

Notes on Finite Determinacy of Formal Vector Fields

都立大 理 市川文男 (Ichikawa Fumio)

SO 前書き

finite determinacy の問題は C^∞ -map germs に対し R. Thom により [7] により提起され、J. Mather により解決された。その後も多くの数学者の研究対象になり、現在我々はその様子を Wall の survey [14] の中に見い出すことが出来る。ベクトル場の特異点に関して、位相型については Hartman の定理、Takens の仕事、 C^∞ -linearization に関しては Sternberg の定理がよく知られている。 C^∞ -vector field germ の特異点の finite determinacy を map germs と同様に定義して、finitely determined であるための必要十分条件を問題としたい。以下で我々は形式的ベクトル場を扱う。 C^∞ -vector field germ の問題は、まず形式的座標変換により標準形 X (formal に $\det$ なる $\mathbb{R}$ 上の polynomial vector field) に変換して、次に任意の flat vector field X_∞ (∞ -jet = 0 となるもの) をつけ加えた $X + X_\infty$ が X に C^∞ -local diffeo で変換できることを示すのが常套手段である。従って形式的ベク

トル場での話は, C^∞ -vector field germ への first step である。

$K = \mathbb{R}$ 又 $\mathbb{C}$ とする。子 $\mathcal{X}$ を形式的な級数環 $K[[x_1, \dots, x_n]]$ とする。

形式的ベクトル場 X とは子の derivation の事である。 $\mathcal{X}^0$ を定数項のない形式的ベクトル場全体の集合とする。 $\text{ie } \mathcal{X}^0 = \{X : X = \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 1} a_{i,\alpha} x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}\}$ 。 $\mathcal{X}^0$ に自然にリー環の構造が入る。 $\mathcal{X}^0 \ni X, Y$ に対し、リー積 $[X, Y]$ を $[X, Y] = XY - YX$ で定義する。 $\mathcal{J}^k$ を定数項のない degree k の polynomial vector fields の集合とし、 $\mathcal{J}^k : \mathcal{X}^0 \rightarrow \mathcal{J}^k$ を degree k までの部分に対応させる写像とする。 G を形式的座標変換 (子の alg auto) 全体のなす群とする。 G は $\mathcal{X}^0$ に次で作用している。
 $\mathcal{G}_* X = \mathcal{G}^{-1} X \mathcal{G}$ に対し、 $\mathcal{G} \in G, X \in \mathcal{X}^0$ $\mathcal{X}^0 \ni X, Y$ が 同値 であるとは、
 X の G -orbit の中に Y が含まれている時、 X が k -determined であるとは、
 $\mathcal{J}^k X = \mathcal{J}^k Y$ となる任意の $Y \in \mathcal{X}^0$ に対し、 X と Y が同値になることである。
 X が finitely determined であるとは、ある k が存在して、 X が k -determined になることである。

1-jet $X_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を (a_{ij}) の固有値とする。 $\mathbb{Z}_+$ で非負整数の集合を表す。 $K(X_1) = \{(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_n \lambda_n = 0\}$ とする。
定義 (1) 1-jet X_1 が strong eigenvalue condition (S.E.C. と略す) をみたすとは
 $K(X_1) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$ となることである。
 (2) 1-jet X_1 が weak eigenvalue condition (W.E.C. と略す) をみたすとは、ある
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ が存在して $K(X_1) = \{r\alpha : r = 0, 1, 2, \dots\}$ となることである。

定理1 X の1-jet が S.E.C をみたす時 X は finitely determined である。

定理2 X の1-jet が W.E.C をみたし S.E.C をみたさない時次は同値である。

① X は finitely determined.

② $X|_K \neq 0$ に対し $\mathcal{H} = \ker \{X^S: \text{子} \rightarrow \text{子}\}$ で X^S は $X: \text{子} \rightarrow \text{子}$ の semi-simple part.

定理3 X の1-jet が W.E.C をみたさない時 X は finitely determined ではない。

[3] において、定理1,3 と条件をつけた形で定理2を証明した。以下で定理2

② $\Rightarrow$ ① の概略と、実2次元での分類について述べたい。

§1 標準形とは何か。

次の標準形定理はよく知られている ([10] 参照)。簡単のため $K = \mathbb{C}$ と

し、 $X^0 \ni X$ の1-jet X_1 は Jordan 標準形になっているとする。

定理 $X^0 \ni X$ を上のものとする時、ある形式的座標変換 $\mathcal{G} \in G$ が存在して

$$\mathcal{G}_* X = X_1 + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{\langle \mu, \lambda \rangle = \lambda_i \\ |\mu| \geq 2}} a_{\mu}^i x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (*)$$

と出来る。但し、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は X_1 の固有値で $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$
 $\langle \mu, \lambda \rangle = \mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_n \lambda_n$, $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ である。

注意 $(*)$ の形のもを標準形という。標準形にあふれる高次の項は、リー積に関して $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ と可換なものである。 $(*)$ で与えられる形式的ベクトル場の "semi-simple part" は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ である。

上の定理の直接的系として、我々は形式的ベクトル場の Sternberg の線形化定理をえる

系 $X^0 \ni X$ の 1-jet X_1 の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする。 $|\mu| \geq 2$ なる任意の $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\langle \mu, \lambda \rangle \neq \lambda_i$ ($i=1, \dots, n$) ならば ある $g \in G$ が存在して $g_* X = X_1$ となる。

(1.1) 系の言っている意味をもう少し見よう。子空間の無限次元ベクトル空間の base を degree 順に $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_n^2, \dots \rangle$ をとり $X: \text{子} \rightarrow \text{子}$ の無限行無限列の行列表現を考える。簡単のため 1-jet は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ の対角形をしているとする。容易にわかるように linear map $X: \text{子} \rightarrow \text{子}$ は次で表わされる。

形式的座標変換でも同様の擬下三角な無限行列で表示できる。従って形式的ベクトル場の標準形とは、上のような無限行列の標準形ともみなせるのである。上の場合系の条件とは、1) 対角化可能なことを意味している。

(1.2) 標準形(*)は 1-jet を変化させると、即ち $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を少し変化させたものが出てくる高次の項が激しく変動するのであるが、1-jet を固定する deformation ^{の中で} 考えれば、(*)は一般には無限個のパラメータ $\{a_{ik}^j\}$ をもち、 X_1 の "universal unfolding" であるともみなせる。

(1.3) $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ の場合、上の標準形定理は何も主張したことにならない。その場合には Takens の標準形定理 [12] がある。

§2 N.E.C と W.E.C.

定義 1-jet X_1 が nice eigenvalue condition (N.E.C と略す) をみたすとは

X_1 が W.E.C をみたし、かつ 次が成立するとき。 $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p$ を X_1 の相異なる non-zero 固有値としたとき、 $\beta_1 \hat{\lambda}_1 + \dots + \beta_p \hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_j$, $\beta_i \in \mathbb{Z}_+$ ($i=1, \dots, p$) と表おせたすると $\beta_j > 0$ 。

今 $x^0 \rightarrow X$ を 1-jet X_1 が N.E.C をみたすとする。簡単のため X_1 の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は相異なると仮定し、 $k(X_1) = \{i\alpha : i=0, 1, 2, \dots\}$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ をとる。この時 X の標準形として次がとれる。

$$X_1 + \sum_i a_i^1 x^{i\alpha} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \sum_i a_i^n x^{i\alpha} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (**)$$

標準形にある高次の項は、次数 $(i\alpha)_1 + 1$ の時だけあり、しかもその次数で n 個の

項しかあらわれないのである。niceの意味はここにある。 $\mathcal{H} = \ker \{X^s: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}\}$ は $[[X, X^s]]$ で与えられ、次が容易にあかる。

$$X|_{\mathcal{H}} \neq 0 \iff \text{ある } L \text{ が存在して } a_L^1 \alpha_1 + \cdots + a_L^m \alpha_m \neq 0$$

$$G_{(m)} = \langle x^{m\alpha_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x^{m\alpha_m} x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \rangle_{\mathbb{K}} \text{ とおき、 } (**)$$

$$X_1 + X_{(L)} + X_{(L+1)} + \cdots, X_{(j)} \in G_{(j)} \quad (j \geq L)$$

で表わす。さらに簡単のため、 $X_{(L)}$ の係数が条件 $a_L^1 \alpha_1 + \cdots + a_L^m \alpha_m \neq 0$ をみたしているとする。

$X_{(L)}$ は linear map $[X_{(L)}, -]: G_{(m)} \rightarrow G_{(m+L)}$ とひきかえし [2] で示したように $m=L$

以外では、 $[X_{(L)}, -]: G_{(m)} \rightarrow G_{(m+L)}$ は surjective になっている。

補題 (Takens) $X^0 \ni X, Y$ に対し、 $j^1 Y = 0$ 、 $j^k([X, Y]) = 0$ とすると

$$j^{k+1}(\exp Y)_* X = j^{k+1}(X + [X, Y]) \quad (\text{証明略})$$

今 $G_{(L+1)} \ni Y_{(L+1)}$ を $[X_{(L)}, Y_{(L+1)}] = -X_{(2L+1)}$ となるようにとる。 $(\exp Y_{(L+1)})_* X$

が標準形になることが容易にあかり、上の補題から、 $(\exp Y_{(L+1)})_* X$ は次の形をしている。

$$X_1 + X_{(L)} + X_{(L+1)} + \cdots + X_{(2L)} + X'_{(2L+2)} + X'_{(2L+3)} + \cdots$$

次に $G_{(L+2)} \ni Y_{(L+2)}$ を $[X_{(L)}, Y_{(L+2)}] = -X'_{(2L+2)}$ となるようにとると $(\exp Y_{(L+2)})_*$

$(\exp Y_{(L+1)})_* X$ は $X_1 + X_{(L)} + \cdots + X_{(2L)} + X''_{(2L+3)} + \cdots$ となる。以下帰納的に

$Y_{(L+3)}, Y_{(L+4)}, \dots$ をとり $\mathcal{G} = \varprojlim_j (\exp Y_{(L+1)}) \circ (\exp Y_{(L+2)}) \circ \cdots \circ (\exp Y_{(L+j)})$

とみると、 $\mathcal{G} \in G$ であり $\mathcal{G}_* X = X_1 + X_{(L)} + \cdots + X_{(2L)}$ とすることが出来る。

形式的な外れは場 Y が X と同じ $(2L+1)$ -jet をもつと、最初から Y が標準形になる

いと仮定(よく、これと全く同じ操作で $(2(L+1)(k+1))$ 次以上の項を帰納的に消す

とができる。結局 同じ標準形 $X_1 + X_{(L)} + \cdots + X_{(2L)}$ と同値になる。従って X は $(2L+1)$ -

determined である。以上が N.E.C. の場合の定理 2 ②⇒① の証明の概略である。

W.E.Cをみたし N.E.Cをみたさない例を考えよう。 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (1, -1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 3+\sqrt{2}+\sqrt{3}, \dots)$ とする。明らかに W.E.C はみたす。例えば $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は次のような他の固有値の正整数一次結合で表せる。

$$2 \cdot (1) + (\sqrt{2}) + (\sqrt{3}), (1) + (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}), 2(1) + 2(\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

さらに嫌な例はいくらでも作り出せるだろう。一般に W.E.Cをみたすだけでは、標準形にあつた高次の項の degree にバラつきが生じ、その degree にあつた項の数も変化するおそれがある。さらに上の例では、 $1, -1$ 以外の固有値の重複度は1でなくとも W.E.Cをみたす。W.E.Cをみたすとき、標準形を書き出すこと、ましてリー種の計算など、どう処理すればよいのか？ 実は、簡単な事実に基づけば、こうした問題はアッサリと解決できるのである。

$\mathbb{Z}_+^m$ に次で「順序 $\leq$ 」を定義する。 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

に対し $\mu \leq \nu$ とは、各 $i=1, \dots, n$ に対し $\mu_i \leq \nu_i$ となることである。

補題 $\mathbb{Z}_+^m$ の任意の部分集合 S に対し、 S の極小元は有限個である。(証明略)

さて $X^0 \ni X$ の 1-jet X_1 を簡単のため対角形 $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ とし、 X_1 は

W.E.Cをみたし、S.E.Cをみたさないとする。 $K(X_1) = \{r\alpha : r=0, 1, 2, \dots\}$ とする $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

をとる。 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$ $\alpha_i \neq 0$ ($i=1, \dots, k$) としよう。 $S_j = \{\mu \in \mathbb{Z}_+^n :$

$\langle \mu, \lambda \rangle = \lambda_j\}$ ($j=k+1, \dots, n$) とおき、 S_j の極小元を $\sigma_1^j, \dots, \sigma_{r_j}^j$ とすると、

S_j の任意の元は $\sigma_r^j + m\alpha$ の形をとる ($m=0, 1, 2, \dots, 1 \leq r \leq r_j$)

従つて X の標準形として次をえる。

$$\begin{aligned}
X_1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^1 x^{md} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^k x^{md} x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \\
+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{r_{k+1}} b_m^{k+1, * } x^{md + d_k^{k+1}} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots \\
+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{r_n} b_m^{n, * } x^{md + d_k^n} \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (***)
\end{aligned}$$

但し、 $|r_k^j| = 1$ のとき $b_{0,0}^{j,*} = 0$ 。 X が (***) で与えられた時 $\mathcal{H} = \mathbb{K}[[x^d]]$ で

$$X|_{\mathcal{H}} \neq 0 \iff \text{ある } L \text{ が存在して } a_L^1 d_1 + \cdots + a_L^k d_k \neq 0$$

が成る。さて、 $G(0)$ を $\{x^{r_k^j} \frac{\partial}{\partial x_j} : 2 \leq |r_k^j| < k|+1\}$ で張られるベクトル空間
 $G(m)$ ($m=1, 2, \dots$) を $\{x^{md} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} : i=1, \dots, k\} \cup \{x^{m'd + d_k^j} \frac{\partial}{\partial x_j} : j=k+1, \dots, n, \\ m|k|+1 \leq m'|k|+1 + |r_k^j| < (m+1)|k|+1\}$ で張られるベクトル空間とする。

今簡単のため (***) で与えられた X は、 $X_1 + X_{(L)} + X_{(L+1)} + \cdots$ $X_{(j)} \in G(j)$, $j=L, L+1, \dots$
 の形をしているとし、 $X_{(L)}$ の係数で条件 $a_L^1 d_1 + \cdots + a_L^k d_k \neq 0$ が満たされていると仮定
 する。

今 $r = \max \{|r_k^j| : j=k+1, \dots, n, k=1, \dots, r_j\}$, $M_0 = \min \{m \in \mathbb{Z}_+ : r < m|k|+1\}$
 とおくと、 $M_0 \leq m$ なる任意の m に対し、 $\dim G(m) = (\sum_{j=k+1}^n r_j) + k$ となる。Jacobi
 の恒等式と次数の比較から $[X_{(L)}, -]$ は $G(m)$ から $G(m+L) \oplus G(m+L+1)$ への
 線形写像をひきおこす。 $\pi_{m+L} : G(m+L) \oplus G(m+L+1) \rightarrow G(m+L)$ projection とする。
 簡単な計算から、ある $M \geq M_0$ が存在して、任意の $m \geq M$ に対し、 $\pi_{m+L} \circ [X_{(L)}, -]$
 $: G(m) \rightarrow G(m+L)$ が surjection になることが示せる。後は N.E.C. の場合と全く
 同様の論法を使い、高次の項を逐々に消して polynomial vector field に同値になると
 を示し、証明は終了。

§3 分類

定理2の証明の概略からわかるように、1-jet 場の finite determinacy の証明は逐次標準形に直に行き、最終的に polynomial vectorfield を与えるのである。言い換えれば、分類 (= 標準形) と finite determinacy の決定を同時進行させているのである。実2次元の場合には、これを忠実に実行してゆくと次のような結果をえる。証明は [5] を見てもいい。実2次元の場合 W.E.C をみたし、S.E.C をみたさないのは次の場合のみである。(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 $\lambda_1 \lambda_2 < 0, \lambda_1 / \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ (ii) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \neq 0, \operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ (iii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

定理3.1 $X^0 \ni X$ の 1-jet X_1 が $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 / \lambda_2 = -p/q$

(p, q は互いに素な正整数) であるとき X は次のいずれかと同値である

$$(1-1) \quad X_1 + S \omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + (b_k \omega^k + b_{2k} \omega^{2k}) y \frac{\partial}{\partial y} \quad (b_k \neq -(p/q) S)$$

$$(1-2) \quad X_1 + S q \omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + (S(-p) \omega^k + b_L \omega^L + b_{2L-k} \omega^{2L-k} + b_{2L} \omega^{2L}) y \frac{\partial}{\partial y} \\ (b_L \neq 0, L > k)$$

$$(1-3) \quad X_1 + S q \omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + S(-p) \omega^k y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(1-4) \quad X_1$$

但し、 $\omega = x^p y^q$, k even のとき $S = \pm 1$, k odd のとき $S = 1$ とする。

定理3.2 $X^0 \ni X$ の 1-jet X_1 が $\theta x \frac{\partial}{\partial y} - \theta y \frac{\partial}{\partial x}$, $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$ であるとき、 X は

次のいずれかと同値である

$$(2-1) \quad X_1 + (S a^k + a_{2k} b^{2k}) (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + b_k a^k (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

$$(2-2) \quad X_1 + (a_L a^L + \dots + a_{2L-k} b^{2L-k} + a_{2L} b^{2L}) (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + S a^k (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}) \\ (a_L \neq 0, L > k)$$

$$(2-3) \quad X_1 + S \delta^k (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

$$(2-4) \quad X_1$$

$$\text{但し, } \delta = x^2 + y^2, \quad S = \pm 1.$$

定理 3.3 X の 1-jet X_1 が $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$ のとき X は次のいずれかと同値.

$$(3-1) \quad X_1 + a \delta x y^k \frac{\partial}{\partial x} + (S y^k + b_{2k} y^{2k}) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(3-2) \quad X_1 + S x y^{2L} \frac{\partial}{\partial x} + (b_L y^L + \dots + b_{2L-k} y^{2L-k} + b_{2L} y^L) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (b_L \neq 0, L > k)$$

$$(3-3) \quad X_1 + S x y^k \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(3-4) \quad X_1$$

$$\text{但し, } k \text{ が even のとき } S = \pm 1, \quad k \text{ odd のとき } S = 1$$

定義 $X^0 \supset S$ が semi-algebraic set (resp. submanifold) であるとは、任意の k に対し $j^k S$ が J^k の semi-algebraic set (resp. submanifold) になる時いう。

定義 $X^0 \supset M$ を submfd とするとき、 M の X^0 における codimension $\tau(M)$ を $\tau(M) = \lim_k \tau_k(j^k M)$ で定義する。但し $\tau_k(j^k M)$ は J^k における $j^k M$ の codimension.

定義 X^0 に $\{j^k: X^0 \rightarrow J^k\}_{k=1,2,\dots}$ から induce される topology を与えておく。2つの submfds M, N に対し、 M が N に 隣接 しているとは、 M の閉包が N を含むことである。記号 $M \leftarrow N$ でこの隣接関係をあらわす。

§4. 終りに.

形式的ベクトル場の場合も関数の場合と同様 finitely determined であることと G -orbit の codimension が有限であることが同値となるのであるが, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^0$ での G -orbit の様相はまるでちがうのである. 例えば実2次元の場合 1-jet の固有値 λ_1, λ_2 が $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ の時 λ_1/λ_2 が有理数であるか, 無理数であるかによって k -determinacy の k が激しく変動する. 関数の場合の universal unfolding theorem とは結局 $\mathfrak{g}$ の中の G -orbit に対する陰函数定理であると割切つて考えれば, 'それが成立つ鍵は k -determined function f のまわりの G -orbit の様子か k -jet space であれに帰着できることにある. ベクトル場の場合 k -determinacy の k に関する upper semi-continuity が成立たず, unfolding theorem は一般には期待できない。

関数の場合の finite determinacy はそれ自体興味深いのであるが, unfolding theory, Thom の初等カタストロフィー, Arnold の Simple singularity, Lie 環論との関係, $K(\pi, 1)$ の問題など非常に豊かな数学的副産物をもたらした. ベクトル場の finitedeterminacy には副産物があるのだろうか? 全くないのかも知らない, 筆者にはわからない。

REFERENCES

- [1] R.I. Bogdanov: Modules of C^∞ -orbital normal forms for singular points of vector fields on a plane, Funct. Anal and its appl 11, 47-49 (1977)
- [2] F. Ichikawa: Notes on finitely determined singularities of formal vector fields, 数理研講究録 403 (1980)
- [3] F. Ichikawa: Finitely determined singularities of formal vector fields, Inv. math 66 199-214 (1982)

- [4] F. Ichikawa : On finite determinacy of formal vector fields, to appear in Inv. math.
- [5] F. Ichikawa : Classification of finitely determined singularities of formal vector fields on a plane. (preprint)
- [6] T. Fukuda, H. Noguchi : 初等カテゴリー 共立出版 1976
- [7] H.I. Levin : Singularities of differentiable mappings, Springer Lecture Notes 192, 1-89. Springer-Verlag 1971
- [8] J. Mather : Stability of C^∞ -mappings III, Finitely determined map-germs Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968)
- [9] E. Nelson : Topics in dynamics I. flows, Math Note Princeton 1969
- [10] H. Omori : 無限次元リ群論, 紀伊國屋 1978
- [11] S. Sternberg : On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space II, Amer. J. Math. 80, 623-632 (1958)
- [12] F. Takens : Singularities of vector fields, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1973)
- [13] F. Takens : Normal forms for certain singularities of vector fields. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23, 163-195 (1973)
- [14] C.T.C. Wall. Finite determinacy of smooth map-germs, Bull. London Math Soc. 13, 481-539 (1981)