $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数であることがわかるから、定関数である。よって、

$$S(\phi_f(x, y)) - S(x, y) + kf(x) = c \quad x, y \in \mathbb{T}$$

ここで、 c は実定数。 ϕ_f が measure-preserving であることを上の式に用いると、

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = \frac{c}{k}$$

更に、 $x \in \mathbb{T}$ に対して、

$$g(x) = \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}} S(x, y) dy$$

と定める。このとき g は、 $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数になり、

$$g(e^{2\pi i \theta} x) - g(x) + f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}} S'(e^{2\pi i \theta} x, y) dy - \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}} S'(x, y) dy + \int_{\mathbb{T}} f(x) dy \\
&= \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}} S'(e^{2\pi i \theta} x, e^{2\pi i f(x)} x) dy - \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}} S'(x, y) dy + \int_{\mathbb{T}} f(x) dy \\
&= \frac{1}{k} \int_{\mathbb{T}} \{ S'(\phi_f(x, y)) - S'(x, y) + k f(x) \} dy \\
&= \frac{C}{k} = \int_{\mathbb{T}} f(z) dz
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$g(x) - g(e^{2\pi i \theta} x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}} f(z) dz \quad x \in \mathbb{T}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1): $\mathbb{T}^2$ 上の同相写像 ψ と

$$\psi(x, y) = (e^{2\pi i \gamma} x, e^{2\pi i f(x)} y) \quad x, y \in \mathbb{T}$$

と定める。ここで、 $\gamma = \int_{\mathbb{T}} f(z) dz$ 。このとき、

$$\phi_0 \circ \psi = \psi \circ \phi_f$$

となる。よって、 ϕ_0 と ϕ_f とは 位相共役。 (証終)

3. Unique ergodicity

講演のとき、竹崎先生に "間違い" と指摘されました。

従って、予稿集の定理2

「 $\mathbb{T}$ 上の任意の実数値連続関数 f に対して $A(\phi_f)$ は、unique tracial state をもつ。」

は、成立するかどうかわかりません。 C^* -乗積 $A(\phi_f)$ が、

unique trivial state をもつということと、 ϕ が uniquely ergodic であることは、今の場合、Tomiyama [6, Corollary 3.3.10] により同値です。問題2について、次のことは成り立つ。

命題2. f は $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数とする。 f に対して、

$$\exists g \in L^\infty(\mathbb{T}), \exists \lambda \in \mathbb{T}$$

$$\text{s.t. } e^{2\pi i f(x)} g(e^{2\pi i \theta} x) = \lambda g(x), |g(x)| = 1 \quad x \in \mathbb{T}$$

であると仮定する。このとき、 f より定まる Furstenberg 変換 ϕ は、uniquely ergodic である。

証明は、Rouhani の結果2と同様なので省く。また、講演のときに述べた、“間違った補題”

「任意の実数値連続関数 f に対して

$$(*) \quad \exists g \in L^\infty(\mathbb{T}), \exists \lambda \in \mathbb{T}$$

$$\text{s.t. } e^{2\pi i f(x)} g(e^{2\pi i \theta} x) = \lambda g(x), |g(x)| = 1 \quad x \in \mathbb{T}$$

は成り立ちません。このことは、Baggett [1, Theorem 2] とそれに続く Remark よりわかります。以下にその Remark を書くと、

Remark. (Baggett [1]) 任意の無理数 θ に対して、 $\mathbb{T}$ 上の実数値連続関数 f が、上の条件 (*) を満たす。

$$\Leftrightarrow f \text{ が、 } f(x) = \sum_{n=-N}^N a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{T}$$

という多項式の形で書くことができる。

Furstenberg 変換の unique ergodicity については、いろいろな人により研究がなされている。Hellekalek and Larcher [3] により次のことは、わかる。

定理 (Hellekalek and Larcher [3, Corollary 7]) $\mathbb{T}$ 上の実数値関数 f が、連続的微分可能で $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = -\frac{1}{2}$ ならば、 f より定まる Furstenberg 変換 ϕ_f は、uniquely ergodic である。

この定理より、ある無理数 θ に対しては $e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{T}$ に関して split できないが、Furstenberg 変換 ϕ_f が uniquely ergodic になるような $\mathbb{T}$ 上の実数値連続的微分可能関数 f が存在することがわかる。

4. Topologically quasi-discrete spectrum をもたない Furstenberg 変換

ここでは、任意の無理数 θ に対して、topologically quasi-discrete spectrum をもたないが、uniquely ergodic であるような Furstenberg 変換 ϕ_f をつくる。

θ が無理数なので、次の条件

$$|e^{2\pi i n_j \theta} - 1| < \frac{1}{j} \quad j = 1, 2, \dots$$

を満たす自然数の狭義の単調増加列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ をつくること
ができる。数列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{j} (1 - e^{2\pi i n_j \theta}) & n = n_j \\ \frac{1}{j} (1 - e^{-2\pi i n_j \theta}) & n = -n_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する。任意の $x \in \mathbb{T}$ に対して、 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$

とおくと、 $n = \pm n_j$ に対して

$$|a_n| = \frac{1}{j} |1 - e^{2\pi i n_j \theta}| < \frac{1}{j^2}$$

だから、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ は一様収束する。従って、 f は $\mathbb{T}$ 上の実
数値連続関数であり $a_0 = 0$ より $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0$ である。

補題3. $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, f を上で定めたものとする。
方程式

$$g(x) - g(e^{2\pi i \theta} x) = f(x) \quad x \in \mathbb{T}$$

を考える。このとき、上の方程式は 実数値 $L^2(\mathbb{T})$ -解 とも
つか、実数値 $C(\mathbb{T})$ -解は ない。

(証明) 数列 $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{j} & n = \pm n_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおく。任意の $x \in \mathbb{T}$ に対して $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n x^n$ とおくと、
 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n x^n$ は L^2 -norm で収束するから $g \in L^2(\mathbb{T})$ であり
 実数値関数であることがわかる。更に直接計算するとより、

$$g(x) - g(e^{2\pi i \theta} x) = f(x) \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{T})$$

であることもわかる。次に、上の方程式が $C(\mathbb{T})$ -解 g をも
 つと仮定する。このとき g の Fourier 級数は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n \theta}} x^n + c$$

に等しい。そこで、 c は定数。 g は連続なので $x=1$ で

Cesàro summable である。ところが、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n \theta}} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

となり、 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ は Cesàro summable でないから矛盾。

ゆえに $C(\mathbb{T})$ -解は、存在しない。 (証終)

定理4. 上で定めた ϕ より定まる Furstenberg 変換 ϕ は、
 topologically quasi-discrete spectrum をもたないが、uniquely
 ergodic である。

(証明) ϕ_θ が uniquely ergodic であることは、命題2という
 よりも Rouhani の結果2と補題3より明らか。また、 $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0$
 だから、定理1と補題3より ϕ_θ が topologically quasi-discrete
 spectrum をもたないことがわかる。 (証終)

参考文献

- [1] L. Baggett, On functions that are trivial cocycles for a set of irrationals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 104 (1988), 1212-1215.
- [2] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transformation of the torus, *Amer. J. Math.*, 83 (1961), 573-601.
- [3] P. Hellekalek and G. Larcher, On the ergodicity of a class of skew products, *Israel J. Math.*, 54 (1986), 301-306.
- [4] K. Kodaka, Anzai and Furstenberg transformations on the 2-torus and topologically quasi-discrete spectrum, *Canad. Math. Bull.*, 38 (1955), 87-92.
- [5] H. Rouhani, A Furstenberg transformation of the 2-torus without quasi-discrete spectrum, *Canad. Math. Bull.*, 33 (1990), 316-322.
- [6] J. Tomiyama, Invitation to C^* -algebras and topological dynamics, *World Sci.*, Singapore, 1987.