

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	ほし ゆういちろう 星 裕一郎
学位 (専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
(学位論文題目) Absolute anabelian cuspidalizations of configuration spaces of proper hyperbolic curves over finite fields (有限体上の固有双曲曲線の配置空間の 絶対遠アーベルカスプ化)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 望月 新一 教授 玉川 安騎男 教授 向井 茂 教授

(論文内容の要旨)

双曲的な(固有)代数曲線の数論的基本群に対して曲線の(空でない)開部分スキームの数論的基本群を復元するという操作は、「カスプ化」と呼ばれ、局所体や有限体のような数論的な体の上の遠アーベル幾何において重要な役割を果たすことで知られている。カスプ化の対象となる開部分スキームから抜けている点を動かし、それによって生じる設定の普遍的な場合を考えることによって、元々与えられた曲線に付随する配置空間の数論的基本群に対する「カスプ化」を求めるという問題が自然に定式化される。有限体の上では、幾何的に副0な数論的基本群に対してこのような配置空間のカスプ化は2次元の場合において、2005年頃、望月により達成されたが、今回の星氏の学位論文の主定理は、この2次元の場合のカスプ化を3以上の一般次元に拡張するという内容のものである。

配置空間のカスプ化において、次元が4以上の場合と、星氏が扱った次元が3以上の場合には、実はそれほど本質的な差はなく、高次元への一般化に関していえば、2次元と3次元の差の処理が最も難しい部分である。その主な理由は一言でいうと、ちょうど2次元から3次元に移行する際に、「三脚体」(=「tripod」=射影直線から3点を抜いて得られる双曲的曲線)の数論的基本群が発生することである。別の言い方をすれば、2次元の場合と違って3次元の場合には、与えられた数論的基本群のデータに含まれていないこの三脚体の数論的基本群を、殆ど何もないところから群論的に復元しなければならない。従って星氏が構築した理論の重要な副産物(=「系」)として、この「三脚体の数論的基本群の群論的復元」が挙げられる。この種の結果は、有限体上の(幾何的に)副0遠アーベル幾何においては初の本格的な「双曲的曲線の復元」となることは実に興味深い。また今回の論文では、この「三脚体の数論的基本群の群論的復元」は有限体の上で達成されたわけだが、もし仮に絶対 p 進遠アーベル幾何的な設定においてこのような三脚体の数論的基本群の群論的復元が実現できれば、絶対 p 進遠アーベル幾何の様々な基本的かつ重要な未解決問題の解決をもたらすものになる。

2次元の場合と同様、3次元の場合のカスプ化では、比較的容易に構成されるLie代数的な「入れ物」の復元が、最終的目標である配置空間の数論的基本群を復元する上で重要な第一歩となる。一方、2次元の場合と比較すると、3次元の場合のもう一つの決定的な違いは、配置空間の数論的基本群の、被覆に対する関手性である。2次元の場合には、この関手性を活用することによって数論的基本群を直接的に復元することができるが、3次元の場合には、この関手性が成立しないため、「入れ物」の中の「所望の部分群」は関手性に依存しない手法で復元しなければならない。今回の論文では、星氏の修士論文を2つに分割してできた2篇の論文の理論を適用することによって所望の部分群の構成に成功している。この2篇の論文のうち、1篇は(適切な条件を満たす)対数スキームの射に付随する対数幾何的基本群の短完全系列に関する一般論を展開するもので今回の学位論文の隋所に用いられている。一方、もう1篇は、配置空間の対数幾何を詳しく調べたものであり、その対数幾何的状况に付随して発生する様々な中心化部分群や正規化部分群を計算し、その性質を上手く利用することによって上述の「入れ物」の中の「所望の部分群」を群論的に復元している。

(論文審査の結果の要旨)

本論文は有限体上の固有双曲的代数曲線に付随する配置空間の（幾何的に副 $\emptyset$ な）数論的基本群のカスプ化を2次元から3以上の一般次元の場合に拡張しているが、その過程において2つの大きな技術的障害を克服し、またそれにより重要な副産物と位置付けられる結果を得ている。これらの技術的障害の処理は、この分野の第一線の研究者から見ても全く想定外の快挙であり、また付随して得られた副産物も、有限体上の副 $\emptyset$ 遠アーベル幾何の今後の展開を示唆する上でも極めて有意義なものと認められる。

一つ目の技術的障害は三脚体の数論的基本群の復元である。その手法は実に独創的であり、簡単に総括すると、次のような議論によるものである。既に望月によって得られた2次元配置空間のカスプ化により、有限体上の固有双曲的代数曲線から1点を抜いて得られる開部分スキームの（幾何的に副 $\emptyset$ な）数論的基本群が復元される。しかし、「1点抜き」と「複数次点抜き」の間には、本質的な落差があり、その落差を埋めるには、三脚体の数論的基本群という補足的なデータがどうしても必要になる。そこで星氏は、既に構成されている1点抜き曲線の有限次エタール（＝抜けている点においても）被覆を利用することを思い付いたのである。このような被覆は複数次点抜きの曲線になるため、その複数の点を「動かしながら埋めていく」ことさえできれば、所望の三脚体の数論的基本群が自動的に復元される。この「動かしながら埋めていく」という操作もまたそれなりに非自明であり、Lie代数的な「入れ物」の中の「整数的部分群」の構成を要求するものだが、この構成も含めて上述の方針に沿った復元を最後までやり通した力量は、高く評価すべきものであると思われる。

二つ目の技術的障害は（比較的容易に構成される）Lie代数的な「入れ物」の中の所望の部分群の復元である。2次元の場合と違って3次元以上の場合には、曲線の被覆に関する関手性が使えないため、配置空間の対数幾何から発生する分解群等の計算を利用するのだが、この計算の過程において生じる対数幾何の組合せ論的複雑度は相当のものであり、修士論文の理論を活用することによってこの計算を全うできたこともそれなりの評価に値するものと思われる。また一つ目の技術的障害の評価でも言及したように、類似的な計算は、複数次点抜きの曲線の配置空間の場合に生じる「非対数的」な場合にも行う必要があるが、これも問題なく遂行できている。

以上の理由により、本論文はこの分野の第一級の水準に達しているものであり、特に博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認める。また論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。