

Asymptotic expansion of an oscillating integral on a hypersurface

東工大物理 橋本直樹 (Naoki Hashimoto)

$(f, g) : (\mathbf{R}^n, \vec{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \vec{0})$ を $\mathbf{R}^n$ の原点の近傍での解析関数の芽とする。この小論では、 g は、原点の近傍で smooth と仮定する。このとき $f(x)$ を phase 関数、 $g(x) = 0$ を束縛方程式とした振動積分

$$(1) \quad I(\tau, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)} \delta(g(x)) \varphi(x) dx$$

を考え、この積分の $\tau \rightarrow \infty$ での漸近展開を求めることを目的とする。ここで、 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ であり、また $\delta(g(x))$ は、拘束 $g(x) = 0$ を表す "delta" 関数である。この種の振動積分は、数理物理、または理論物理学にしばしば登場するものである。(1) の振動積分の漸近展開の存在証明は、Malgrange[1]、または、Jeanquartier[2]の方法により容易に示せるので、その漸近展開を具体的に求めることが問題となる。そのために、Varchenko[3]の方法と同様に、トーラス埋め込みの方法を用いて、その展開を構成する。ここでは、トーラス埋め込みの記号、方法等は Oka[4,5]の理論に従って計算する。

$h(z) = \sum a_\nu z^\nu$ を $\mathbf{C}^n$ における解析関数としたとき、 $\Gamma_+(h)$ で Newton 多面体、 $\Gamma(h)$ で Newton 図形、 $\Gamma^*(h)$ でその双対 Newton 図形を表す。 $P = {}^t(p_1, \dots, p_n)$ を dual weight vector としたとき、 $P(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ ($x_i \in \mathbf{R}^n$) として次の量を定義する。

$$d(P; h) = \min\{P(x); x \in \Gamma_+(h)\},$$

$$\Delta(P; h) = \{x \in \Gamma_+(h); P(x) = d(P; h)\}.$$

また、 $h_P = h_{\Delta(P;h)} = \sum_{\nu \in \Delta(P;h)} a_\nu z^\nu$ を face function という。振動積分 (1) では、 $f(x)$ 、 $g(x)$ が実数値実解析関数として与えられるが、その変数を complex に拡張して、複素解析関数としての complete intersection variety に対するトーラス埋め込みの理論 (Khovansky[6], Oka[5]) を用いる。その結果得られる toric variety $X(\Gamma)$ ($\Gamma = \Gamma(f, g)$) の実形を $Y(\Gamma)$ と書くことにする。これは、その $X(\Gamma)$ での座標変換がすべて実で書かれることから意味を持っている。

定義 $(f, g) : (\mathbf{R}^n, \vec{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \vec{0})$, $f(0) = g(0) = 0$ としたとき $W := \{x \in U \subset \mathbf{R}^n; f(x) = g(x) = 0\}$ が Newton 図形に関して原点で non-degenerate complete intersection variety とは、任意の dual vector P に対して、2-form $df_P \wedge dg_P$ が $W^*(P) = \{x \in \mathbf{R}^n; f_P = g_P = 0\}$ 上で 0 にならないこととする。今、任意の dual vector $P_i = {}^t(p_{i1}, \dots, p_{in})$ に対して $|P_i| = \sum_{j=1}^n p_{ij}$ と書くことにする。

定義 $\alpha(P_i, g) := |P_i| - 1 - d(P_i, g)$ としたとき resolution $\pi : Y(\Gamma) \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して

$$M_Y = \left\{ (d(P_i, f), \alpha(P_i, g)) \mid d(P_i, f) > 0, (d(P_i, f), \alpha(P_i, g)) \neq (1, 0), \right. \\ \left. \text{各 simplicial cone 上で } i = 1, \dots, n \right\}$$

を重複度 (multiplicity) の集合といい、また

$$\beta_Y = \begin{cases} \max \left\{ -\frac{\alpha(P_i, g) + 1}{d(P_i, f)}; (d(P_i, f), \alpha(P_i, g)) \in M_Y, \dim \Delta(P_i, g) > 0 \right\} & (M_Y \neq \phi) \\ -\infty & (M_Y = \phi) \end{cases}$$

と置き、これを重み (weight) と呼ぶ。

積分 $I(\tau, \varphi)$ の τ に対する漸近展開の最高べきの φ に関する最大値を $\beta(f, g)$ と書き、振動積分指数 (oscillation index) ということにする。以上の準備の下に、我々の主要結果は次の定理で与えられる。

定理 $(f, g) : (\mathbf{R}^n, \vec{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \vec{0})$ を原点 $\vec{0} \in \mathbf{R}^n$ での解析写像の芽で $f(0) = g(0) = 0$ を満たすものとする。また、 $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = g(x) = 0\}$ は原点に孤立特異点をもつ

complete intersection variety で、 $g(x)$ を smooth な関数とする。また、 U を $\mathbf{R}^n$ の原点の近傍としたとき $\{x \in U; f(x) = g(x) = 0\}$ は、原点 $\vec{0} \in \mathbf{R}^n$ で non-degenerate complete intersection variety とする。 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は、原点の十分近い近傍に support を持つ関数で、 $f(x), g(x)$ は convenient と仮定する。この時、漸近展開

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)} \delta(g(x)) \varphi(x) dx \sim \sum_p \sum_{k=1}^{n-2} a_{p,k}(\varphi) \tau^p (\log \tau)^k$$

が $|\tau| \rightarrow \infty$ で成立し、以下の性質を持つ。

(1) τ のべき p と $\log \tau$ のべき k は、トーラス埋め込みの方法により具体的に計算でき、その weight β_Y は、Newton 図形から直接求めることができる。

(2) $\beta_Y > -1, \varphi(0) > 0, \varphi(x) \geq 0$ のとき、 $\beta(f, g) = \beta_Y$ 。

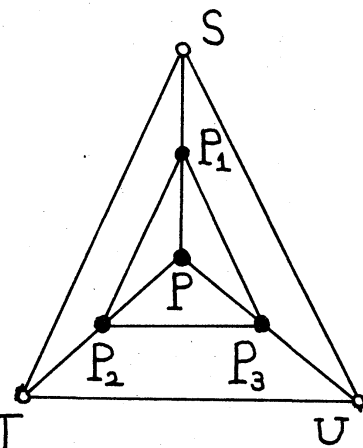
以下、1つの例を与える。

例 $f(x, y, z) = x^8 + y^8 + z^8 + x^2 y^2 z^2, g(x, y, z) = x + y + z$ とする。具体的に計算する方法を用いれば resolution

グラフは、右図のようになり、 $P = {}^t(1, 1, 1), P_1 = {}^t(2, 1, 1), P_2 = {}^t(1, 2, 1), P_3 = {}^t(1, 1, 2), S = {}^t(1, 0, 0), T = {}^t(0, 1, 0), U = {}^t(0, 0, 1)$ と求められる。

$\tau(P_j) = -\frac{\alpha(P_j, g)+1}{d(P_j, f)}$ と置く

と、今の場合 $\tau(P) = -\frac{1}{3}, \tau(P_i) = -\frac{3}{8} (i = 1, 2, 3)$ となる。 $\beta_Y = \max\{\tau(P), \tau(P_i) (i = 1, 2, 3)\}$ として求められるので、故に、 $\beta_Y = -\frac{1}{3}$ 。このときは、 $\beta_Y > -1$ を満たすので $\beta(f, g) = -\frac{1}{3}$ である。これは、Newton 図形から直接求めることもできる。



References

- [1] B. Malgrange Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Ser. 4, 7-3(1974), 405-430

- [2] P.Jeanquartier, Développement asymptotique de la distribution de Dirac, C.R. Acad. Sc. Paris **271** Ser.A (1970),1159-1161
- [3] A.N.Varchenko, Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, Funct. Anal. Appl. **10**-3(1976), 175-196
- [4] M.Oka, On the Resolution of Hypersurface Singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics **8**(1986),405-436
- [5] M.Oka, Principal Zeta-function of Non-Degenerate complete intersection singularity, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA **37**,No.1(1990),11-32
- [6] A.G.Khovanskii, Newton polyhedra and the genus of complete intersections, Funkts. Anal. Prilozhen. **12**,No.1(1977),51-61