

7つの双対問題

長崎県立大学経済学部 植野 貴之 (Takayuki Ueno)

Faculty of Economics, University of Nagasaki

秋田県立大学システム科学技術学部 木村 寛 (Yutaka Kimura)

Faculty of System Science and Technology, Akita Prefectural University

九州大学名誉教授 岩本 誠一 (Seiichi Iwamoto)

Professor Emeritus, Kyushu University

概要

本論文では 3 平方和の最小化 (主) 問題

$$\begin{array}{ll} (P_3) & \text{minimize } x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \\ & \text{subject to (i) } x \in R^1 \end{array}$$

には全体として 7 つの最大化 (双対) 問題が対応することを示す。主問題から各双対問題を導き、等号条件を解いて、両問題の最適解を与えている。この部分問題として “1” 平方の最小化、および 2 平方和の最小化についても等号条件と最適解を述べている。

1 はじめに

主問題

$$\begin{array}{ll} (P_1) & \text{minimize } x^2 \\ & \text{subject to (i) } x \in R^1 \end{array}$$

の双対問題はどのようになるのだろうか。

1 つの双対問題としては

$$\begin{array}{ll} (D_1) & \text{Maximize } -\lambda^2 \\ & \text{subject to (i) } \lambda = 0 \\ & \text{(ii) } \lambda \in R^1 \end{array}$$

が考えられる。

(P_1) と (D_1) の間の等号条件 (Equality Condition, EC) は 2 元 2 連立 1 次方程式系

$$(EC_1) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

になる。この系は解 $(x; \lambda) = (0; 0)$ をもつ。

このとき、主問題 (P_1) は $\hat{x} = 0$ のとき、最小値 $m = 0$ をもつ。

また、双対問題 (D_1) は $\lambda^* = 0$ のとき、最大値 $M = 0$ をもつ。なお、等号条件の解は両問題の最適解 (最小点と最大点) を与えている。

2 2平方和

主問題

$$(P_2) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2 + (x+1)^2 \\ \text{subject to} & (i) \ x \in R^1 \end{array}$$

の双対問題としては以下の3つが考えられる。

$$(D_1) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -2\lambda^2 - 2\lambda \\ \text{subject to} & (i) \ \lambda \in R^1 \end{array} \quad (D_2) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -2\mu^2 + 2\mu \\ \text{subject to} & (i) \ \mu \in R^1 \end{array}$$

$$(D_3) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2 - \mu^2 + 2\mu \\ \text{subject to} & (i) \ \lambda + \mu = 0 \\ & (ii) \ (\lambda, \mu) \in R^2 \end{array}$$

(P₂) と (D₁) の間の等号条件は2元2連立1次方程式系

$$(EC_1) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x + 1 + \lambda = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ をもつ。(P₂) と (D₂) の間の等号条件は2元2連立系

$$(EC_2) \quad \begin{cases} x + \mu = 0 \\ x + 1 - \mu = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \mu) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ をもつ。(P₂) と (D₃) の間では3元3連立系

$$(EC_3) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x + 1 - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda, \mu) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ をもつ。

このとき、主問題 (P₂) は $\hat{x} = -\frac{1}{2}$ のとき、最小値 $m = \frac{1}{2}$ をもつ。

また、双対問題 (D₁) は $\lambda^* = -\frac{1}{2}$ のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}$ をもつ。(D₂) は $\mu^* = \frac{1}{2}$ のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}$ をもつ。(D₃) は $(\lambda^*, \mu^*) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}$ をもつ。

なお、主問題と双対問題の間の等号条件の解は3つとも両問題の最適解を与えていることがわかる。

3 3平方和

さて、3平方和の最小化を考えよう。主問題

$$(P_3) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \\ \text{subject to} & (i) \ x \in R^1 \end{array}$$

の双対問題の全体はどのようなになるだろうか。

まず、主問題 (P_3) は、 $\hat{x} = -1$ のとき、最小値 $m = 2$ をもつ。ここで、主問題 (P_3) は制約なしの最小化問題である。しかし $x = u$ とおくと、 (P_3) は条件付き最適化問題

$$(P_{3,1}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & u^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \\ \text{subject to} & (i) \ x = u \\ & (ii) \ (x, u) \in R^2 \end{array}$$

に同値になる。これは1線形制約下での2変数の2次凸最小化である。

さて、問題 $(P_{3,1})$ の双対問題を導入しよう。 $(P_{3,1})$ の任意の実行可能解を (x, u) とすると、任意の $\lambda (\in R^1)$ に対して

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (u-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2x^2 + 2\lambda x + 6x + 5$$

になる。 λ を制約式 (i) $x - u = 0$ に付随する双対変数 (dual variable) という。ここで

$$\begin{aligned} (u-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2x^2 + 2\lambda x + 6x + 5 &= (u-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 \\ &\geq -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

になる。したがって、不等式

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \geq -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2}$$

が成り立つ。等号は

$$(EC_1) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x + \frac{\lambda}{2} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

のときに限り成り立つ。 (EC_1) を (P_3) と (D_1) の間の等号条件 (Equality Condition, EC) という。これは2元2連立1次方程式系である。このようにして (P_3) の双対問題として

$$(D_1) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \\ \text{subject to} & (i) \ \lambda \in R^1 \end{array}$$

が等号条件 (EC_1) と共に導かれた。これが動的雙対化 (dynamic dualization) である [9]。この雙対化では新たに変数 u を導入して、条件付き最適化問題に帰着して雙対問題を導いている。

以下では、プラス・マイナス雙対化 (plus-minus dualization) といわれる方法で雙対問題を導こう。これはフェンシエル雙対化 (Fenchel dualization) [7, 8, 11] を改良している。この方法では新変数 u は導入しないで、(雙対変数に相当する) λ の1次式をプラスしてマイナスしている。さらに共役関数 (conjugate function) を用いている。この概念は最大変換 (maximum transform) と同等であり [1-6]、準線形化 (quasi-linearization) とも強い関係がある [9, 10]。

3.1 1項プラス・マイナス

平方和の素になっている3つの1次式は $x, x+1, x+2$ である。これに対応する双対変数を各々 λ, μ, ν とすると、3つの内積は $2\lambda x, 2\mu(x+1), 2\nu(x+2)$ である。ただし目的式の2次性を考慮して2倍している。このうち1つをプラス・マイナスする方法は ${}_3C_1 = 3$ 通りある。

3.1.1 x

まず、目的式

$$f(x) = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$$

から $2\lambda x$ を引いて加える。すると、2変数 (x, λ) に関する恒等式が成立し、 $f(x)$ を支持する λ の2次関数が得られる。これを目的関数にもつ最大化問題は

$$(D_1) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \\ \text{subject to} & (i) \lambda \in R^1 \end{array}$$

である。これが1平方 x^2 に対応する双対問題である。 (P_3) と (D_1) の間の等号条件は2元2連立1次方程式系

$$(EC_1) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x + \frac{\lambda+3}{2} = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda) = (-1; -1)$ をもつ。

そして、双対問題 (D_1) は $\lambda^* = -1$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

【導出 $(P_3) \implies (D_1)$ 】

さて、主問題 (P_3) の任意の実行可能解を $x \in R^1$ とする。このとき任意の $\lambda \in R^1$ に対して

$$\begin{aligned} & x^2 - 2\lambda x + (x+1)^2 + (x+2)^2 + 2\lambda x \\ &= (x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、恒等式

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x-\lambda)^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2}$$

を得る。したがって、不等式

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \geq -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2}$$

が成り立つ。等号は、

$$(\alpha) \ x - \lambda = 0, \quad (\beta) \ x + \frac{\lambda+3}{2} = 0$$

が成り立つときに限り成立する。等号条件は (EC_1) である。

この導出を遡ると、逆も導かれる。実際、最大化問題 (D_1) が与えられたとき、最小化問題 (P_3) を導く。これには不等式

$$-\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \leq x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \quad \lambda \in R^1, x \in R^1 \quad (1)$$

および等号条件 (α) , (β) を導けばよい。

さて、任意に $\lambda \in R^1$ をとると、任意の $x \in R^1$ に対して

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} &\leq (x-\lambda)^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{1}{2} \\ &= (x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 \end{aligned}$$

である。 (α) , (β) が成り立つとき、等号は成立する。前述の逆を辿ると、この右辺は

$$(x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\left(x + \frac{\lambda+3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+3)^2 + 5 = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$$

になる。よって不等式 (1) が成り立ち、等号条件も得られた。したがって、 (D_1) から (P_3) が導かれた。

3.1.2 $x+1$

次に、 $f(x)$ から $2\mu(x+1)$ を引いて加える。すると、1 平方 $(x+1)^2$ に対応する双対問題

$$\begin{aligned} (D_2) \quad &\text{Maximize} \quad -\frac{3}{2}\mu^2 + 2 \\ &\text{subject to} \quad (i) \quad \mu \in R^1 \end{aligned}$$

が導かれる。等号条件は 3 元 3 連立 1 次方程式系

$$(EC_2) \quad \begin{cases} x+1 = \mu \\ x + \frac{\mu+2}{2} = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \mu) = (-1; 0)$ をもつ。

そして、双対問題 (D_2) は $\mu^* = 0$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.1.3 $x+2$

今度は $2\nu(x+2)$ を引いて加えると、1 平方 $(x+2)^2$ に対応する双対問題

$$\begin{aligned} (D_3) \quad &\text{Maximize} \quad -\frac{3}{2}\nu^2 + 3\nu + \frac{1}{2} \\ &\text{subject to} \quad (i) \quad \nu \in R^1 \end{aligned}$$

が得られる。等号条件は3元3連立1次方程式系

$$(EC_3) \quad \begin{cases} x+2 = \nu \\ x + \frac{\nu+1}{2} = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \nu) = (-1; 1)$ をもつ。

双対問題 (D_3) は $\nu^* = 1$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.2 2項プラス・マイナス

3つの内積 $2\lambda x$, $2\mu(x+1)$, $2\nu(x+2)$ のうち2つをプラス・マイナスする方法も ${}_3C_2 = 3$ 通りある。

3.2.1 $x, x+1$

まず、目的式 $f(x)$ から $2\lambda x + 2\mu(x+1)$ を引いて加える。すると、今度は2平方和 $x^2 + (x+1)^2$ に対応する双対問題

$$(D_4) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2 - \mu^2 - (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda - 2\mu \\ \text{subject to} & \text{(i) } (\lambda, \mu) \in R^2 \end{array}$$

を得る。主問題 (P_3) とこの問題 (D_4) の間の等号条件は3元3連立1次方程式系

$$(EC_4) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x+1 = \mu \\ x+2 + (\lambda + \mu) = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda, \mu) = (-1; -1, 0)$ をもつ。

そして、双対問題 (D_4) は $(\lambda^*, \mu^*) = (-1, 0)$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.2.2 $x, x+2$

次に、 $2\lambda x + 2\nu(x+2)$ を引いて加えると、2平方和 $x^2 + (x+2)^2$ に対応する双対問題

$$(D_5) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2 - \nu^2 - (\lambda + \nu)^2 - 2\lambda + 2\nu \\ \text{subject to} & \text{(i) } (\lambda, \nu) \in R^2 \end{array}$$

が得られる。 (P_3) の間の等号条件は3元3連立系

$$(EC_5) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x+2 = \nu \\ x+1 + \lambda + \nu = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda, \nu) = (-1; -1, 1)$ をもつ。

双対問題 (D_5) は $(\lambda^*, \nu^*) = (-1, 1)$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.2.3 $x+1, x+2$

さらに、 $2\mu(x+1) + 2\nu(x+2)$ を引いて加えると、 $(x+1)^2 + (x+2)^2$ に対応する双対問題

$$(D_6) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\mu^2 - \nu^2 - (\mu + \nu)^2 + 2\mu + 4\nu \\ \text{subject to} & (i) \ (\mu, \nu) \in R^2 \end{array}$$

が導かれる。(P₃) との等号条件は 3 元 3 連立

$$(EC_6) \quad \begin{cases} x+1 = \mu \\ x+2 = \nu \\ x+\mu+\nu = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \mu, \nu) = (-1, 0, 1)$ をもつ。

双対問題 (D₆) は $(\mu^*, \nu^*) = (0, 1)$ のとき、最大値 $M = 2$ をもつ。

3.3 3項プラス・マイナス

3つの内積 $2\lambda x, 2\mu(x+1), 2\nu(x+2)$ のうち3つともプラス・マイナスする方法は ${}_3C_3 = 1$ 通りである。ここでは、 $2\lambda x + 2\mu(x+1) + 2\nu(x+2)$ を引いて加えると、全3平方和 $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$ に対応する双対問題

$$(D_7) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu + 4\nu \\ \text{subject to} & (i) \ \lambda + \mu + \nu = 0 \\ & (ii) \ (\lambda, \mu, \nu) \in R^3 \end{array}$$

が得られる。主問題 (P₃) との等号条件は 4 元 4 連立 1 次方程式系

$$(EC_7) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ x+1 = \mu \\ x+2 = \nu \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases}$$

になる。この系は唯一の解 $(x; \lambda, \mu, \nu) = (-1; -1, 0, 1)$ をもつ。

双対問題 (D₇) は $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = (-1, 0, 1)$ のとき、最大値 $M = 2$ もつ。

【導出 (P₃) $\implies$ (D₇)】

さて、主問題 (P₃) の任意の実行可能解を $x \in R^1$ としよう。このとき 任意の $(\lambda, \mu, \nu) \in R^3$ に対して

$$\begin{aligned} & x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \\ &= x^2 - 2\lambda x + (x+1)^2 - 2\mu(x+1) + (x+2)^2 - 2\nu(x+2) + 2\lambda x + 2\mu(x+1) + 2\nu(x+2) \\ &= (x-\lambda)^2 - \lambda^2 + (x+1-\mu)^2 - \mu^2 + (x+2-\nu)^2 - \nu^2 + 2(\lambda+\mu+\nu)x + 2\mu + 4\nu \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、制約条件 (i) $\lambda + \mu + \nu = 0$ の下では、

$$\begin{aligned} & (x - \lambda)^2 - \lambda^2 + (x + 1 - \mu)^2 - \mu^2 + (x + 2 - \nu)^2 - \nu^2 + 2(\lambda + \mu + \nu)x + 2\mu + 4\nu \\ &= (x - \lambda)^2 - \lambda^2 + (x + 1 - \mu)^2 - \mu^2 + (x + 2 - \nu)^2 - \nu^2 + 2\mu + 4\nu \\ &\geq -\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu + 4\nu \end{aligned}$$

である。したがって、不等式

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \geq -\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu + 4\nu$$

が成り立つ。等号は、制約条件 (i) に加えて

$$(\alpha) \ x - \lambda = 0, \quad (\beta) \ x + 1 - \mu = 0, \quad (\gamma) \ x + 2 - \nu = 0$$

も成り立つときに限り成立する。したがって、等号条件は連立系 $(\alpha), (\beta), (\gamma); (i)$ である。これは (EC_7) に他ならない。

この導出を遡ると、逆も導かれる。

4 おわりに

ここで、突然ではあるが、最小二乗法について考えてみよう。いま、 n 個のデータ $a_1, a_2, \dots, a_n$ が与えられたとする。ただし $n \geq 2$ で、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ はすべて等しいとは限らないとする。最小二乗法では偏差の二乗和を最小にする直線 $x = \alpha$ を当てはめている。すなわち、最適な係数 α をデータで表わしている。 α を x に置き換えると、この問題は最小化問題

$$(P) \quad \text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (a_k - x)^2 \quad \text{subject to} \quad (i) \ x \in R^1$$

になる。この双対問題として最大化問題

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad - \sum_{k=1}^n (\lambda_k^2 + 2a_k \lambda_k) \\ (D) \quad & \text{subject to} \quad (i) \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0 \\ & \quad \quad \quad (ii) \quad \lambda \in R^n \end{aligned}$$

が考えられる。

特に 3 個のデータ $0, -1, -2$ に対する主問題 (P) が

$$\begin{aligned} (P_3) \quad & \text{minimize} \quad x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \\ & \text{subject to} \quad (i) \ x \in R^1 \end{aligned}$$

である。この双対問題 (D) が

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad -\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu + 4\nu \\ (D_7) \quad & \text{subject to} \quad (i) \ \lambda + \mu + \nu = 0 \\ & \quad \quad \quad (ii) \ (\lambda, \mu, \nu) \in R^3 \end{aligned}$$

である。ここでは (P_3) の双対問題として、 (D_7) 以外に $(D_1), (D_2), \dots, (D_6)$ が存在することを示した。3 平方和の最小化問題の双対問題は 7 つ存在する：

$${}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 3 + 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1.$$

一般に、 n 平方和の最小化問題 (P) では双対問題は $(2^n - 1)$ 個考えられる：

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1.$$

なお、冒頭の 1 平方の最小化問題 (P_1) からは双対問題 (D_1) が導かれ、2 平方和の最小化問題 (P_2) からは 3 つの双対問題 $(D_1), (D_2), (D_3)$ が導かれる。

参考文献

- [1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).
- [2] R.E. Bellman and Wm. Karush, On a new functional transform in analysis : the maximum transform, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67(1961), 501-503.
- [3] R.E. Bellman and Wm. Karush, Mathematical programming and the maximum transform, *J. SIAM Appl. Math.* 10(1962), 550-567.
- [4] R.E. Bellman and Wm. Karush, On the maximum transform and semigroups of transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 68(1962), 516-518.
- [5] R.E. Bellman and Wm. Karush, Functional equations in the theory of dynamic programming -XII: an application of the maximum transform, *J. Math. Anal. Appl.* 6(1963), 155-157.
- [6] R.E. Bellman and Wm. Karush, On the maximum transform, *J. Math. Anal. Appl.* 6(1963), 57-74.
- [7] J.M. Borwein and A.S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization Theory and Examples*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [8] W. Fenchel, *Convex Cones, Sets and Functions*, Princeton Univ. Dept. of Math, NJ, 1953.
- [9] 岩本 誠一、最適化の数理 II ベルマン方程式 (Mathematics for Optimization II Bellman Equation)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」、知泉書館、2013 年 11 月, pp.451.
- [10] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.
- [11] R.T. Rockafeller, *Conjugate Duality and Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1974.