

2次元絡み目の絡み目ホモトピー型

早大教育 鈴木 晋一 (Shin'ichi Suzuki)

はじめに 4次元空間 $\mathbb{R}^4$ (または4次元球面 $\mathbb{S}^4$) において2つの2次元球面が絡みの現象をおこすことが1927年に van Kampen [15] によって初めて報告された。これはそのすぐ前に発表されたいわゆる Artin Knots の構成法 (Artin [2]) に依る簡単な例であったが、その後の2次元絡み目の研究において基本的な役割を果たしている (Andrews-Curtis [1], Zeeman [18], Epstein [4], etc.)。しかし4次元空間における2つの2次元球面の絡みの具合は、3次元空間における2つの1次元球面 (=円周) の絡みの具合とは本質的に異なるものであることが、(簡単な次元の計算等から) 容易にわかる。実際, Chen [3] によって導入され, Milnor [11] によって本格的に研究された絡み目ホモトピーの観点からながめるとき, これ迄に知られている2成分の2次元絡み目はすべて自明となることが直ちに確かめられる。筆者は神戸大学の細川藤次

教授と共にこの事実に注目していたが、1983年にD. Rolfsenがカナダ数学会でこれを問題として採り上げたのを機に再び証明に取り組んでみた。2次元絡み目を標準形に移し、3次元の切断面ごとに絡み目ホモトピーを構成するという方法によって、かなり複雑ではあるが、幸い予想が証明できたのでここに報告する（本論文は[7]を見たい）。尚以下すべて piecewise-linear category で考察する。

§1 定義と主定理

まず定義を明確にし、改めて主定理を明確に述べる。

1.1 定義 c 成分の n 次元絡み目とは、向き付けられた n 次元球面の c 個の直和 $\sum_{i=1}^c S_i^n$ から向き付けられた $(n+2)$ 次元空間 $\mathbb{R}^{n+2}$ への埋蔵 $L: \sum_{i=1}^c S_i^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ のことである。特に1成分の n 次元絡み目を n 次元結び目と呼ぶ。

c 成分の n 次元絡み目 $L_j: \sum_{i=1}^c S_i^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, $j=1, 2$, が同値であるとは、向きを保つ同相写像 $\psi: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ が存在して、 $\psi L_1 = L_2$ を満たすときをいう。

n 次元絡み目 $L: \sum_{i=1}^c S_i^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ が平凡（または自明）であるとは、 $(n+1)$ 次元球体の c 個の直和からの埋蔵 $\tilde{L}: \sum_{i=1}^c D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ が存在して、 $\tilde{L}|_{\sum_{i=1}^c \partial D^{n+1}} = L$ となる場合をいう。 c 成分の平凡な n 次元絡み目は互いに同値である。

$c (\geq 2)$ 成分の絡み目 $L: \sum_{i=1}^c S_i^n \rightarrow R^{n+2}$ が分離するとは, R^{n+2} の中に互いに交わらない c 個の $(n+2)$ 次元球体 $D_1^{n+2}, \dots, D_c^{n+2}$ が存在して ${}^o D_i^{n+2} \supset L(S_i^n)$ ($i=1, \dots, c$) を満たす場合をいう。

ここで ${}^o X$ によって多様体 X の内部を表す。

平凡な n 次元絡み目はもちろん分離する。平凡でない 2 次元絡み目や分離しない 2 次元絡み目の例は, 前記 [2], [15], [1] [3], [18] の他に Kinoshita [10], Yanagawa [17] 等多くの文献に見られる; Suzuki [14] の文献表を参照されたい。

さて以下の議論では n 次元絡み目 $L: \sum_{i=1}^c S_i^n \rightarrow R^{n+2}$ として, 写像 L よりはその像 $(L(\sum_{i=1}^c S_i^n) \subset R^{n+2}) = (L(S_1^n) \cup \dots \cup L(S_c^n) \subset R^{n+2}) = (K_1 \cup \dots \cup K_c \subset R^{n+2})$ の方を取り扱う方が便利なので像そのものを n 次元絡み目と呼ぶ。また R^4 の部分空間の形態・形状を述べぬのに, よく知られた motion picture method を用いる。記号・記法や定義で明記しないものについては, Kawauchi-Shibuya-Suzuki [8, 9] および Suzuki [14] を参照されたい。次の命題が成立する:

1.2 命題 ([8, Th.2.1, Cor.2.16], [14, Th.2.4, 2.6]) 任意の局所平坦な 2 次元絡み目 $(K_1 \cup \dots \cup K_c \subset R^4)$ は, R^4 の全同位によって標準形の 2 次元絡み目 $(\tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_c \subset R^4)$ に変形できる;

すなわち $(\tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_c \subset \mathbb{R}^4)$ は次のような位置にある：

- (1) $\tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_c$ のすべての最大円板は超平面 $\mathbb{R}^3[3]$ に,
- (2) $\tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_c$ のすべての最小円板は超平面 $\mathbb{R}^3[-3]$ に,
- (3) $\tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_c$ のすべての saddle-bands は超平面 $\mathbb{R}^3[-1]$ と $\mathbb{R}^3[1]$ の中に存在し, かつ

(4) 赤道線の切断面として得られる 1 次元絡み目 $((\tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_c) \cap \mathbb{R}^3[0] \subset \mathbb{R}^3[0])$ は c 成分の 1 次元絡み目である；従って赤道線の切断面 $(\tilde{K}_i \cap \mathbb{R}^3[0] \subset \mathbb{R}^3[0])$ は 1 次元結び目である ($i=1, \dots, c$)。□

1.3 定義 (1) $P_1, \dots, P_c$ を多面体 (必ずしも連結ではない) とし, P をそれらの直和とすな； $P = \sum_{i=1}^c P_i$ 。多面体 X に対し, f_0, f_1 を P から X の中への連続写像で, $f_j(P_1), \dots, f_j(P_c)$ が互いに交わらないものとする ($j=0, 1$)。

f_0 と f_1 が絡み目ホモトープ (link-homotopic) である, これは $f_0 \simeq_L f_1$ で示す, とは, ホモトピー $\{\eta_t\}_{t \in I} : P \rightarrow X$ が存在して, $\eta_0 = f_0, \eta_1 = f_1$ で, すべての $t \in I = [0, 1]$ について $\eta_t(P_1), \dots, \eta_t(P_c)$ が互いに交わらない場合をいう。このとき, ホモトピー $\{\eta_t\}_{t \in I}$ を f_0 と f_1 の間の絡み目ホモトピーと呼ぶ。

(2) X の 2 つの部分多面体 Q_0 と Q_1 が絡み目ホモトープ

である, これを $Q_0 \simeq_l Q_1$ で示す, とは, 多面体 P と 2つの連続写像 $f_0, f_1: P \rightarrow X$ が存在して, $f_0(P) = Q_0$, $f_1(P) = Q_1$ であつ $f_0 \simeq_l f_1$ が成立する場合をいう. 以下では混乱が生じない限り, このような多面体 P や写像 f_0, f_1 などを明確に示すことはしない.

これらの定義によって主定理を明確に述べることが出来る.

1.4 定理 任意の 2 成分の 2 次元絡み目 $L: S_1^2 \cup S_2^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は平凡な 2 次元絡み目と絡み目ホモトープである.

証明は次節で 3 つの補題を証明した後, 第 3 節で与える. 実際, 次節の補題 2.2 が key となる補題である.

§2 技術的な補題

2.1 補題 (Goldsmith [6]) $D_0, D_1, \dots, D_\mu, D'_0, D'_1, \dots, D'_\lambda$ を, 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の超平面 $\mathbb{R}^2$ 内の, 互いに交わらない円板とし, $\mathbb{R}^2$ の向きに同調する向きが与えられているとする. $\partial D_i = O_i$ ($i=1, \dots, \mu$), $\partial D'_j = O'_j$ ($j=1, \dots, \lambda$) とし, $\mathcal{O} = O_0 \cup O_1 \cup \dots \cup O_\mu$, $\mathcal{O}' = O'_0 \cup O'_1 \cup \dots \cup O'_\lambda$ とする.

$B_1, \dots, B_\mu, B'_1, \dots, B'_\lambda$ を $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた bands とし, B_i は O_i と O_0 とを橋渡し ($i=1, \dots, \mu$), B'_j は O'_j と O'_0

とを橋渡しするものとする; すなわち $h(\mathcal{O}; B_1, \dots, B_\mu)$ および $h(\mathcal{O}'; B'_1, \dots, B'_\lambda)$ は共に $\mathbb{R}^3$ 内の 1 次元結び目である (定義と記号については [8; Def. 1.1] を参照のこと)。

さらに $B_1^*, \dots, B_\mu^*, B_1'^*, \dots, B_\lambda'^*$ を $\mathbb{R}^2$ 内の向き付けられた bands とし, B_i^* は O_i と O_0 を橋渡しかつ $B_i^* \cap O_i = B_i \cap O_i$, $B_i^* \cap O_0 = B_i \cap O_0$ ($i=1, \dots, \mu$), $B_j'^*$ は O_j' と O'_0 とを橋渡しかつ $B_j'^* \cap O_j' = B_j' \cap O_j'$, $B_j'^* \cap O'_0 = B_j' \cap O'_0$ ($j=1, \dots, \lambda$) が成り立つものとする。

このとき, 多面体 $(\mathcal{O} \cup B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cup (\mathcal{O}' \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda)$ と $(\mathcal{O} \cup B_1^* \cup \dots \cup B_\mu^*) \cup (\mathcal{O}' \cup B_1'^* \cup \dots \cup B_\lambda'^*)$ の間の $\mathbb{R}^3$ における絡み目ホモトピー $\{\eta_t\}_{t \in I}$ が存在し, 次を満たす:

(i) 任意の $t \in I$ について $\eta_t(O_0 \cup O'_0) = O_0 \cup O'_0$; 従って $\eta_1(O_i) = O_i$, $\eta_1(B_i) = B_i^*$ ($i=1, \dots, \mu$), $\eta_1(O_j') = O_j'$, $\eta_1(B_j') = B_j'^*$ ($j=1, \dots, \lambda$),

(ii) $\eta_t(O_i) \cap \eta_{t'}(O_k) = \emptyset$ ($i \neq k$), $\eta_t(O_j') \cap \eta_{t'}(O'_h) = \emptyset$ ($\forall t, t' \in I$).

証明: 仮定条件がたくさんある長い補題であるが, この補題は Goldsmith [6] の Lemma 2.3 と本質的に同じである。実際, $h(\mathcal{O}; B_1, \dots, B_\mu) \cup h(\mathcal{O}'; B'_1, \dots, B'_\lambda)$ は 2 成分のリボン型 1 次元絡み目である。さて $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda) \cap (\circ D_0 \cup \circ D_1 \cup \dots \cup \circ D_\mu \cup \circ D'_0 \cup \circ D'_1 \cup \dots \cup \circ D'_\lambda) = \emptyset$ ならば, 多面体 $(D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_\mu \cup B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cup (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_\lambda \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda)$ は $D_0 \cup D'_0$

を固定したまま R^3 内で $(D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_\mu \cup B_1^* \cup \dots \cup B_\mu^*) \cup (D_0' \cup D_1' \cup \dots \cup D_\lambda' \cup B_1'^* \cup \dots \cup B_\lambda'^*)$ と全同位であることは明らかで、従って補題も成立することに注意する。2段階に分けて証明を与える。

(第1段) bands $B_1, \dots, B_\mu, B_1', \dots, B_\lambda'$ は十分細いと仮定してよいから、必要ならば全同位で少し変形することにより、射影 $p: R^3 \rightarrow R^2; (x, y, z) \rightarrow (x, y, 0)$, に関して $(O \cup B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cup (O' \cup B_1' \cup \dots \cup B_\lambda')$ は結び目理論の意味で正則 (regular) な位置にあるとしてよい; すなわち p の特異点は通常の方法で、図1に示すように、高々2重点しか含まない上交又と下交又として平面 R^2 上に示すことができる。(今後は特に断わらなくとも、必要な全同位によって常にこの状態に変形しておくものとする。)

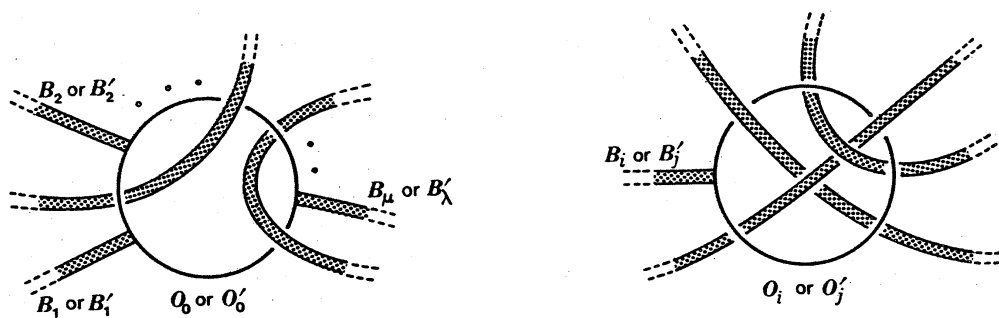


図 1

さてまず B_1 と O との交又で B_1 が上になるところがあれば、図2(a)に示すように、その交又の上下を交換して新しい B_1 は射影 p に関して O の下に来るようにする。以

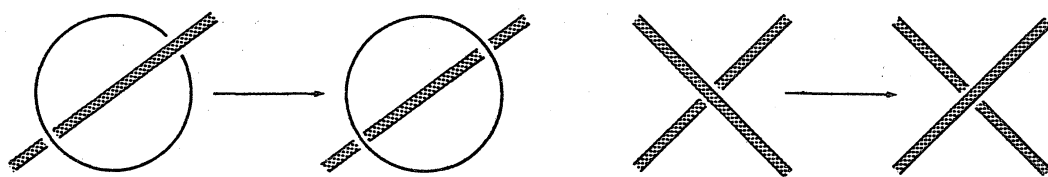


図2

下, 帰納的に, B_i と $\mathcal{O} \cup B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$ との交叉のうち B_i が上になるところで交叉の上下を交換して, 新しい B_i が $\mathcal{P}$ に関して $\mathcal{O} \cup B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$ の下に来るようにする ($i=2, \dots, \mu$)。

(図2参照). 実際このような変形は絡み目ホモトピーで実現されることは明らかである。

次に全く同様に, B'_1 と $\mathcal{O}'$ の交叉のいくつかを交換して, 新しい B'_1 が $\mathcal{O}'$ の下に来るようにする。以下帰納的に, B'_j と $\mathcal{O}' \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_{j-1}$ の交叉のいくつかを交換して, 新しい B'_j が $\mathcal{O}' \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_{j-1}$ の下に来るようにする ($j=2, \dots, \lambda$)。

この結果 $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cap (\circ D_0 \cup \circ D_1 \cup \dots \cup \circ D_\mu) = \emptyset$, $(B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda) \cap (\circ D'_0 \cup \circ D'_1 \cup \dots \cup \circ D'_\lambda) = \emptyset$ となった。

(第2段) ここでは $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_\lambda)$ と $(B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda) \cap (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_\mu)$ を除くことを目標とする。

$B_i \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_\lambda) \neq \emptyset$ と仮定する。 B_i に O_i から O_0 に向けて向きを指定し, $b_1, b_2, \dots, b_m$ を $B_i \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_\lambda)$ の線分とする; ただし B_i の向きに従ってこの順に並んでいるものとする。今 $b_1 \subset B_i \cap D'_j$ と仮定してよい。 b_1 によって切り取られる B_i の一部を $\bar{B}_i$ とするとき, $D_i \cup \bar{B}_i \cup D'_j$ の

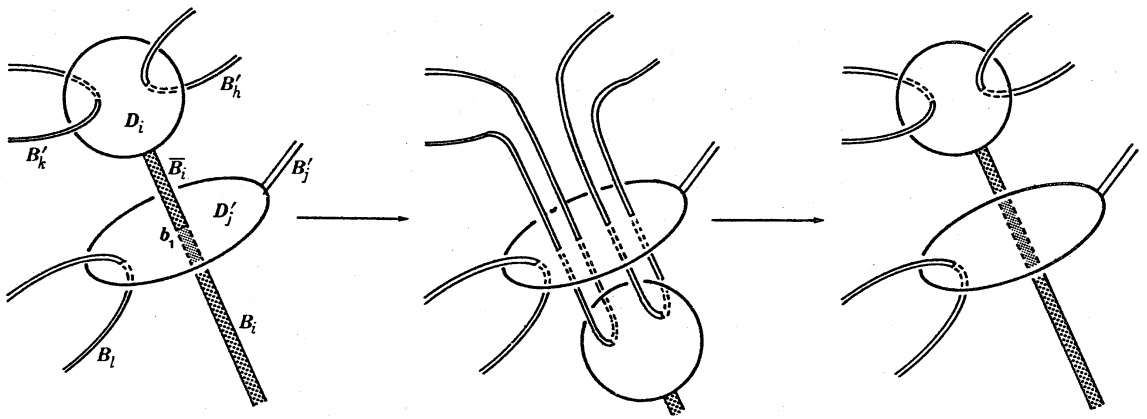


図 3

正則近傍 $N(D_i \cup \bar{B}_i \cup D_j'; \mathbb{R}^3)$ 内で $D_i \cup B_i$ をイソトープに変形し、図3に示すように $B_i \cap (D_0' \cup D_1' \cup \dots \cup D_\lambda') = b_2 \cup \dots \cup b_m$ となるようにする。 $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cap {}^\circ D_i = \emptyset$ だから、この変形の後も $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cap ({}^\circ D_0 \cup {}^\circ D_1 \cup \dots \cup {}^\circ D_\mu) = \emptyset$ である。一方、図3の中央の図に示すように、 $(B_1' \cup \dots \cup B_\lambda') \cap {}^\circ D_j'$ には新しい交叉が生ずるが、これらの新しい交叉は(第1段)と同じ変形を施すことによって除去することが出来る。この結果 $D_i \cup B_i$ を D_j' と交わらないように $N(D_i \cup \bar{B}_i \cup D_j'; \mathbb{R}^3)$ の中でさらに変形して D_i を最初の位置に戻すことが出来る。

この操作の反復により $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cap ({}^\circ D_0 \cup {}^\circ D_1 \cup \dots \cup {}^\circ D_\mu \cup D_0' \cup D_1' \cup \dots \cup D_\lambda') = \emptyset$, $(B_1' \cup \dots \cup B_\lambda') \cap (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_\mu \cup {}^\circ D_0' \cup {}^\circ D_1' \cup \dots \cup {}^\circ D_\lambda') = \emptyset$ となるから、証明の最初に述べた状態になり、補題は証明された。 $\square$

2.2 補題 $\tilde{D}_0$ と $\tilde{D}_0'$ を $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の交わらない円板とし、

適当に向きを指定する。 $\tilde{O}_0 = \partial \tilde{D}_0$, $\tilde{O}'_0 = \partial \tilde{D}'_0$ とし, $a_1, \dots, a_\alpha$ を互いに交わらない $\tilde{O}_0$ の部分弧とし, $a'_1, \dots, a'_\beta$ を互いに交わらない $\tilde{O}'_0$ の部分弧とする。 $b_1, \dots, b_\alpha, b'_1, \dots, b'_\beta$ を $\mathbb{R}^3$ における互いに交わらない単純弧で, 次の条件を満たすものとする: $b_i \cap (\tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0) = \partial b_i \cap \tilde{O}_0 = \partial b_i = \partial a_i$ ($i=1, \dots, \alpha$), $b'_j \cap (\tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0) = \partial b'_j \cap \tilde{O}'_0 = \partial b'_j = \partial a'_j$ ($j=1, \dots, \beta$); さらに $k_i = a_i \cup b_i$, $k'_j = a'_j \cup b'_j$ とする。

$b_1^*, \dots, b_\alpha^*, b_1'^*, \dots, b_\beta'^*$ を $\mathbb{R}^2$ 上の互いに交わらない単純弧で, $b_i^* \cap (\tilde{D}_0 \cup \tilde{D}'_0) = \partial b_i^* \cap \tilde{O}_0 = \partial b_i^* = \partial a_i$ ($i=1, \dots, \alpha$), $b_j'^* \cap (\tilde{D}_0 \cup \tilde{D}'_0) = \partial b_j'^* \cap \tilde{O}'_0 = \partial b_j'^* = \partial a'_j$ ($j=1, \dots, \beta$) を満たすとする。

ここで特に次の2条件が成立すると仮定する:

(1) $\mathbb{R}^3$ の中で, 多面体 $P \cup P' = (k_1 \cup \dots \cup k_\alpha) \cup (k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta)$ は $\alpha + \beta$ 成分の平凡な1次元絡み目 $\tilde{O} \cup \tilde{O}' = (\tilde{O}_1 \cup \dots \cup \tilde{O}_\alpha) \cup (\tilde{O}'_1 \cup \dots \cup \tilde{O}'_\beta)$ と2成分の多面体として絡み目ホモトープである; $P \cup P' \simeq_{\ell} \tilde{O} \cup \tilde{O}'$,

(2) k_i は $\mathbb{R}^3 - \tilde{O}'_0$ で可縮 ($i=1, \dots, \alpha$), k'_j は $\mathbb{R}^3 - \tilde{O}_0$ で可縮である ($j=1, \dots, \beta$)。

すると $\mathbb{R}^3$ における多面体 $(\tilde{O}_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (\tilde{O}'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ と $(\tilde{O}_0 \cup b_1^* \cup \dots \cup b_\alpha^*) \cup (\tilde{O}'_0 \cup b_1'^* \cup \dots \cup b_\beta'^*)$ の間の絡み目ホモトピー $\{\tilde{\eta}_t\}_{t \in I}$ が存在し, (任意の $t \in I$ について $\tilde{\eta}_t(\tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0) = \tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0$ となる。 (従って $\tilde{\eta}_1(b_i) = b_i^*$, $\tilde{\eta}_1(b'_j) = b_j'^*$.)

証明 便宜上, 命題中 α tildes はすべて省略し, $\tilde{D}_0, \tilde{D}'_0, \tilde{O}_i, \tilde{O}'_i$ 等はすべて D_0, D'_0, O_i, O'_i 等で表すことにする。

適当な全同位の後では, 射影 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \rightarrow (x, y, 0)$, に関して $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ は結び目理論の意味で正則 α 位置にあるとしてよい。従って普通に上交叉と下交叉によって平面 $\mathbb{R}^2$ 上に図示される。

(第1段) b_1 と O_0 の交叉と b_1 自身の交叉のいくつかで交叉の上下を入れ換えなように b_1 を変形し, b_1 が O_0 の下に来てかつ $k_1 = a_1 \cup b_1$ が $\mathbb{R}^3$ で平凡形になるようにする。帰納的に, b_i と $O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_{i-1}$ の交叉と b_i 自身の交叉のいくつかで交叉の上下を交換するような b_i の変形によって, 新しい b_i は $O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_{i-1}$ の下に位置しかつ $k_i = a_i \cup b_i$ が $\mathbb{R}^3$ の平凡な1次元結び目になるようにする ($i=2, \dots, \alpha$)。このような変形はもちろん絡み目ホモトピーで実現される。

b_i と同じように, b'_j ($j=1, \dots, \beta$) も帰納的に, b'_j と $O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_{j-1}$ の交叉と b'_j 自身の交叉のいくつかで交叉の上下を交換するような b'_j の変形を行うことによって, 新しい b'_j は $O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_{j-1}$ の下に位置しかつ $k'_j = a'_j \cup b'_j$ が平凡な1次元結び目となるようにする。

この結果, 新しい b_i, b'_j も同じ記号で書くことにすると, 次の4条件が満たされることがわかる:

(1) 新しい多面体 $P \cup P' = (k_1 \cup \dots \cup k_\alpha) \cup (k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta)$ は再び平凡な絡み目 $\Theta \cup \Theta' = (O_1 \cup \dots \cup O_\alpha) \cup (O'_1 \cup \dots \cup O'_\beta)$ と 2 成分の多面体として絡み目ホモトープである。

(2) k_i は $\mathbb{R}^3 - O'_0$ で可縮 ($i=1, \dots, \alpha$) で, k'_j は $\mathbb{R}^3 - O_0$ で可縮である ($j=1, \dots, \beta$)。

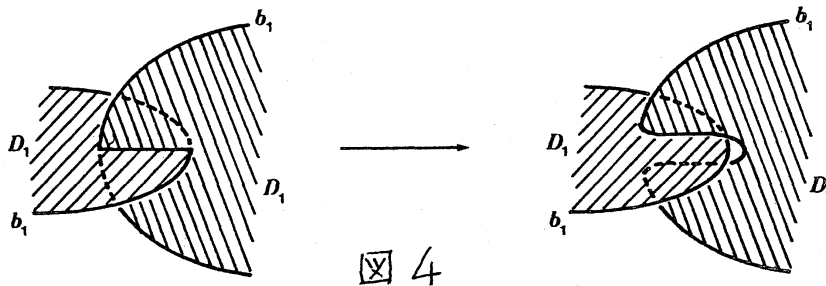
(3) 新しい 1 次元絡み目 $(k_1 \cup \dots \cup k_\alpha \subset \mathbb{R}^3), (k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta \subset \mathbb{R}^3)$ はいずれも平凡である。

(4) $(b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cap {}^\circ D_0 = \emptyset, (b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta) \cap {}^\circ D'_0 = \emptyset$ 。

尚この条件 (4) から, $D_0 \cup D'_0$ を固定する適当な全同位の後では, ${}^\circ b_i$ の射影は O_0 と交叉点を持たず, ${}^\circ b'_j$ の射影は O'_0 と交叉点を持たないと仮定してよい。

(第 2 段) ここでは, 前段の条件 (1) ~ (4) を保ったまま交わり $(b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cap D'_0, (b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta) \cap D_0$ を取り除くことが目標である。長いので更に (i), (ii), (iii) に分割する。

(i) 前段の条件 (2) と (4) から, k_1 は $\mathbb{R}^3 - O'_0$ で特異点を持つ円板 D_1 を bound し, $D_1 \cap D_0 = k_1 \cap O_0 = a_1$ で D_1 の特異点は clasps だけになるようにできる。(図 4 の左の図参照。)



そこで c_1 をこれらの clasps に沿って図4のように変形することによって D_1 を特異点の無い円板にする。このような変形はもちろん (絡み目) ホモトピーで実現される。ところで $(c_2 \cup \dots \cup c_\alpha) \cap D_1 \neq \emptyset$ ならば, $c_2 \cup \dots \cup c_\alpha$ を絡み目ホモトピーで変形し, $(c_2 \cup \dots \cup c_\alpha) \cap D_1 = \emptyset$ であつ前段の4条件 (1) ~ (4) を満たすようにすることは容易にできる。この結果 $D_1 \cap D'_0 = D_1 \cap {}^\circ D'_0$ は有限個の単純弧 (これらを $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ とする) と有限個の単純閉曲線 (これらを $\delta_1, \dots, \delta_m$ とする) から成るとしてよい。 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ は D_1 上で固有 (proper, i.e. $\gamma_i \cap \partial D_1 = \partial \gamma_i$) であるから, これらの単純弧のうちの少なくとも1本 (これを γ_1 とする) は D_1 上で円板 Δ_1 を切り取り, $\partial \Delta_1 \cap D'_0 = \gamma_1$, $\partial \Delta_1 \cap a_1 = \emptyset$ を満たす。 c_1 を Δ_1 に沿ってイントープに変形することにより, 新しい $k_1 = a_1 \cup c_1$ によって囲まれる円板 D_1 で, $D_1 \cap D'_0 \subset \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n \cup \delta_1 \cup \dots \cup \delta_m$ なるものを得る。 $(c_2 \cup \dots \cup c_\alpha \cup c'_1 \cup \dots \cup c'_\beta) \cap D'_0$ の中に新しい点が増えるかも知れないが, (第1段) と全く同じ方法で $(c'_1 \cup \dots \cup c'_\beta) \cap {}^\circ D'_0$ は再び除去できる。

上の操作を反復することにより, 円板 D_1 (再び同じ記号で示す) で, $\partial D_1 = a_1 \cup c_1 = k_1$, $D_1 \cap D_0 = k_1 \cap O_0 = a_1$, $D_1 \cap D'_0 = \emptyset$ を満たし, さらに $(c_2 \cup \dots \cup c_\alpha) \cap D_1 = \emptyset$ となるものが存在することがわかる。実際 $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ を除去した後, 単純閉曲

線 $\delta_1, \dots, \delta_m$ が残っていれば, これらは容易に除去することができる。

(ii) 一般に, 上の (i) とその議論から, 次の仮定をしてよいことがわかる: 互いに交わらない円板 $D_1, \dots, D_{i-1}$ が $\mathbb{R}^3$ に存在して, 次の条件を満たす: $\partial D_v = k_v = a_v \cup b_v$, $D_v \cap D_0 = k_v \cap O_0 = a_v$ ($v=1, \dots, i-1$), $(D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) \cap D'_0 = \emptyset$, $(b_i \cup \dots \cup b_\alpha) \cap (D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) = \emptyset$ 。

前段の条件 (2) と (4) および上記の $D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}$ の性質から, k_i は $\mathbb{R}^3 - O'_0$ で特異点を持つ円板 D_i を bound し, $D_i \cap (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) = k_i \cap O_0 = a_i$ で, D_i の特異点は clasps のみとなるようにできる。($D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}$ が一枚の円板であることを注意し, 上記 (i) の D_0 を $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}$ に置き換えて考えればよい。) そこで再び (i) の議論を反復することにより, 特異点のない円板 (再び D_i で示す) で, $\partial D_i = k_i = a_i \cup b_i$, $D_i \cap (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) = k_i \cap O_0 = a_i$, $D_i \cap D'_0 = \emptyset$ かつ $(b_{i+1} \cup \dots \cup b_\alpha) \cap (D_1 \cup \dots \cup D_i) = \emptyset$ となるものを得ることができ ($i=2, \dots, \alpha$) 。

結局, $O_0 \cup O'_0$ を固定するような $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ の絡み目ホモトピーが存在して, 新しい多面体 $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ は (第1段) の条件 (1), (2), (3) と次の条件を満たすことがわかる:

$$(4') \quad (b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cap ({}^o D_0 \cup {}^o D'_0) = \emptyset, \quad (b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta) \cap {}^o D'_0 = \emptyset.$$

(iii) 上の (i), (ii) と同じ議論を帰納的に $b'_1, \dots, b'_\beta$ に適用する。これによって, $O_0 \cup O'_0$ を固定するような $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ の絡み目ホモトピーで, 新しい $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ が前段の条件 (1), (2), (3) と次の条件を満たすものが存在する:

$$(4'') \quad (b_1 \cup \dots \cup b_\alpha \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta) \cap ({}^o D_0 \cup {}^o D'_0) = \emptyset.$$

(第3段) 前段の作業の終わった直後の状態をみれば, 互いに交わらない $\mathbb{R}^3$ 内の円板 $D'_1, \dots, D'_\beta$ で, $\partial D'_j = k'_j = a'_j \cup b'_j$, $D'_j \cap D'_0 = k'_j \cap O'_0 = a'_j$, $D'_j \cap D_0 = \emptyset$ ($j=1, \dots, \beta$) なるものが得られている。しかし一般に $(b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cap (D'_1 \cup \dots \cup D'_\beta) \neq \emptyset$ だから, ここでは上記の4条件 (1), (2), (3), (4'') を保持したままでの交点を除去するを目的とする。以下の議論は前段での議論にとってもよく似ている。

(b_1)-(i): 条件 (2) と (4) より, $k_1 \cup D_0$ が $\mathbb{R}^3 - (k'_1 \cup D'_0)$ において可縮であることが導びかれる。従って特異点を持つ円板 D_1^* が $\mathbb{R}^3 - (k'_1 \cup D'_0)$ に存在して, $D_1^* \cap D_0 = k_1 \cap O_0 = a_1$ で D_1^* は clasps のみを特異点として持つ。そこで前段の図4に示した方法で b_1 を clasps に沿って変形し, D_1^* が特異点を持たないようにできる。 $(b_2 \cup \dots \cup b_\alpha) \cap D_1^* \neq \emptyset$ ならば, $b_2 \cup \dots \cup b_\alpha$ をこれ迄に示した方法で絡み目ホモトピーの範囲で

変形し, $(b_2 \cup \dots \cup b_\alpha) \cap D_1^* = \emptyset$ である条件 (1), (2), (3), (4'') を保つようにできる。すると $D_1^* \cap D'_1 = D_1^* \cap D'_1$ は両方とも円板だから, 有限個の単純弧 (これを $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ とする) と有限個の単純閉曲線 (これを $\delta_1^*, \dots, \delta_m^*$ とする) とから成り, $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ は D_1^* 上で固有である。そこでこれらの単純弧から D_1^* 上で最小のもの (これを γ_1^* とする) を選り出すことができる; すなわち γ_1^* は D_1^* 上で円板 Δ_1^* を切り取り, $\partial \Delta_1^* \cap D'_1 = \gamma_1^*$, $\partial \Delta_1^* \cap a_1 = \emptyset$ となる。 b_1 を Δ_1^* に沿ってイソトープに変形することにより, 新しい $k_1 = a_1 \cup b_1$ によって囲まれる円板 (再び D_1^* で示す) で, $D_1^* \cap D'_1 \subset \gamma_2^* \cup \dots \cup \gamma_n^* \cup \delta_1^* \cup \dots \cup \delta_m^*$ となるものが得られる。 $D_1^* \cap (b_2 \cup \dots \cup b_\alpha \cup b'_2 \cup \dots \cup b'_\beta) \neq \emptyset$ だから, $(b_2 \cup \dots \cup b_\alpha \cup b'_2 \cup \dots \cup b'_\beta) \cap D'_1$ には新しい交点も現われるが, このうちの $(b'_2 \cup \dots \cup b'_\beta) \cap D'_1$ の点は (第1段) と同じ方法で除去することができる。この操作を反復することにより, 円板 $D_1^* \subset \mathbb{R}^3$ で, $\partial D_1^* = k_1$, $D_1^* \cap D_0 = k_1 \cap O_0 = a_1$, $D_1^* \cap (D'_0 \cup D'_1) = \emptyset$ を満たすものが得られる。この結果, 特に $b_1 \cap (D'_0 \cup D'_1) = \emptyset$ である。

(b_1)-(ii): 上の (b_1)-(i) の結果, 一般に次の仮定をしてよいことがわかる: $\mathbb{R}^3$ 内に互いに交わらない円板 $D'_1, \dots, D'_{j-1}$ が存在し, $\partial D'_\nu = k'_\nu = a'_\nu \cup b'_\nu$, $D'_\nu \cap D'_0 = k'_\nu \cap O'_0 = a'_\nu$ ($\nu = 1, \dots, j-1$), $(D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1}) \cap D_0 = \emptyset$, $b_1 \cap (D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1}) = \emptyset$ となる。

$b'_j \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1}) = \partial b'_j \cap O'_0 = \partial b'_j$ だから, 条件 (3) より円板 $D'_j \subset \mathbb{R}^3$ が存在して, $\partial D'_j = k'_j$, $D'_j \cap (D_0 \cup D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1}) = k'_j \cap O'_0 = a'_j$ を満たす。条件 (2), (4'') から, $k_1 \cup D_0$ は $\mathbb{R}^3 - (k'_j \cup D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1})$ で可縮であり, 従って再び (4'') より特異点を持つ円板 (再び D_1^* で示す) が $\mathbb{R}^3 - (k'_j \cup D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1})$ に存在して, $D_1^* \cap D_0 = k_1 \cap O_0 = a_1$ で D_1^* の特異点は clasps のみとなる。(b₁)-(i) と同じ議論を適用することによって D_1^* を特異点の無い円板で, $\partial D_1^* = k_1$, $D_1^* \cap D_0 = k_1 \cap O_1 = a_1$, $D_1^* \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_j) = \emptyset$ とできる ($j=2, \dots, \alpha$)。

∴ 結果次が結論される: $O_0 \cup O'_0$ を固定するような $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ の絡み目ホモトピーが存在して, 新しい $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ は条件 (1), (2), (3), (4'') と次の (5) を満たす。

(5) $\mathbb{R}^3$ の中に互いに交わらない円板 $D_1^*, D'_1, \dots, D'_\beta$ が存在して, $\partial D_1^* = k_1$, $\partial D'_j = k'_j$ ($j=1, \dots, \beta$), $D_1^* \cap (D_0 \cup D'_0) = k_1 \cap O_0 = a_1$, $D'_j \cap (D_0 \cup D'_0) = k'_j \cap O'_0 = a'_j$, $D_1^* \cap (b_2 \cup \dots \cup b_\alpha) = \emptyset$ を満たす。

注意: 条件 (5) における円板 $D'_1, \dots, D'_\beta$ は, (第3段) の最初のパラグラフで挙げた円板 $D'_1, \dots, D'_\beta$ とは異なる。実際 (b₁)-(i) のスタートにおいて, $k_1 \cup D_0$ は $\mathbb{R}^3 - (k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta \cup D'_0)$ において必ずしも可縮でない。(Brunnian rings [12] を思い出

せ。)

(第4段) 前段の議論を帰納的に k_i に適用すればよいのであるが、少し複雑なので、 k_i に関する部分を前段に沿って詳しく書いてみる。

前段の後、帰納的に、次の仮定をしてよい：

(5') $\mathbb{R}^3$ の中に互いに交わらない円板 $D_1^*, \dots, D_{i-1}^*, D'_1, \dots, D'_\beta$ が存在して、 $\partial D_\nu^* = k_\nu$ ($\nu = 1, \dots, i-1$), $\partial D'_j = k'_j$ ($j = 1, \dots, \beta$), $D_\nu^* \cap (D_0 \cup D'_0) = k_\nu \cap O_0 = a_\nu$, $D'_j \cap (D_0 \cup D'_0) = k'_j \cap O'_0 = a'_j$ かつ $(D_1^* \cup \dots \cup D_{i-1}^*) \cap (D_0 \cup D'_0) = \emptyset$ を満たす。

(b_i)-(i) : 条件 (2), (4'') および (5') から、 $k_i \cup D_0 \cup D_1^* \cup \dots \cup D_{i-1}^*$ は $\mathbb{R}^3 - (k'_1 \cup D'_0)$ で可縮である。従って clasps 型の特異点 a_i を持つ円板 $D_i^* \subset \mathbb{R}^3 - (k'_1 \cup D'_0)$ が存在して、 $D_i^* \cap (D_0 \cup D_1^* \cup \dots \cup D_{i-1}^*) = k_i \cap O_0 = a_i$ となる。 (b_1) -(i) と全く同じ議論により、 D_1^* を特異点を持たない円板に置き換えることができる。

(b_i)-(ii) : 帰納的に次を仮定してよい： $\mathbb{R}^3$ の中に互いに交わらない円板 $D'_1, \dots, D'_{j-1}, D'_j$ が存在して、 $\partial D'_\nu = k'_\nu$, $D'_\nu \cap D'_0 = k'_\nu \cap O'_0 = a'_\nu$ ($\nu = 1, \dots, j$), $(D_0 \cup D_1^* \cup \dots \cup D_{i-1}^*) \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_j) = \emptyset$ が成立し、 $k_i \cup D_0 \cup D_1^* \cup \dots \cup D_{i-1}^*$ は $\mathbb{R}^3 - (k'_j \cup D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1})$ で可縮である。従って clasps 型の特異点 a_i を持つ円板 $D_i^* \subset \mathbb{R}^3 - (k'_j \cup D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{j-1})$ が存在して、 $\partial D_i^* = k_i$, $D_i^* \cap (D_0 \cup D_1^* \cup \dots \cup D_{i-1}^*) = k_i \cap O_0 = a_i$ となる。 (b_1) -(ii)

と同じ議論を適用して D_i^* を特異点を持たない円板に置き、
 $\partial D_i^* = k_i$, $D_i^* \cap (D'_0 \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_j) = \emptyset$, $(D_1^* \cup \dots \cup D_i^*) \cap (b_{i+1} \cup \dots \cup b_\alpha)$
 $= \emptyset$ にできる ($i=2, \dots, \alpha$), ($j=1, \dots, \beta$).

従って上記の長い議論の末に次の結論される: $O_0 \cup O'_0$ を
 固定するような $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ の絡み目ホ
 モトピーが存在し、新しい $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$
 は条件 (1), (2), (3), (4'') および次の (5'') を満たす:

(5'') $\mathbb{R}^3$ の中に互いに交点を持たない円板 $D_1^*, \dots, D_\alpha^*, D'_1,$
 $\dots, D'_\beta$ が存在し, $\partial D_i^* = k_i$ ($i=1, \dots, \alpha$), $\partial D'_j = k'_j$ ($j=1, \dots, \beta$),
 $D_i^* \cap (D_0 \cup D'_0) = k_i \cap O_0 = a_i$, $D'_j \cap (D_0 \cup D'_0) = k'_j \cap O'_0 = a'_j$ を
 満たす。

この形になれば, $(O_0 \cup b_1 \cup \dots \cup b_\alpha) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ と $(O_0$
 $\cup b_1^* \cup \dots \cup b_\alpha^*) \cup (O'_0 \cup b'_1 \cup \dots \cup b'_\beta)$ の間の絡み目ホモトピー
 は容易に作れるので, 補題 2.2 の証明が完了した。□

次の補題も条件・仮定がたくさんあって長いけど、証明は上
 の補題 2.2 を使って簡単に得られる。

2.3 補題 $\tilde{D}_0$ と $\tilde{D}'_0$ を $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の交わらない向き付けら
 れた円板とし, $\partial \tilde{D}_0 = \tilde{O}_0$, $\partial \tilde{D}'_0 = \tilde{O}'_0$ とする。 $a_1, \dots, a_\alpha$ を $\tilde{O}_0$
 上の互いに交わらない単純弧, $a'_1, \dots, a'_\beta$ を $\tilde{O}'_0$ 上の互いに

交わらない部分弧とする。 $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_\alpha, \tilde{B}'_1, \dots, \tilde{B}'_\beta$ を互いに交わらない $\mathbb{R}^3$ 内の bands とし, $\tilde{B}_i$ は a_i の両端の部分で $\tilde{O}_0$ 自身に橋渡し (span) し ($i=1, \dots, \alpha$), $\tilde{B}'_j$ は a'_j の両端の部分で $\tilde{O}'_0$ 自身に橋渡しするとする ($j=1, \dots, \beta$). $\therefore$

$$\begin{aligned} h(\tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0; \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_\alpha, \tilde{B}'_1, \dots, \tilde{B}'_\beta) \\ &= h(\tilde{O}_0; \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_\alpha) \cup h(\tilde{O}'_0; \tilde{B}'_1, \dots, \tilde{B}'_\beta) \\ &= (\tilde{O}_0^* \cup \tilde{O}_1 \cup \dots \cup \tilde{O}_\alpha) \cup (\tilde{O}'_0^* \cup \tilde{O}'_1 \cup \dots \cup \tilde{O}'_\beta) \end{aligned}$$

とおく. $\therefore$ $\tilde{O}_i$ は $h(\tilde{O}_0; \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_\alpha)$ の成分で $\tilde{O}_i \cap a_i \neq \emptyset$ ($i=1, \dots, \alpha$) なるものをとり, $\tilde{O}'_j$ は $h(\tilde{O}'_0; \tilde{B}'_1, \dots, \tilde{B}'_\beta)$ の成分で $\tilde{O}'_j \cap a'_j \neq \emptyset$ ($j=1, \dots, \beta$) なるものをとる.

$B_1^*, \dots, B_\alpha^*, B_1'^*, \dots, B_\beta'^*$ を互いに交わらない $\mathbb{R}^2$ 上の bands とし, B_i^* は $\tilde{O}_0$ 自身と橋渡しし, $B_i^* \cap \tilde{D}_0 = B_i^* \cap \tilde{O}_0 = \tilde{B}_i \cap \tilde{O}_0$ ($i=1, \dots, \alpha$), $B_j'^*$ は $\tilde{O}'_0$ 自身と橋渡しし, $B_j'^* \cap \tilde{D}'_0 = B_j'^* \cap \tilde{O}'_0 = \tilde{B}'_j \cap \tilde{O}'_0$ ($j=1, \dots, \beta$) が成り立つとする.

次の (a), (b) を仮定する:

(a) $\tilde{O}_0^* \cup \tilde{O}_1 \cup \dots \cup \tilde{O}_\alpha \cup \tilde{O}'_0^* \cup \tilde{O}'_1 \cup \dots \cup \tilde{O}'_\beta$ は平凡な $\alpha + \beta + 2$ 成分の 1 次元絡み目と絡み目ホモトピーである.

(b) 上の部分絡み目 $\tilde{O}_1 \cup \dots \cup \tilde{O}_\alpha \cup \tilde{O}'_1 \cup \dots \cup \tilde{O}'_\beta$ は $\alpha + \beta$ 成分の平凡な 1 次元絡み目である.

$\therefore$ α とし, $(\tilde{O}_0 \cup \tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_\alpha) \cup (\tilde{O}'_0 \cup \tilde{B}'_1 \cup \dots \cup \tilde{B}'_\beta)$ と $(\tilde{O}_0 \cup B_1^* \cup \dots \cup B_\alpha^*) \cup (\tilde{O}'_0 \cup B_1'^* \cup \dots \cup B_\beta'^*)$ α 個の絡み目ホモトピー $\{\tilde{\eta}_t\}_{t \in I}$

が存在して, 任意の $t \in I$ について $\tilde{\eta}_t(\tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0) = \tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0$

を満たす. (従って $\tilde{\eta}_1(\tilde{B}_i) = B_i^*$, $\tilde{\eta}_1(\tilde{B}'_j) = B_j'^*$ である.)

証明. b_i (resp. b'_j) を band $\tilde{B}_i$ (resp. $\tilde{B}'_j$) の中心線とする ($i=1, \dots, \alpha$), ($\text{resp. } j=1, \dots, \beta$). (これは Goldsmith [6] の Def. 1.5 での associated connecting arc と同じものである.) k_i (resp. k'_j) を $a_i \cup b_i$ (resp. $a'_j \cup b'_j$) の中の (一意に決まる) 単純閉曲線とする.

さて定義より $(k_1 \cup \dots \cup k_\alpha) \cup (k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta)$ は $(\tilde{O}_1 \cup \dots \cup \tilde{O}_\alpha) \cup (\tilde{O}'_1 \cup \dots \cup \tilde{O}'_\beta)$ と $\mathbb{R}^3$ 内で全同位であるから, $(k_1 \cup \dots \cup k_\alpha) \cup (k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta)$ は補題 2.2 の仮定 (1) を満たす.

次に今対象としている $\mathbb{R}^3$ 内の単純閉曲線に適当に向きを与えて 1 次元サイクルと考へれば, 上の定義より linking 数 (linking number) について次の成立する:

$$\begin{cases} \text{lk}(k_i, \tilde{O}_0^*) = \text{lk}(\tilde{O}_i, \tilde{O}_0'^*) = 0, & \text{lk}(k_i, \tilde{O}'_j) = \text{lk}(\tilde{O}_i, \tilde{O}'_j) = 0, \\ \text{lk}(k'_j, \tilde{O}_0^*) = \text{lk}(\tilde{O}'_j, \tilde{O}_0^*) = 0 & (i=1, \dots, \alpha), (j=1, \dots, \beta). \end{cases}$$

さらに $\mathbb{Z}_2$ -サイクルとして,

$$\begin{cases} \tilde{O}_0^* + \tilde{O}_i \sim \tilde{O}_0 \text{ (homologous) in } \mathbb{R}^3 - (k_1 \cup \dots \cup k_\alpha \cup k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta) \\ \tilde{O}_0'^* + \tilde{O}'_j \sim \tilde{O}_0 \text{ in } \mathbb{R}^3 - (k_1 \cup \dots \cup k_\alpha \cup k'_1 \cup \dots \cup k'_\beta) \end{cases}$$

が成立する. 従って次の結論を得る:

$$\text{lk}(k_i, \tilde{O}'_0) = \text{lk}(k'_j, \tilde{O}_0) = 0 \quad (i=1, \dots, \alpha; j=1, \dots, \beta).$$

$\tilde{O}_0$ も $\tilde{O}'_0$ も $\mathbb{R}^3$ の 1 次元結び目として平凡だから, k_i は

$\mathbb{R}^3 - \tilde{\sigma}_i$ は可縮 ($i=1, \dots, \alpha$), k_j は $\mathbb{R}^3 - \tilde{\sigma}_j$ は可縮 ($j=1, \dots, \beta$) である。これは前の補題 2.2 の仮定 (2) である。

この結果, 補題 2.3 は補題 2.2 から直ちに得られる。実際 bands $\tilde{B}_i$ や $\tilde{B}_j$ の捻りは, その両端 $\tilde{B}_i \cap \alpha_i$ および $\tilde{B}_j \cap \alpha_j$ を固定したまま, $\tilde{B}_i$ および $\tilde{B}_j$ の近傍の中で結び目ホモトピーによって簡単に解消してしまうからである。□

§3 定理 1.4 の証明

ここで目標の定理 1.4 の証明を手えらる, 長いものを 3 段階に分割する。

(第 1 段) 2次元球面はコンパクトなので, L の特異点 ([5] singularities, [14] locally knotted points) は有限個である。 S_i^2 ($i=1, 2$) 上に木 (tree) T_i を, これらの特異点をすべて含むように, 選ぶ。すると $(2, 4)$ -球体対

$$(L(N(T_i; S_i^2)) \subset N(L(T_i); \mathbb{R}^4))$$

が得られるが, Fox-Milnor の定理 [5] により, 1次元結び目

$$(L(\partial N(T_i; S_i^2)) \subset \partial N(L(T_i); \mathbb{R}^4))$$

は slice 結び目である。従って 4次元球体 $N(L(T_i); \mathbb{R}^4)$ の中に局所平坦な固有円板 E_i が存在して, $\partial E_i = L(\partial N(T_i; S_i^2))$ となる; $\mathbb{R}^4$ の中に局所平坦な 2次元球面

$$K_i = L(S_i^2 - \circ N(T_i; S_i^2)) \cup E_i$$

を得る。よく知られている Alexander のトリックにより, 絡み目 $L(S_1^2 \cup S_2^2)$ は $K_1 \cup K_2$ とイソトープであることがわかる。従って L はもともと局所平坦であると仮定してよい。

これから後は像 $(L(S_1^2) \cup L(S_2^2) \subset \mathbb{R}^4) = (K \cup K' \subset \mathbb{R}^4)$ について議論する。

(第2段) $K \cup K' \subset \mathbb{R}^4$ は命題 1.2 の標準形であるとしてよい。 $K \cup K'$ を実現閉曲面とする 1 次元絡み目の列を

$$\mathcal{O} \cup \mathcal{O}' \rightarrow k \cup k' \rightarrow \tilde{\mathcal{O}} \cup \tilde{\mathcal{O}}'$$

とする; すなわち $\mathcal{O}$ は $K \cap \mathbb{R}^3[-3]$ に対応する平凡な 1 次元絡み目, $\mathcal{O}'$ は $K' \cap \mathbb{R}^3[-3]$ に対応する平凡な 1 次元絡み目, k は $K \cap \mathbb{R}^3[0]$ に対応する 1 次元結び目, k' は $K' \cap \mathbb{R}^3[0]$ に対応する 1 次元結び目, $\tilde{\mathcal{O}}$ は $K \cap \mathbb{R}^3[3]$ に対応する 1 次元の平凡な絡み目, $\tilde{\mathcal{O}}'$ は $K' \cap \mathbb{R}^3[3]$ に対応する平凡な 1 次元絡み目である (詳しくは [8, §1] を参照されたい。) 特に

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_\mu, \quad \mathcal{O}' = \mathcal{O}'_0 \cup \mathcal{O}'_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}'_\lambda,$$

$$\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}_0 \cup \tilde{\mathcal{O}}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\mathcal{O}}_\alpha, \quad \tilde{\mathcal{O}}' = \tilde{\mathcal{O}}'_0 \cup \tilde{\mathcal{O}}'_1 \cup \cdots \cup \tilde{\mathcal{O}}'_\beta$$

とおく。 $D_0, D_1, \dots, D_\mu, D'_0, D'_1, \dots, D'_\lambda$ を互いに交わらない向き付けられた円板で, 超平面 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上にあるものとする。

今 $\partial D_i = \mathcal{O}_i$ ($i=0, 1, \dots, \mu$), $\partial D'_j = \mathcal{O}'_j$ ($j=0, 1, \dots, \lambda$) と仮定してよい。さらに $k = h(\mathcal{O}; B_1, \dots, B_\mu)$, $k' = h(\mathcal{O}'; B'_1, \dots, B'_\lambda)$ とする; すなわち 1 次元結び目 k は $\{B_1, \dots, B_\mu\}$ に沿っての μ -

fusion によって得られ, k' は $\{B'_1, \dots, B'_\lambda\}$ に沿っての λ -fusion によって得られたとする. また $\tilde{\mathcal{O}} = h(k; \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_\alpha)$, $\tilde{\mathcal{O}}' = h(k'; \tilde{B}'_1, \dots, \tilde{B}'_\beta)$ と仮定する; すなわち $\tilde{\mathcal{O}}$ は $\{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_\alpha\} = \tilde{\mathcal{B}}$ に沿って k から α -fission によって得られ, $\tilde{\mathcal{O}}'$ は $\{\tilde{B}'_1, \dots, \tilde{B}'_\beta\} = \tilde{\mathcal{B}}'$ に沿って k' から β -fission によって得られたものと仮定する. [8, Lemma 1.14] とその証明 (または [14, Lemma 2.5] とその証明) から, 次の (i), (ii), (iii) を仮定してよいことがわかる:

(i) B_i は O_i と O_0 を橋渡し ($i=1, \dots, \mu$), B'_j は O'_j と O'_0 を橋渡しする ($j=1, \dots, \lambda$),

(ii) $O_0 - (B_1 \cup \dots \cup B_\mu)$ の (小さな) 互いに交わらない部分弧 $a_1, \dots, a_\alpha$ と, $O'_0 - (B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda)$ の (小さな) 互いに交わらない部分弧 $a'_1, \dots, a'_\beta$ が存在して, $\tilde{B}_i$ は $k = h(\mathcal{O}; B_1, \dots, B_\mu)$ に a_i の両端の部分弧で橋渡し ($i=1, \dots, \alpha$), $\tilde{B}'_j$ は $k' = h(\mathcal{O}'; B'_1, \dots, B'_\lambda)$ に a'_j の両端の部分弧で橋渡しする ($j=1, \dots, \beta$),

(iii) $(B_1 \cup \dots \cup B_\mu \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda) \cap (\tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_\alpha \cup \tilde{B}'_1 \cup \dots \cup \tilde{B}'_\beta) = \emptyset$.

(第3段) これで準備がすべて整ったので, 前節で用意した補題を用いて証明に入る. 補題 2.1 より $(\mathcal{O} \cup B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cup (\mathcal{O}' \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda)$ の絡み目ホモトピー $\{\eta_s\}_{s \in I}$ が存在し, 次の2条件を満たす:

$$(0) \quad \eta_s(O_0 \cup O'_0) = O_0 \cup O'_0 \quad (\forall s \in I),$$

$$(i) \quad \eta_1((O \cup B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cup (O' \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda)) \subset \mathbb{R}^2.$$

特に補題 2.1 の証明中 α (第 1 段) で用いた最初 α 絡み目ホモトピーは、次に図に示すように適当な全同位変形を施すことによって、さらに次の条件をも満たす α 固定してよい：

$$(ii) \quad \eta_s(B_1 \cup \dots \cup B_\mu) \cap (a_1 \cup \dots \cup a_\alpha) = \emptyset, \quad (\forall s \in I),$$

$$\eta_s(B'_1 \cup \dots \cup B'_\lambda) \cap (a'_1 \cup \dots \cup a'_\beta) = \emptyset, \quad (\forall s \in I).$$

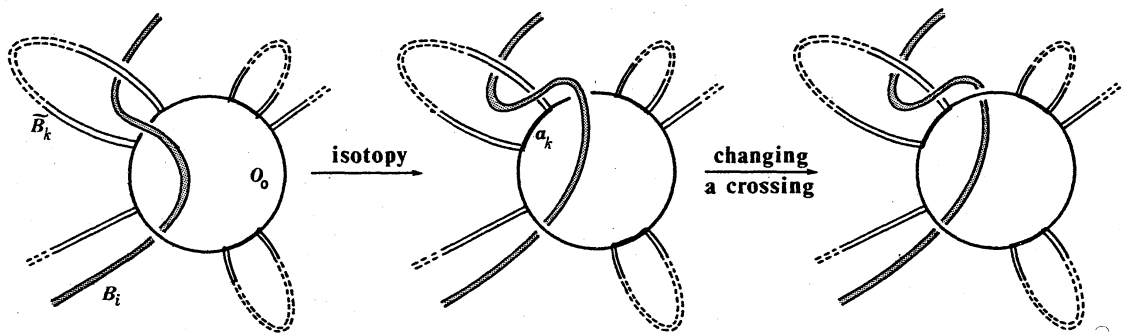


図 5

前段の最後の条件 (ii), (iii) にこの α 固定を合せると、この絡み目ホモトピー $\{\eta_s\}_{s \in I}$ は $\tilde{O} \cup \tilde{O}' \cup (a_1 \cup \dots \cup a_\alpha \cup a'_1 \cup \dots \cup a'_\beta)$ では $(a_1 \cup \dots \cup a_\alpha \cup a'_1 \cup \dots \cup a'_\beta)$ を固定した上でイソトープな変形であることがわかる。特に

$$\eta_1(h(O; B_1, \dots, B_\mu) \cup h(O'; B'_1, \dots, B'_\lambda)) = \eta_1(k \cup k')$$

は平凡な 2 成分の 1 次元絡み目であり、 $\eta_1(\tilde{B}_1), \dots, \eta_1(\tilde{B}_\alpha), \eta_1(\tilde{B}'_1), \dots, \eta_1(\tilde{B}'_\beta)$ は互いに交わらない bands で、 $\eta_1(k \cup k')$ を $\tilde{O}_0 \cup \tilde{O}'_0$ とおき $\eta_1(\tilde{B}_i)$ を改めて $\tilde{B}_i$, $\eta_1(\tilde{B}'_j)$ を改めて $\tilde{B}'_j$ とおいて

みれば、これらは補題 2.3 の仮定をすべて満たすことが容易にわかる。補題 2.3 より、 $(\eta_1(k) \cup \eta_1(\tilde{B}_1) \cup \cdots \cup \eta_1(\tilde{B}_\alpha)) \cup (\eta_1(k') \cup \eta_1(\tilde{B}'_1) \cup \cdots \cup \eta_1(\tilde{B}'_\beta))$ の絡み目ホモトピー $\{\tilde{\eta}_s\}_{s \in I}$ が存在して次の条件を満たす：

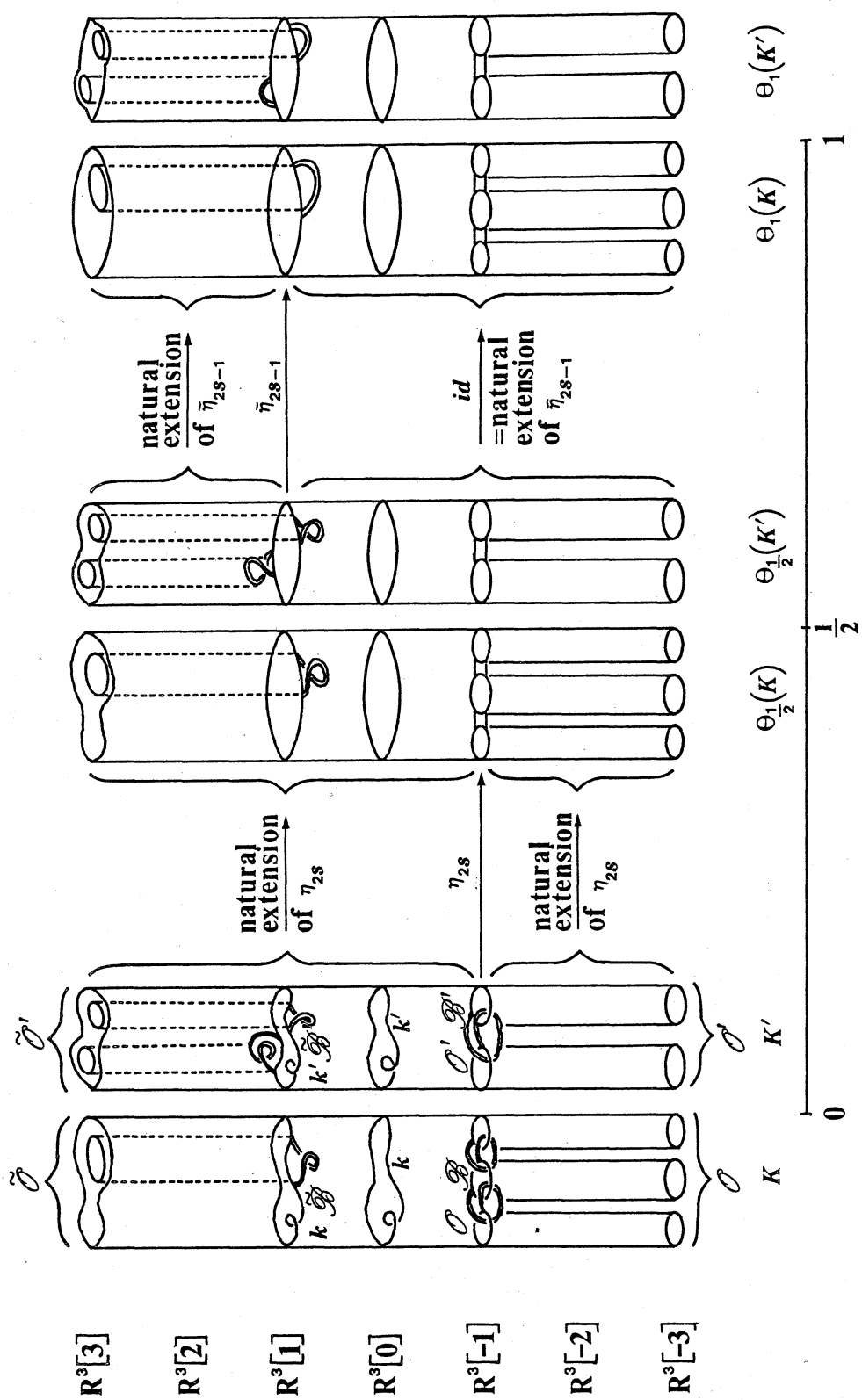
$$(0) \quad \tilde{\eta}_s(\eta_1(k \cup k')) = \eta_1(k \cup k'), \quad (\forall s \in I),$$

$$(i) \quad \tilde{\eta}_1((\eta_1(k) \cup \eta_1(\tilde{B}_1) \cup \cdots \cup \eta_1(\tilde{B}_\alpha)) \cup (\eta_1(k') \cup \eta_1(\tilde{B}'_1) \cup \cdots \cup \eta_1(\tilde{B}'_\beta))) \subset \mathbb{R}^2.$$

よって $K \cup K'$ と $\mathbb{R}^4$ 内の平凡な 2 成分の 2 次元絡み目との間を求めた絡み目ホモトピー $\{\theta_s\}_{s \in I}$ は、各レベル $(K \cup K') \cap \mathbb{R}^3[t]$, $-3 \leq t \leq 3$, ごとに $\{\eta_s\}_{s \in I}$ と $\{\tilde{\eta}_s\}_{s \in I}$ を自然に拡張することによって容易に作ることができる。実際、 $\{\theta_s\}_{s \in I}$ は次のように定義される： $\mathbb{R}^3[t]$ と $\mathbb{R}^3$ を自然に同一視するとき、

$$\theta_s((K \cup K') \cap \mathbb{R}^3[t]) = \begin{cases} \eta_{2s}((K \cup K') \cap \mathbb{R}^3[t]) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}, -3 \leq t \leq 3), \\ \tilde{\eta}_{2s-1}(\eta_1(K \cup K') \cap \mathbb{R}^3[t]) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1, 1 \leq t \leq 3), \\ \eta_1(K \cup K') \cap \mathbb{R}^3[t] & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1, -3 \leq t \leq 0). \end{cases}$$

(この $\{\theta_s\}_{s \in I}$ の構成を図によって示したのが次頁の図 6 である。) $\theta_1(K \cup K')$ が平凡な 2 次元絡み目であることは、実際に互いに交わらない 3 次元球体 $D_1^3 \cup D_2^3 \subset \mathbb{R}^4$ で $\partial D_1^3 \cup \partial D_2^3 = \theta_1(K \cup K')$ なるものが簡単に構成できることから、容易に確かめられる。□



§4 問題

D. Rolfsen は著者への手紙の中で次の問題を提出している:

4.1 問題 (Rolfsen [12]) 与えられた 2 成分の 2 次元結び目 $L: S_1^2 \cup S_2^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ について, $\mathbb{R}^4 - L(S_2^2)$ における $L|_{S_1^2}$ のホモトピー $\{\eta_t\}_{t \in I}$ で, $\eta_1 L: S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が平凡な 2 次元結び目となるものが存在するか?

この問題の解が肯定的ならば, 本論の主定理はその系として得られることは明らかであるが, 前節の証明を考へ合せるとかなりむずかしい問題と思われぬ。次はこの問題に対する特別の場合の解答であるが, リボン型の 2 次元結び目の特性から, 補題 2.1 のみを利用して, 定理 1.4 とほぼ同じ手順で証明される。

4.2 定理 $(K \cup K' \subset \mathbb{R}^4)$ を 2 成分の 2 次元結び目とする。もし $(K \subset \mathbb{R}^4)$ がリボン型の 2 次元結び目ならば, $\mathbb{R}^4 - K'$ の中に於ける K のホモトピー $\{\eta_t\}_{t \in I}$ が存在して, $\eta_1(K)$ は $\mathbb{R}^4$ の中の平凡な 2 次元結び目となる。□

リボン型 2 次元結び目については, Yanagawa [16] および [8, §4], [14] 等を参照されたい。さて定理 1.4 は 2 成分の 2

次元絡み目についての結果であったが、当然3成分以上の2次元絡み目についてはどうかという疑問が生ずる。

4.3 問題 $c \geq 3$ のとき、任意の c 成分の2次元絡み目 $L: \sum_{i=1}^c S_i^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は平凡な2次元絡み目と絡み目ホモトープとなるか？

実際、補題2.1 は c 成分に拡張しても同様に証明されるが、補題2.2 (従って補題2.3) は $c \geq 3$ 成分に増やすと証明はむずかしい (主として Brunian rings の状態がしばしば証明の途中で発生することによる)

参考文献

- [1] J.J.Andrews and M.L.Curtis : Knotted 2-spheres in the 4-sphere, Ann.of Math.(2), 70(1959), 565-571.
- [2] E.Artin : Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in $\mathbb{R}_4$, Abh.Math.Sem. Univ.Hamburg, 4(1925), 174-177.
- [3] K-T.Chen : Isotopy invariants of links, Ann.of MATH.(2), 56(1952), 343-353.
- [4] D.B.A.Epstein : Linking spheres, Proc.Camb.Phil.Soc., 56(1960), 215-219.
- [5] R.H.Fox and J.W.Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J.Math., 3(1966), 257-267.

- [6] D.L.Goldsmith : Concordance implies homotopy for classical links in M^3 ,
Comment.Math.Helv., 54(1979), 347-355.
- [7] F.Hosokawa and S.Suzuki : Linking 2-spheres in the 4-sphere, to appear.
- [8] A.Kawauchi, T.Shibuya and S.Suzuki : Descriptions of surfaces in four-
space I, Normal forms, Math.Sem.Notes Kobe Univ., 10(1982), 75-125.
- [9] ————, ———— and ———— : Descriptions of surfaces in four-
space II, Singularities and cross-sectional links, ibid. 11(1983),
31-69.
- [10] S.Kinoshita : On the Alexander polynomials of 2-spheres in a 4-sphere,
Ann.of Math.(2), 74(1961), 518-531.
- [11] J.W.Milnor : Link groups, Ann.of Math.(2), 59(1954), 177-195.
- [12] D.Rolfsen : Knots and Links, Math.Lecture Series 7, Publish or Perish
Inc., Berkeley, CA., 1976.
- [13] ———— : Letter to the author, Oct. 1982.
- [14] S.Suzuki : Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math.Sem.Notes
Kobe Univ., 4(1976), 241-371.
- [15] E.R.van Kampen : Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in R_4 , Abh.Math.
Sem.Univ.Hamburg, 6(1927), 216.
- [16] T.Yanagawa : On ribbon 2-knots, the 3-manifold bounded by the 2-knot,
Osaka J.Math., 6(1969), 447-464.
- [17] ———— : Brunian systems of 2-spheres in 4-space, Osaka J.Math.,
1(1964), 127-132.
- [18] E.C.Zeeman : Linking spheres, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 24(1960), 149-
153.