

## 積分可能な同次式ポテンシャル系と Schwarz の 3 角形

吉田 春夫 (Haruo Yoshida)

181-8588 東京都三鷹市大沢 2-21-1 国立天文台

yoshida@gauss.mtk.nao.ac.jp

### abstract

同次式ポテンシャルを持つ Hamilton 系の直線解の周りの変分方程式は独立変数の変換によって Gauss の超幾何方程式に変換される. そしてもとの Hamilton 系が可積分ならこの超幾何方程式は微分 Galois 理論の意味で可解となる. 特に微分 Galois 群が有限群となる場合は Schwarz の 3 角形を用いて完全に分類される. そこで超幾何方程式の既知の可解性の必要十分条件を適用することによって, 可積分性の強力な必要条件が得られる. Schwarz の 3 角形と関連する可積分系としては, 現在までに 2 面体群 (任意の位数), および 4 面体群に属するものが知られている.

## 1 はじめに

具体的に与えられた Hamilton 系に対し, 解が解析的に求められるか否か, つまり系が積分可能か否かを決定することは力学の基本的な問題であるが, その完全な判定条件は今日まで知られていない. 自由度 1 の Hamilton 系は常に積分可能なので, 非自明で最も簡単な状況は自由度 2 の Hamilton 系で起きる. Hamilton 系を特にポテンシャル系

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2) \quad (1)$$

に限定しても, 現在の我々の知識は期待される判定条件には程遠いのが現状である. 今ポテンシャル  $V(q_1, q_2)$  を同次式に限定する. 同次式ポテンシャル系を対象とする積極的な動機としては

- スケール変換によって全てのエネルギー値  $H = E$  が等価となる, つまり 1 つのエネルギー値における情報が (同符号の) 全てのエネルギー値での情報を与える,
- 非同次のポテンシャル系が積分可能なら最高次および最低次のみを残した同次式ポテンシャル系も積分可能となる,

ことが挙げられる．例えば積分不可能系の代表格である Hénon-Heiles のポテンシャル

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3 \quad (2)$$

はポテンシャルの 3 次の項の符号を 1 つ変えて

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 + \frac{1}{3}q_2^3 \quad (3)$$

とすれば積分可能となり

$$\Phi = p_1 p_2 + q_1 q_2 + \frac{1}{3}q_1^3 + q_1 q_2^2 \quad (4)$$

を独立な第 1 積分として持つ．両者の違いは 3 次の部分の違いが決定的な役割を果たしている．Hénon-Heiles 系の積分不可能性は 3 次の同次式部分のポテンシャル系の積分不可能性に由来しているのである．この意味で同次式ポテンシャル系は一般のポテンシャル系の可積分性を研究する際の確実な第 1 ステップと考えられる．

## 2 変分方程式として得られる Gauss の超幾何方程式

$V(q_1, q_2)$  を  $k$  次の同次式とする Hamilton 系 (1) は常に直線解

$$\mathbf{q} = \mathbf{c}\phi(t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{c}\dot{\phi}(t) \quad (5)$$

を持つ．ここで  $\phi(t)$  は

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \phi^{k-1} = 0 \quad (6)$$

を満たす関数であり， $\mathbf{c}$  は代数方程式

$$\nabla V(\mathbf{c}) = \mathbf{c} \quad (7)$$

の 1 つの解である．今，(7) の解  $\mathbf{c}$  を 1 つ固定する．運動方程式を直線解 (5) の周りで線形化して得られる変分方程式は

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \phi(t)^{k-2}\partial^2 V(\mathbf{c})\xi = 0 \quad (8)$$

となる．ここで  $\partial^2 V(\mathbf{c})$  は  $V(\mathbf{q})$  のヘッシアン行列を点  $\mathbf{q} = \mathbf{c}$  で評価したものである．適当な座標回転  $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\xi'_1, \xi'_2)$  によってヘッシアン行列  $\partial^2 V(\mathbf{c})$  は対角化される．さらに  $(k-1)$  は  $\partial^2 V(\mathbf{c})$  の， $\mathbf{c}$  を固有ベクトルとする固有値であることがわかるので，他の固有値を  $\lambda$  として，対角化後の変分方程式は

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} + \phi(t)^{k-2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} \xi' = 0 \quad (9)$$

となる．この第 1 の成分

$$\frac{d^2\xi'_1}{dt^2} + \lambda\phi(t)^{k-2}\xi'_1 = 0 \quad (10)$$

は直線解 (5) に「直交」する変分を記述するので、直交変分方程式 (Normal Variational Equation, NVE) と呼ばれる。今、適当な座標回転によって最初から直線解が  $q_1 = p_1 = 0$  で与えられているとする。この時、NVE は

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \eta_1, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = -\lambda q_2^{k-2} \xi_1 \quad (11)$$

と書ける。ここで  $q_2 = q_2(t)$  は

$$\frac{dq_2}{dt} = p_2, \quad \frac{dp_2}{dt} = -q_2^{k-1} \quad (12)$$

の解で、この直線解の「エネルギー」を

$$\frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{k}q_2^k = \text{const.} = \frac{1}{k} \quad (13)$$

に固定しておく。独立変数の変換  $t \rightarrow z$  を

$$z = [q_2(t)]^k \quad (14)$$

によって行えば、NVE (11) は

$$z(1-z)\frac{d^2\xi_1}{dz^2} + \left(\frac{k-1}{k} - \frac{3k-2}{2k}z\right)\frac{d\xi_1}{dz} + \frac{\lambda}{2k}\xi_1 = 0 \quad (15)$$

に変換される [10], [13]。これは Gauss の超幾何方程式

$$z(1-z)\frac{d^2\xi}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d\xi}{dz} - ab\xi = 0 \quad (16)$$

でパラメータを

$$a+b = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \quad ab = -\frac{\lambda}{2k}, \quad c = 1 - \frac{1}{k} \quad (17)$$

としたものである。この時次の定理が主張できる。

#### 定理 1

Hamilton 系 (1) が積分可能とする。このとき Gauss の超幾何方程式 (15) は初等的に解ける、つまりその解が有理関数から出発して代数方程式を解く演算、不定積分演算、指数関数演算、という 3 つの初等的な演算の合成のみで得られる。

定理 1 は Morales-Ruiz and Ramis [7] で微分 Galois 理論の言葉を用いたより一般的な結果として主張されているものだが、筆者の理解をはるかに越えているため上に述べた方針による自家製の初等的な証明を [11] において与えた。以下はその証明の概略である。

### 3 定理 1 の証明の概略

いま元の Hamilton 系 (1) が積分可能であると仮定し, 少なくとも考える直線解  $q_1 = p_1 = 0$  の近傍で解析的な第 1 積分

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{const.} \quad (18)$$

を有するとする. このとき常に変分方程式の第 1 積分

$$I = D^m \Phi := \left( \xi \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \eta \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)^m \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{const.} \quad (19)$$

が存在する. この量は  $\Phi(\mathbf{q} + \xi, \mathbf{p} + \eta)$  を  $q_1 = p_1 = 0$  の周りでテイラー展開した時に 0 とならない  $\xi, \eta$  についての最低次の項に他ならない. さらに  $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  がハミルトニアン  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  と独立であるという仮定から, この第 1 積分は直交変分方程式の第 1 積分と仮定できる. つまり (19) は

$$I = I(q_2, p_2, \xi_1, \eta_1) = \text{const.} \quad (20)$$

の形に書ける. 積分 (20) は変数変換 (14) の後では, Gauss の超幾何方程式 (15) の第 1 積分と解釈でき, それはまた  $\xi = \xi_1(z)$  についての 1 階の非線形常微分方程式でもある. 驚くことにこの非線形常微分方程式は簡単に解け, Gauss の超幾何方程式 (15) の解

$$\xi = \exp \left[ \int \zeta(z) dz \right] \quad (21)$$

を与えてしまう. ここで  $\zeta(z)$  は  $I(q_2, p_2, \xi_1, \eta_1)$  によって決まる多項式  $f_j(z)$  を係数とする代数方程式

$$f_0(z)\zeta^n + f_1(z)\zeta^{n-1} + \dots + f_{n-1}(z)\zeta + f_n(z) = 0 \quad (22)$$

の解, つまり  $z$  の代数関数である. つまり Gauss の超幾何方程式 (15) の解が代数方程式を解く演算, 不定積分演算, 指数関数演算, という 3 つの初等的な演算の合成のみで得られることになる.

以上の証明においてはポテンシャルの同次性および Hamilton 系の時間反転対称性に由来する, 多項式 (20) の 3 つの特徴,

- $I$  は変数  $(\xi_1, \eta_1)$  について同次であること,
- $I$  は相似変換に付随するウェイトについて同次であること,
- $I$  は変数  $(p_2, \eta_1)$  について偶関数または奇関数であること,

をフルに利用している.

## 4 定理 1 の例

定理 1 の主張を実感するための例を 1 つあげる.  $k$  次の同次多項式,

$$V_k = \frac{1}{kr} \left[ \left( \frac{r+q_2}{2} \right)^{k+1} + (-1)^k \left( \frac{r-q_2}{2} \right)^{k+1} \right], \quad r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \quad (23)$$

をポテンシャルとする Hamilton 系 (1) は放物線座標で変数分離可能で積分可能である. そして独立な第 1 積分  $\Phi_k$  は

$$\Phi_k = p_1(q_1 p_2 - q_2 p_1) + \frac{k-1}{2k} q_1^2 V_{k-1} \quad (24)$$

で与えられる [9]. ポテンシャル  $V_k$  の具体的な形は

$$V_3 = \frac{1}{24} (4q_1^2 q_2 + 8q_2^3) \quad (25)$$

$$V_4 = \frac{1}{64} (q_1^4 + 12q_1^2 q_2^2 + 16q_2^4) \quad (26)$$

$$V_5 = \frac{1}{160} (6q_1^4 q_2 + 32q_1^2 q_2^3 + 32q_2^5) \quad (27)$$

である. 直線解  $q_1 = p_1 = 0$  の周りの直交変分方程式は, (11) で  $\lambda = (k-1)/2k$  とおいたものである.  $\Phi_k = \text{const.}$  から導かれる NVE の第 1 積分は

$$I = D^2 \Phi_k = \frac{1}{k} q_2^{k-1} \xi_1^2 + 2p_2 \xi_1 \eta_1 - 2q_2 \eta_1^2 = \text{const.} \quad (28)$$

であり, 変数変換 (14) によって Gauss の超幾何方程式の積分

$$D^2 \Phi_k = z^{\frac{k-1}{k}} \left[ \frac{1}{k} \xi^2 + 4(1-z) \xi \frac{d\xi}{dz} - 4kz(1-z) \left( \frac{d\xi}{dz} \right)^2 \right] = \text{const.} \quad (29)$$

と解釈される.  $\zeta = d(\log \xi)/dz$  の満たす代数方程式は

$$4kz(1-z)\zeta^2 - 4(1-z)\zeta - \frac{1}{k} = 0 \quad (30)$$

であり, この 2 次方程式の解

$$\zeta(z) = \frac{1}{2kz} \left[ 1 \pm (1-z)^{-1/2} \right] \quad (31)$$

から (21) で得られる

$$\xi(z) = \exp \left[ \int \zeta(z) dz \right] = \left[ 1 \mp \sqrt{1-z} \right]^{\frac{1}{k}} \quad (32)$$

が実際に Gauss の超幾何方程式 (15) の解を与えていることが確認できる.

## 5 超幾何方程式の代数関数解に関する Schwarz の理論

H. Schwarz は Gauss の超幾何方程式の 2 つの 1 次独立な解が代数関数となる条件を求めた. その結果として得られたのが有名な Schwarz の表である. 以下に Schwarz の考察を具体例を固定して再現することを試みる. 詳細は [8], [5], [14]などを参照せよ.

放物線座標で変数分離可能な同次式ポテンシャル系 (23) の直線解  $q_1 = p_1 = 0$  の周りの変分方程式から独立変数の変換によって得られる Gauss の超幾何方程式は

$$z(1-z)\frac{d^2\xi}{dz^2} + \left(\frac{k-1}{k} - \frac{3k-2}{2k}z\right)\frac{d\xi}{dz} + \frac{\lambda}{2k}\xi = 0, \quad \lambda = \frac{k-1}{2k} \quad (33)$$

である. この方程式の 2 つの 1 次独立な解は, (32) に見るように

$$\xi^{(1)}(z) = [1 - \sqrt{1-z}]^{\frac{1}{k}}, \quad \xi^{(2)}(z) = [1 + \sqrt{1-z}]^{\frac{1}{k}} \quad (34)$$

である. この Gauss の超幾何方程式においては確定特異点  $z = 0, 1, \infty$  における exponent の差  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$  は

$$\hat{\lambda} = 1 - c = \frac{1}{k}, \quad \hat{\mu} = c - a - b = \frac{1}{2}, \quad \hat{\nu} = b - a = \frac{1}{2} \quad (35)$$

であることに注意しておく. Schwarz にならって 2 つの 1 次独立な解の比

$$S(z) := \frac{\xi^{(1)}(z)}{\xi^{(2)}(z)} = \left(\frac{1 - \sqrt{1-z}}{1 + \sqrt{1-z}}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (36)$$

を考え, 関数  $w = S(z)$  による複素上半平面 ( $\text{Im } z > 0$ ) の像を考える. ただし多価関数の分岐としては区間  $[0, 1]$  上の実数で実数となるものを採用する. 簡単な考察から

- $z$  が区間  $[0, 1]$  上の実数  $\Rightarrow w$  は区間  $[0, 1]$  上の実数
- $z$  が区間  $(-\infty, 0]$  上の実数  $\Rightarrow w$  は区間  $w = e^{i\pi/k}$  と  $w = 0$  を結ぶ線分上
- $z$  が区間  $[1, +\infty)$  上の実数  $\Rightarrow w$  は単位円上  $w = 1$  と  $w = e^{i\pi/k}$  を結ぶ円弧

に写像されることがわかる. これから  $w = S(z)$  による複素上半平面 ( $\text{Im } z > 0$ ) の像は,  $w$  平面上の  $\pi/k$  を中心角とする半径 1 の扇形となることがわかる.  $k = 4$  の場合の像を図 1 に示した. さて上半平面の像が求まると下半平面 ( $\text{Im } z < 0$ ) の像も, Schwarz の鏡像原理により折り返しとして容易に求められる. ただし関数  $w = S(z)$  が多価関数であるため, どのような経路によって  $w = S(z)$  を解析接続するかに依存する. 実際  $z$  の実軸を  $z \in (0, 1)$ ,  $z \in (-\infty, 0)$ ,  $z \in (1, +\infty)$  において横切るか (図 2 参照) に従って 3 通りの下半平面の像が得られる. これを図 3 に示した.

このようにして解析接続を繰り返すことによって上半平面, 下半平面の像が次々と得られ,  $w$  平面には図 4 に見るような白黒のパターンができる. ここで白は上半平面の像, 黒は下半平面の像を表す. そして図 4 で白黒のパターンがすき間無く  $w$  平面を覆うこと

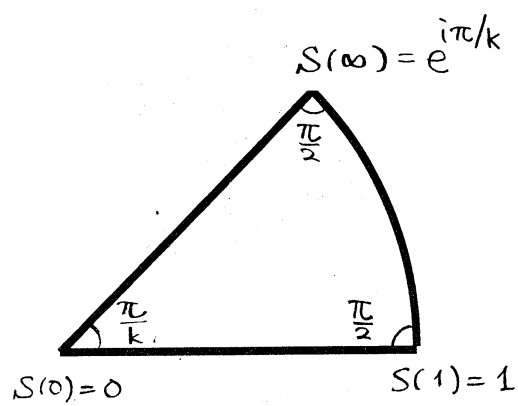


図 1: 上半平面の像

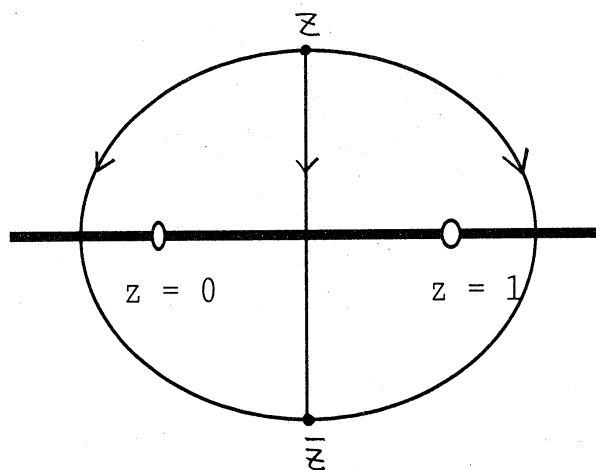


図 2: 3通りの解析接続の経路

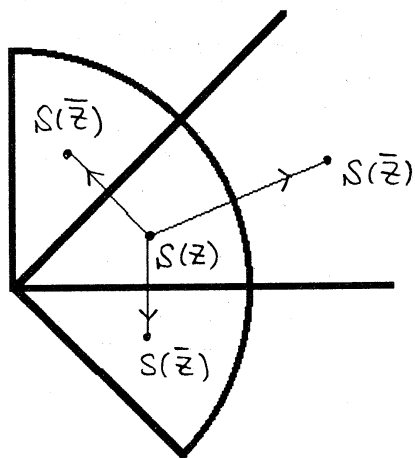


図 3: 3通りの下半平面の像

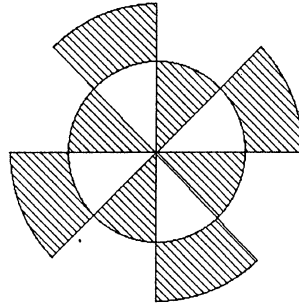


図 4:  $w$ 平面上の白黒パターン（上半平面と下半平面の像）

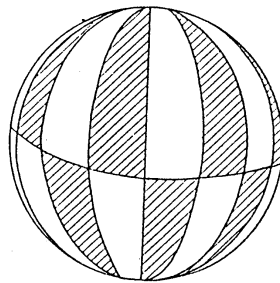


図 5: Riemann 球面上に投影した白黒パターン

が，代数関数  $w = S(z)$  の有限多価性を反映している．

$w$ 平面上の白黒パターンは極投影によって Riemann 球面上の白黒パターンに対応させればより見やすくなる．極投影は等角写像であることに注意しておく．図 4 の  $w$ 平面の極投影によって得られた Riemann 球面は，内角を  $(\pi/k, \pi/2, \pi/2)$  とする  $2k$ 個の白と  $2k$ 個の黒の球面 3 角形がすき間無く覆っている（図 5）．この球面 3 角形の内角は exponent の差 (35) を使えば  $(\hat{\lambda}\pi, \hat{\mu}\pi, \hat{\nu}\pi)$  となっていることに注意しよう．また今までは，たまたま 2 つの 1 次独立な解として (34) の組を採用したが，より一般の 2 つの 1 次独立な解の比を考えても，高々 1 次分数変換

$$W = \frac{a\xi^{(1)}(z) + b\xi^{(2)}(z)}{c\xi^{(1)}(z) + d\xi^{(2)}(z)} = \frac{aw + b}{cw + d} \quad (37)$$

程の自由度しかない．ここで  $a, b, c, d$  は複素定数である．この 1 次分数変換は Riemann 球面の回転を引き起こすのみで，この回転によって白黒のパターンは完全に保存される．

以上の準備のもとで一般の Gauss の超幾何方程式の場合に，解が代数関数となる条件を考えよう．一般の場合の確定特異点  $z = 0, 1, \infty$  における exponent の差は

$$\hat{\lambda} = 1 - c, \quad \hat{\mu} = c - a - b, \quad \hat{\nu} = a - b \quad (38)$$

である． $l, m, n$  をその和が偶数の整数として，exponent の差  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$  を持つ Gauss の超幾何方程式と  $(\hat{\lambda} + l, \hat{\mu} + m, \hat{\nu} + n)$  を持つ方程式は同じモノドロミー群を持ち，同等と考

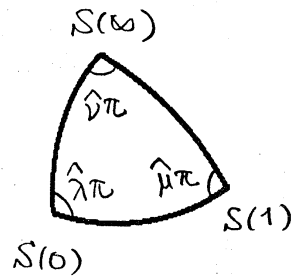


図 6: 上半平面の像としての Schwarz の 3 角形

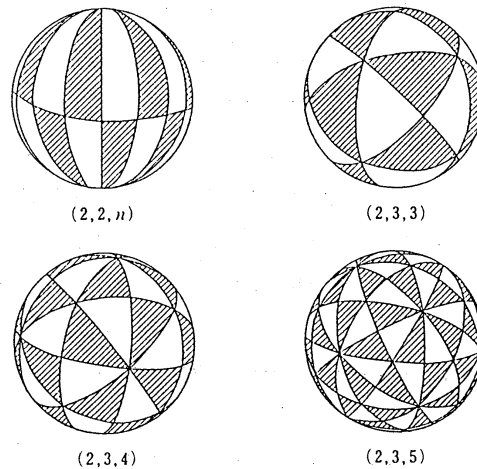


図 7: Riemann 球面の白黒パターン

えられるので  $0 < \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu} < 1$  の場合に限定する. さて  $\xi^{(1)}(z)$  と  $\xi^{(2)}(z)$  を 2 つの 1 次独立な解とし, その比

$$S(z) := \frac{\xi^{(1)}(z)}{\xi^{(2)}(z)} \quad (39)$$

を考える. 上の例から想像され, かつ比較的簡単にチェックできる事実は

- $z$  の上半平面は関数  $w = S(z)$  と極投影によって Riemann 球面上の  $(\hat{\lambda}\pi, \hat{\mu}\pi, \hat{\nu}\pi)$  を内角とする球面 3 角形 (Schwarz の 3 角形) に写像される

ことである (図 6). そして解析接続による下半平面の像をも考えることによって Riemann 球面上の白黒パターンが形成されるが, 全く一般の球面 3 角形ではすき間無く Riemann 球面を覆うことができず, 代数関数を特徴づける有限多価性に矛盾することになる. Riemann 球面を 1 重にすき間無く覆うことができるのは  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$  の値が, その順序を無視して

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{k}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) \quad (40)$$

の場合のみであることがわかる. 各々の場合の Riemann 球面の白黒パターンを図 7 に示した. これらは図 8 に示すように正 2 面体, 正 4 面体, 正 8 面体, 正 20 面体の各面の中心と面の頂点を結び各面を 3 角形分割 (重心細分) し, 交互に白黒の色分けをし, 最後

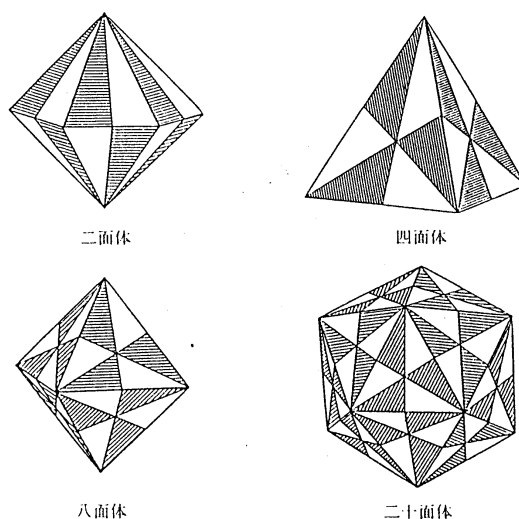


図 8: 正多面体の重心細分

に中心を共有する球面上に投影することによっても得られることがわかる．例えば [12] を参照せよ．これらの場合， $w = S(z)$  の逆関数  $z = F(w)$  は 1 価の代数関数，すなわち有理関数となる．また Riemann 球面を「1 重にすき間無く覆う」という条件を緩和して，2 重，3 重，etc. まで含めても代数関数の有限多価性には矛盾しない．このときの Schwarz の 3 角形は図 7 の 3 角形の整数倍のものになる．例えば正 20 面体のときは 10 通りの異なる可能性がある．以上の考察によって 15 の場合を尽くした次の Schwarz の表が得られる．

|    |               |               |               |       |
|----|---------------|---------------|---------------|-------|
| 1  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{k}$ | 2 面体  |
| 2  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 4 面体  |
| 3  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |       |
| 4  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | 8 面体  |
| 5  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |       |
| 6  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | 20 面体 |
| 7  | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |       |
| 8  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |       |
| 9  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |       |
| 10 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |       |
| 11 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |       |
| 12 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |       |
| 13 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |       |
| 14 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ |       |
| 15 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ |       |

Schwarz の表

## 6 微分 Galois 理論 (Picard-Vessiot 理論)

微分 Galois 理論は代数方程式に対する Galois 理論の微分方程式版である。5 次方程式以上の一般の代数方程式にはべき根のみで表される解の公式が存在しないことを示した Abel の定理は後に Galois によって一般 5 次方程式の Galois 群  $G$  (5 次の対称群) が可解群でないということの論理的帰結として示されるに至った。可解群という名自身、この偉大な歴史的事実に基づいて付けられたようである。

Fuchs 型の線形微分方程式においても類似の理論が存在する。それは Picard-Vessiot 理論の名で呼ばれる。今、 $p(z), q(z)$  を有理関数とする 2 階の線形常微分方程式

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + p(z)\frac{d\xi}{dz} + q(z)\xi = 0 \quad (41)$$

を考える。そしてその 2 つの 1 次独立な解が、有理関数からスタートして

- 四則演算 + 微分演算
- 不定積分演算 + 指数関数演算
- 代数方程式を解く

という操作のみで求められるか否かを問題とする。これは「初等的に解ける」という状況の精密化である。Picard-Vessiot 理論によれば、これは微分方程式 (41) に対する微分 Galois 群  $G$  の単位元成分  $G_0$  が可解群となることと同値であり、さらに  $G$  が  $SL(2, \mathbb{C})$  の部分群となる場合、

- $G$  は同時 3 角化可能, or
- $G$  は有限群, or
- $G_0$  が対角化可能で  $[G : G_0] = 2$

と同値であることが知られている。Picard-Vessiot 理論については [1], [2], [3]などを参照せよ。特に Gauss の超幾何方程式 (16) においては木村俊房 [4] によって以上の条件が確定特異点  $z = 0, 1, \infty$  における exponent の差によって具体的に書き下されている。

### 定理 2 (Kimura)

Gauss の超幾何方程式 (16) の解が有理関数からスタートして、代数方程式を解く演算、不定積分演算、指数関数演算のみで得られるための必要かつ十分な条件は  $\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$  を確定特異点  $z = 0, 1, \infty$  における exponent の差 (38) として

- $\hat{\lambda} \pm \hat{\mu} \pm \hat{\nu}$  の少なくとも 1 つが奇整数である、または
- $\pm\hat{\lambda}, \pm\hat{\mu}, \pm\hat{\nu}$  が勝手な順序で Schwarz-福原-大橋の表の値をとる、

ことである。

Schwarz-福原-大橋の表は次に与えられる. ( $l, m, n$  は任意の整数)

|    |                   |                   |                   |                         |
|----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| 1  | $\frac{1}{2} + l$ | $\frac{1}{2} + m$ | 任意                |                         |
| 2  | $\frac{1}{2} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{3} + n$ |                         |
| 3  | $\frac{2}{3} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{3} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 4  | $\frac{1}{2} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{4} + n$ |                         |
| 5  | $\frac{2}{3} + l$ | $\frac{1}{4} + m$ | $\frac{1}{4} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 6  | $\frac{1}{2} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{5} + n$ |                         |
| 7  | $\frac{2}{5} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{3} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 8  | $\frac{2}{3} + l$ | $\frac{1}{5} + m$ | $\frac{1}{5} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 9  | $\frac{1}{2} + l$ | $\frac{2}{5} + m$ | $\frac{1}{5} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 10 | $\frac{3}{5} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{5} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 11 | $\frac{2}{5} + l$ | $\frac{2}{5} + m$ | $\frac{2}{5} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 12 | $\frac{2}{3} + l$ | $\frac{1}{3} + m$ | $\frac{1}{5} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 13 | $\frac{4}{5} + l$ | $\frac{1}{5} + m$ | $\frac{1}{5} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 14 | $\frac{1}{2} + l$ | $\frac{2}{5} + m$ | $\frac{1}{3} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |
| 15 | $\frac{3}{5} + l$ | $\frac{2}{5} + m$ | $\frac{1}{3} + n$ | $l + m + n = \text{偶数}$ |

Schwarz-福原-大橋の表

定理 2 の第 1 の条件, つまり  $\hat{\lambda} \pm \hat{\mu} \pm \hat{\nu}$  の少なくとも 1 つが奇整数であるという条件は Gauss の超幾何方程式が可約である場合に対応している. ここで一般に (41) が,  $r(z)$  を有理関数とする 1 階の線形微分方程式

$$\frac{d\xi}{dz} + r(z)\xi = 0 \quad (42)$$

を満たす解を持つとき, (41) は可約であるという. (42) および (42) を微分して得られる  $d^2\xi/dz^2 = (r^2 - dr/dz)\xi$  を (41) に代入すれば  $r(z)$  についての非線形微分方程式

$$\frac{dr}{dz} - r^2 + p(z)r - q(z) = 0 \quad (43)$$

が得られる. そして特に (41) が Gauss の超幾何方程式の時, 実際に有理関数  $r(z)$  が (43) を満たすことを要請することによって, 定理 2 の第 1 の条件が導出される. [5] を参照せよ. 一方, 第 2 の条件は 1 番目のケースを除けば, Gauss の超幾何方程式の解が代数関数となる条件を求めた Schwarz の結果そのものである. これらは微分 Galois 群  $G$  の言葉を用いた条件との間に,

- $G$  は同時 3 角化可能  $\Leftrightarrow$  Gauss の超幾何方程式が可約
- $G$  は有限群  $\Leftrightarrow$  Gauss の超幾何方程式の解が代数関数
- $G_0$  が対角化可能で  $[G : G_0] = 2 \Leftrightarrow$  Schwarz-福原-大橋の表の第 1 行

という対応がある. Schwarz-福原-大橋の表については [14] に良い解説がある.

## 7 同次式ポテンシャル系の可積分性の新しい必要条件

同次式ポテンシャル系において直線解の周りの直交変分方程式として得られた Gauss の超幾何方程式 (15) における exponent の差 (38) は

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{k}, \quad \hat{\mu} = \frac{1}{2}, \quad \hat{\nu} = \frac{\sqrt{(k-2)^2 + 8k\lambda}}{2k} \quad (44)$$

である。これから定理 2 の第 1 の条件、つまり  $\hat{\lambda} \pm \hat{\mu} \pm \hat{\nu}$  の少なくとも 1 つが奇整数である、という条件は

$$\lambda = j + j(j-1)k/2 = \{0, 1, k-1, k+2, 3k-2, \dots\} \quad (45)$$

という条件に翻訳される。また Schwarz-福原-大橋の表の第 1 行から、 $k = \pm 2$  ならば任意の  $\lambda$  が許されることがわかる。さらに任意の次数  $k$  において、 $\hat{\nu} = 1/2 + \text{整数}$  となるような  $\lambda$  が許される値であることが分かるが、これは

$$\lambda = \frac{k-1}{2k} + j(j-1)k/2 = \left\{ \frac{(k-1)}{2k}, \frac{(k-1)}{2k} + k, \frac{(k-1)}{2k} + 3k, \dots \right\} \quad (46)$$

という条件を与える。 $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$  の場合を除けばこれ以外の可能性はない。

$k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$  のときは Schwarz-福原-大橋の表に適合する  $\lambda$  の値はより多くなる。例えば  $k = 4$  の時、一般の  $k$  で許される

$$\lambda = \{0, 1, 3, 6, 10, \dots\} \cup \left\{ \frac{3}{8}, \frac{35}{8}, \frac{99}{8}, \frac{195}{8}, \dots \right\} \quad (47)$$

に加えて Schwarz-福原-大橋の表の第 4 行から

$$\lambda = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} + 4j \right)^2 = \left\{ \frac{7}{72}, \frac{55}{72}, \frac{247}{72}, \frac{391}{72}, \dots \right\} \quad (48)$$

が可能な値となる。以上をまとめると次の定理が得られる。

### 定理 3

同次式ポテンシャル系 (1) が積分可能  $\Rightarrow$  固有値  $\lambda$  は次の不連続な値の 1 つをとる

- 一般の  $k$  ( $k \leq -6$  および  $k \geq 6$ ) の時

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\{ j + \frac{j(j-1)}{2}k \right\} \cup \left\{ \frac{k-1}{2k} + \frac{j(j-1)}{2}k \right\} \\ &= \{0, 1, k-1, k+2, 3k-2, \dots\} \cup \left\{ \frac{k-1}{2k}, \frac{k-1}{2k} + k, \frac{k-1}{2k} + 3k, \dots \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

- $k = \pm 1$  の時

$$\lambda = \{0, 1, k-1, k+2, 3k-2, \dots\} \quad (50)$$

- $k = \pm 2$  の時

任意の  $\lambda$

- $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$  の時は以下の値が一般の  $k$  の場合の値に追加される

$$k = 3 : \lambda = \left\{ -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} (2 + 6j)^2 \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \left( \frac{3}{2} + 6j \right)^2 \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \left( \frac{6}{5} + 6j \right)^2 \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \left( \frac{12}{5} + 6j \right)^2 \right\} \quad (51)$$

$$k = 4 : \lambda = \left\{ -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} + 4j \right)^2 \right\} \quad (52)$$

$$k = 5 : \lambda = \left\{ -\frac{9}{40} + \frac{1}{40} \left( \frac{10}{3} + 10j \right)^2 \right\} \cup \left\{ -\frac{9}{40} + \frac{1}{40} (4 + 10j)^2 \right\} \quad (53)$$

$$k = -3 : \lambda = \left\{ \frac{25}{24} - \frac{1}{24} (2 + 6j)^2 \right\} \cup \left\{ \frac{25}{24} - \frac{1}{24} \left( \frac{3}{2} + 6j \right)^2 \right\} \cup \left\{ \frac{25}{24} - \frac{1}{24} \left( \frac{6}{5} + 6j \right)^2 \right\} \cup \left\{ \frac{25}{24} - \frac{1}{24} \left( \frac{12}{5} + 6j \right)^2 \right\} \quad (54)$$

$$k = -4 : \lambda = \left\{ \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} + 4j \right)^2 \right\} \quad (55)$$

$$k = -5 : \lambda = \left\{ \frac{49}{40} - \frac{1}{40} \left( \frac{10}{3} + 10j \right)^2 \right\} \cup \left\{ \frac{49}{40} - \frac{1}{40} (4 + 10j)^2 \right\} \quad (56)$$

定理 3 は Morales and Ramis [6] によって初めて得られた。これは Yoshida[10] によって得られた必要条件を含み、それをはるかに強力にしている。

## 8 Schwarz の 3 角形に関連する同次多項式ポテンシャル

定理 2 の第 1 の条件、すなわち Gauss の超幾何方程式が可約となるときに対応している可積分な同次式ポテンシャルの例としては、直交座標で変数分離可能な

$$V_k(q_1, q_2) = Aq_1^k + Bq_2^k \quad (57)$$

や ( $A, B$  は定数)、極座標で変数分離可能な

$$V_k(q_1, q_2) = (q_1^2 + q_2^2)^{k/2} \quad (58)$$

がある。これらのポテンシャルでは固有値  $\lambda = 0, 1, k-1$  が実現される。定理 2 の第 2 の条件は 1 つの例外を除いて、Gauss の超幾何方程式の解が代数関数となる場合に対応している。それは Schwarz の 3 角形を通して 3 次元の有限な回転群の分類に帰着する。有限な回転群は正 2 面体群、正 4 面体群、正 8 面体群、正 20 面体群に限られる。現在の所、

これらの正多面体群に対応する可積分な同次式ポテンシャルとして正 2 面体群 ( $k$  は任意) に対する

$$V_k(q_1, q_2) = \frac{1}{kr} \left[ \left( \frac{r+q_2}{2} \right)^{k+1} + (-1)^k \left( \frac{r-q_2}{2} \right)^{k+1} \right] \quad (59)$$

(放物線座標で変数分離可能), および正 4 面体群に対する 3 次の同次式ポテンシャル

$$V_3(q_1, q_2) = q_1^2 q_2 + \frac{16}{3} q_2^2 \quad (60)$$

が知られている. 正 8 面体群, 正 20 面体群に対応する可積分なポテンシャルは知られていないし, それが存在しうるのか否かも不明である.

## 9 期待

可積分性の新しい必要条件, すなわち定理 3 の意味する所は大きい. 低次のポテンシャル  $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$  の方がより高次の一般の同次式ポテンシャルよりも可積分となる可能性が高いことを示唆している.  $k \geq 6$  の可積分な多項式ポテンシャルはもしかすると変数分離可能なポテンシャルに限られるのかも知れない. 一方, 変数分離可能な 2 次元の同次多項式ポテンシャルは (57), (58), (59) およびそれらを適当に座標回転して得られるものに限られることがわかっている. そうすると低次の場合を調べ尽くすことによって可積分な同次多項式ポテンシャルの有限のリストが出来てしまうことになり得るかも知れない. 果たしてこれは本当か否か?

## 参考文献

- [1] F. Beukers, Differential Galois theory, in *From Number Theory to Physics*, W. Waldschmidt, P. Moussa, J.M. Luck, and C. Itzykson eds., Springer-Verlag (1995) 413–439.
- [2] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann (1976).
- [3] J.J. Kovacic, An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations, *J. Symbolic Computation* **2** (1986) 3–43.
- [4] T. Kimura, On Riemann's equations which are solvable by quadratures, *Funkcialaj Ekvacioj* **12** (1969) 269–281.
- [5] M. Matsuda, *Lectures on algebraic solutions of hypergeometric differential equations*, Lectures in mathematics 15, Kinokuniya (1985).
- [6] J.J. Morales-Ruiz, and J.P. Ramis, A Note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential, *Preprint* (1997).
- [7] J.J. Morales-Ruiz, and J.P. Ramis, Galoisian obstruction to integrability of Hamiltonian systems, *Preprint* (1998).
- [8] E.G.C. Poole, *Introduction to the theory of linear differential equations*, Oxford (1936).
- [9] A. Ramani, B. Dorizzi, and B. Grammaticos, Painlevé conjecture revisited, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1539–1541.
- [10] H. Yoshida, A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential, *Physica* **D29** (1987) 128–142.
- [11] H. Yoshida, A new necessary condition for the integrability of Hamiltonian systems with a two dimensional homogeneous potential, *Preprint* (1998).
- [12] 難波誠, 複素関数三幕劇, 朝倉書店 (1990).
- [13] 大貫義郎・吉田春夫, 岩波講座現代の物理学「力学」, 岩波書店 (1994).
- [14] 渡辺隼郎, 常微分方程式の数式処理, 教育出版 (1974).