

定常表面張力波について*

岡本 久

〒 606-01 京都市左京区北白川追分町
京都大学数理解析研究所

February 3, 1994

1 要約

定常表面張力波の問題は Wilton ([41]) 以来 80 年程の歴史がある古典的な問題である。しかし、現在でも未解決になっているいくつかの問題があり、それらは

- (A) 偏微分方程式としての側面
- (B) 分岐問題としての側面
- (C) 流体物理学としての側面

から見てみると、様々に異なった研究手法が要求される。ここでは、筆者が東海林まゆみ氏との共同研究で得た数値計算結果の報告と、それから導かれるいくつかの予想についてまとめてみたい。以下では上の (B) についての記述が大半を占める。しかし、できる限り最近の話題についても文献を集め、何が解決され何が残された問題なのかを総括したい。とは言え、ここでは周期的な 2 次元進行波以外のものは取り上げないことをお断りしたい。分岐について論じながら安定性について論じないのも大きな欠点である。また、一数学者の個人的趣味の強いものであって、数学臭さが随所に見られることもご容赦いただきたいと思う。

2 基礎方程式

自由表面を持つ 2 次元的な流れを考える。流体は非圧縮非粘性とし、流れは渦無しと仮定する。自由表面の形は横軸方向に関して周期的であるとし、自由表面の上側の部分の運動は下の流体に影響をおよぼさないとする。流体に作用する力は重力と、自由表面に働く表面張力だけであると仮定する。さらに、流れは無限の深さであると仮定する。定常波とはある一定の速さで 1 方向に進み、かつ、波形が一定となるもののことをいう。定常表面張力波の問題と

*本研究の一部には住友財団の援助を受けました。

は、以上の性質を持つ自由表面の波形と流体の速度ベクトル場を求めることである。ことわらない限り、以下では §9 を除き、対称な波のみを考える。対称な波とはある垂直軸に関して波形が対称なものをいう。

以上の条件を微分方程式で記述するために、複素速度 $f(z)$ を定義する。以下では必要最小限の記述しかしないが、詳しくは Crapper[8] もしくは Milne-Thomson[20] を参照されたい。まず、水平右方向に x 軸を取り、鉛直上方向に y 軸を取る。この座標系は波と同じ進行速度で動いているものとする。従って、この座標系から見れば自由境界は静止しており、その下に時間に依存しない（波の進行方向とは反対の方向に）流れができる。この座標平面において自由境界を $y = h(x)$ と表そう。このとき、 $h(x)$ は x について周期的であると仮定しているので、その周期を L とする。複素数 $z = x + iy$ と複素速度 $f(z) = U + iV$ を導入する。ここで、 U は速度ポテンシャルを表し、 V は流れ関数である。このとき、 z は

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad -\infty < y \leq h(x)$$

なる領域でのみ考えればよい。上に述べた仮定「波は対称である」ということを

$$h(-x) = h(x)$$

のことであるとする。さて、関数 U も V もこの領域において調和であり、 $f(z)$ は z の正則関数である。流れの性質から (U, V) は次の境界条件を満たす：まず、領域の側面では $x = \pm L/2$ においてそれぞれ、

$$U(x) = \pm \frac{cL}{2}$$

が満たされる。ここで c は波の進行速度である。自由表面上では

$$V = 0$$

を課す。深さが無限のところでは流れは一様流になるので、

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{df}{dz}(z) = c$$

が満たされねばならない。最後に、自由境界上では Bernoulli の法則から、

$$\frac{1}{2} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 + gh(x) + \frac{T}{m} K = \text{定数}$$

が成立する。ここで、 g は重力加速度、 T は表面張力係数、 m は流体の密度である。 K は自由境界の曲率であり、次のように表される：

$$K = -\frac{d}{dx} \left[\frac{dh}{dx} / \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2} \right].$$

結局考える問題は、以上の条件を満足する正則関数 $f(z)$ と波形 $y = h(x)$ を求めることと規定できる。これは自由境界問題である。つまり、求めるべき関数の定義域が未知関数 $h(x)$ に依存しているので、関数の定義域自体もいっしょに求めなければならない点が問題を複雑にするのである。

3 Levi-Civita 方程式

考えている問題は自由境界問題であるので、物理平面の座標ではなく、複素速度ポテンシャルを独立変数にとって記述するのが便利である。この方法は Stokes ([35]) が始めたものであるが、Levi-Civita による方程式の書き換えが簡単で、数学的な取扱いに向いている。それを、Hilbert 変換を用いてさらにコンパクトな形に書き直したものが下の Levi-Civita 方程式である ([24])。この方程式には Hilbert 変換が使われるので、まずそれを定義する。周期 2π の関数 $f(\sigma)$ で、

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma = 0$$

を満たすものが与えられたとき、この関数を

$$f(\sigma) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_n \sin n\sigma + b_n \cos n\sigma)$$

と Fourier 級数に展開する。このとき、関数 f の Hilbert 変換 Hf とは、

$$Hf(\sigma) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma) \quad (1)$$

で定まる関数のことと定義する。さて、上の自由境界問題は次のように定式化することができる ([24]):

2π 周期関数 $\theta = \theta(\sigma)$ とパラメータ p, q で、 $\int_0^{2\pi} \theta(\sigma) d\sigma = 0$ と

$$e^{2H\theta} \frac{dH\theta}{d\sigma} - pe^{-H\theta} \sin \theta + q \frac{d}{d\sigma} \left(e^{H\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0 \quad \text{on } 0 \leq \sigma < 2\pi, \quad (2)$$

を満たすものを求めよ。ここで、パラメータの物理的な意味は

$$p = \frac{gL}{2\pi c^2}, \quad q = \frac{2\pi T}{mc^2 L}$$

であり、どちらも無次元パラメータである。方程式 (2) を Levi-Civita 方程式と呼ぶことにする。この方程式の解が得られたならば、それをもとに

$$\frac{dx}{d\sigma}(\sigma) = -\frac{L}{2\pi} e^{-H\theta(\sigma)} \cos \theta(\sigma) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{d\sigma}(\sigma) = -\frac{L}{2\pi} e^{-H\theta(\sigma)} \sin \theta(\sigma) \quad (4)$$

を計算すればこれが曲線 $\{(x(\sigma), y(\sigma)); 0 \leq \sigma < 2\pi\}$ を定め、自由境界を表わす ([24])。自由表面以外の流線も同様の方法で描くことが出来る ([24])。

従って、問題は方程式 (2) の解を何らかの方法で見つけるという数学的・数値的な部分とその結果の物理学的な解釈の 2 つに分けることが出来るのである。前節の定式化と Levi-Civita 方程式 (2) は数学的には同値であるが、Levi-Civita 方程式の実用上の優位性は明らかであろう。実際、

- 前節では2つの独立変数の関数 $U(x, y) + iV(x, y)$ を問題にしていたのに対し, Levi-Civita 方程式では1変数関数 $\theta(\sigma)$ が求める対称になる.
- 前節の問題は自由境界問題であるのに対し, Levi-Civita 方程式の未知関数 θ は一定の区間 $[0, 2\pi]$ で定義されており, 自由境界は後から (3,4) を計算することによって得られる.

4 Crapper の解とその唯一性

Levi-Civita 方程式の解のうち, $p = 0$ のものを純表面張力波と呼び, $q = 0$ のものを重力波と呼び, $0 < p$ かつ $0 < q$ のものを単に表面張力波と呼ぶことにする. 純表面張力波としては, Crapper によって1957年に発見された厳密解が著名である. これは人工的なパラメーター $A \in (-1, 1)$ によって次のように表わすことができる.

$$q = \frac{1 + A^2}{1 - A^2}, \quad \theta^{(c)}(\sigma) = -2 \arctan \left(\frac{2A \sin(\sigma)}{1 - A^2} \right).$$

すなわち, Crapper の解とは一つのパラメーターを含む解の族である. これが表わす解の自由表面の形は図1のようになる. 図からただちにわかるように, $|A|$ が小さいうちはきちんとした波を表しているが, $|A|$ が大きくなると自己交差する波をあらわし, 物理的に意味のない解になる. 従って, Levi-Civita 方程式は $0 < q$ のとき物理的に意味のない解を含んでいるのである ($q = 0$ のときつまり重力波ではこのようなことはない). これは少しがっかりさせられることであるが, 物理的に意味のある解は必ず Levi-Civita 方程式の解になっていることで満足することにしよう. 物理的に意味のある解 (= 自己交差のない解) だけしか現れず, しかも Levi-Civita 方程式と同じ程度に使い勝手のよい定式化ができればそれにこしたことはないが, 今の所そういうものを筆者は知らない. そこで, 「余計なものも含めて Levi-Civita 方程式の解を全部求めて, そのうち意味のあるものだけを後からより分ければよい」という立場に立つことにする.

今まで問題にされてこなかったのが不思議であるが,

$p = 0$ のとき Levi-Civita 方程式は Crapper の解以外の解を持つか?

という問題が未解決である (と思う). 様々な数値実験 ([27]) から,

- $p = 0$ の場合には Crapper の解以外の解は存在しない

ことが予想されるが, この数学的な証明は筆者にはできない.

後々の便宜のために, $p = 0$ の場合に方程式を簡単な形に書き換えることにする. $p = 0$ であるから (2) は1回積分可能で,

$$\frac{1}{2} \exp(2H\theta) + q \exp(H\theta) \frac{d\theta}{d\sigma} = \gamma \quad (5)$$

となる. ここで γ は積分定数である. この積分定数が $1/2$ でなければならないことを証明しよう. 式 (5) に $\exp(-H\theta - i\theta)$ をかけて積分すると,

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \exp(H\theta - i\theta) d\sigma = \gamma \int_0^{2\pi} \exp(-H\theta - i\theta) d\sigma.$$

さて, θ の Fourier 級数展開を

$$\theta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\sigma + b_n \cos n\sigma)$$

とする. このとき,

$$\theta + iH\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - ia_n)z^n, \quad (z = \exp(in\sigma))$$

が成立する. 右辺の定める正則関数を $f(z)$ とすると, $f(z)$ は単位円盤内で正則となり, $f(0) = 0$ を満足する. Cauchy の積分定理より,

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \exp(H\theta - i\theta) d\sigma = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \exp(-if(z)) \frac{dz}{iz} = \pi$$

を得る. 同様に

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \exp(-H\theta - i\theta) d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \exp(-i\overline{f(z)}) d\sigma = \overline{\frac{1}{2} \int_{|z|=1} \exp(if(z)) \frac{dz}{iz}} = \pi$$

となる. 従って, $\gamma = 1/2$ を得る. 結局, θ は

$$q \frac{d\theta}{d\sigma} + \sinh(H\theta) = 0 \quad (6)$$

を満足しなくてはならないことになる. 上で与えた Crapper の解がこの方程式を満たすことを証明するには,

$$\theta^{(c)}(\sigma) + iH\theta^{(c)}(\sigma) = 2i \log \left(\frac{1 + Ae^{i\sigma}}{1 - Ae^{i\sigma}} \right)$$

であることに注意すればよい. 全く同様に, 自然数 N に対して

$$\theta_N^{(c)}(\sigma) + iH\theta_N^{(c)}(\sigma) = 2i \log \left(\frac{1 + Ae^{iN\sigma}}{1 - Ae^{iN\sigma}} \right)$$

で $\theta_N^{(c)}$ を定義すれば, これも解であることがわかる, しかし, これはひとつの波長 2π の中に N 個の同じ波がつまっているだけなので, 本質的に Crapper の解と同じものであるといつてよい. これをモード N の Crapper の解と呼ぶことにする. 従って, Crapper の解は図 2 のような分岐図式で表わされるが, これらの解の枝から 2 次分岐が生じないことは [27] で証明済みである. しかし, Crapper の解と全くつながっていない解の存在についてまで否定されているわけではない. 方程式 (6) が Crapper の解以外に解を持たないことの証明が待たれている.

5 2重分岐点

これ以後は p も q も正である場合を考える. パラメータ (p, q) が自明な解における分岐点であるとは, 方程式 (2) を $\theta \equiv 0$ で線形化した時にその線形化方程式が恒等的にゼロではない解を持つときをいう. 容易にわかるように, Levi-Civita 方程式の $\theta \equiv 0$ での線形化方程式は

$$\left(\frac{d}{d\sigma} H - p + q \frac{d^2}{d\sigma^2} \right) w = 0$$

となる. 従って, 分岐点であるための必要かつ十分な条件は

- ある自然数 n が存在して,

$$n = p + n^2 q$$

が成立する

ことである. これは, (p, q) 平面では, 直線群を表す. ここで, このうちどの2本の直線も必ず第1象限 ($0 < p, 0 < q$) で交わることに注意していただきたい. しかも, 交点は第1象限にのみあることが重要である. 直線 $n = p + n^2 q$ と $m = p + m^2 q$ の交点をモード (m, n) の2重分岐点と呼ぶ. これに対し, 直線 $n = p + n^2 q$ の上の点で, 他のどの直線上にないものをモード n の単純分岐点と呼ぶことにする. 3重以上の分岐点は存在しない.

大ざっぱに言って, 単純分岐点から分岐する解は, その分岐点の近くでは1種類しかない: モード n の単純分岐点から分岐する解は $|x| < L/2$ において n 個の山と n 個の谷を持つ. 2重分岐点の近くには2種類の解がある: この2重分岐点のモードを (m, n) とすると, 波長 2π の間に波の山が m 個ある解と n 個ある解が共存する. これは定義から当然のことであるが, 2重分岐点の面白いところは, これら以外に別種の解, すなわち, m 山と n 山の間のような解が存在することである. このことに最初に気づいたのが Wilton [41] である. こういった解は2次分岐として現れる点の特徴である. この例を次節であげることにする.

Levi-Civita ([16]) は $q = 0$ の場合に単純分岐点から新しい解が分岐することを Stokes がやったよりも厳密に証明した. Wilton ([41]) は, 厳密性にやや欠けるものの, 2重分岐点の近くに2次分岐が存在することを示したのである.

6 モード (1,2) と (1,3) の分岐

「モード (1,2) あるいはモード (1,3) の分岐点の近くで分岐解がどのような集合をなすか?」という問題は [5] と [31] において独立に, 初めて数値的に調べられた. その結果わかったことは,

- どちらの2重分岐点の近くにも2次分岐が存在する;
- 各枝において解を追ってゆくといつかは自己交差が始まることによって解の極限形が現れる;

ということである. 自己交差解は Crapper の場合 ($p = 0$) に特有のものではなく, $0 < q$ ならば p が何であっても出てくることがわかったのである. これらの論文では分岐図式がどの

ようなものかははっきりしなかったが, Shōji [34] では分岐図式が初めてくわしく調べられ, 多くの新しい分岐のパターンが得られた. 図3～図6にその1部を示す ([28]). 数値計算では

$$\theta_N(\sigma) = \sum_{k=1}^N a(k) \sin n\sigma$$

とにおいて,

$$e^{2H\theta_N} \frac{dH\theta_N}{d\sigma} - pe^{-H\theta_N} \sin \theta_N + q \frac{d}{d\sigma} \left(e^{H\theta_N} \frac{d\theta_N}{d\sigma} \right) = 0$$

が $\sigma = \pi k / (N + 1)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) において満たされるように未定係数 $a(1), a(2), \dots, a(N)$ を決める. つまり Spectral-Collocation Method を用いた. 図3はモード (1,2) の2重分岐点の近くの分岐図式である. 分岐図式は p を固定して q を横軸にとって書いてある. 縦軸は解の何らかの意味の振幅の大きさを表していると理解していただきたい. 図3では $a(1) + a(2)$ を縦軸にとってある. ここで, $a(1), a(2)$ は上の Fourier 級数展開の係数である. 図3の曲線の各々の点がひとつの解を表す. 代表的な解の波形を図4に描いた. 図4c)の波が2次分岐した解である. このような波は実験でも得られている (Schooley [30]). モード (1,3) でこれらに対応するものが図5と図6である. ここでは一部しか掲載できないが, p を様々に変えてゆくと新たな分岐図式が見つかることがわかる. これらについては [26–29, 33, 34] を御覧になっていただければ幸いである.

さて, 図5で重要な点は,

- モード (1,3) の解の枝を追求してゆくと, あるところで自己交差が始まってそのあとは物理的に意味のない解がはじまる. ところが, さらに追求してゆくとあるところで自己交差が解けて, 物理的に意味のある解が再び始まることがある.

ということである. これは, 「すべての解をまず求めよ」という我々の方針が実用的にも役に立つことを裏付けてくれていると言って良いであろう. もし, 自己交差が始まったところで解の計算を止めてしまったら, 分岐の枝のさらに遠方にある, 自己交差が解けて物理的な意味を回復した解を得ることはできないのである.

7 モード (1,4) と (2,3) の分岐

分岐点のモード (m, n) が異なれば, 異なった分岐のパターンが得られる. モード (1,4) の分岐点 $(p, q) = (0.8, 0.2)$ の近くでは複雑な分岐が得られる. 新しい分岐図式として図7 ($p = 0.76$ の場合) を得ることが出来た. モード4の枝には2種類の異なった2次分岐が存在している. ひとつは大きな閉曲線からなり, 4個の極限点 (転回点) を持つ. もうひとつの小さな閉曲線は極限点を持たない. これらの2次分岐解の表す波の形を図8に描いた. 4と1の中間の形であることが見てとれる. モード (2,3) の分岐点 $(p, q) = (1.2, 0.2)$ の近くでの分岐はもう少し単純である (図9). しかしこの単純さは見かけのものにすぎない. その理由は, 2重分岐点の近くのループが大変小さいものであるからである (図10). 退化した分岐点ならともかく, そうでないのに, このように小さいループが現れることはどうしても説明がつかない.

モード (1,4) の波の計算は Aston[3] でも精力的に行なわれている。しかし、我々の計算 ([28,29,33]) は彼が見落としていた解も含んでいる。一方、Aston[3] はモード (1,n) ($n > 4$) についても計算しているが、我々はこれを行っていない。

8 3 次分岐の存在

我々の経験として、「 p が大きいところでの分岐ほど複雑である」と言うことができる。前節および前々節であげた分岐図式では 2 次分岐こそ複雑に存在していたが、3 次分岐は無いことに注意されたい。ところが、さらに p を大きくしていくと 3 次分岐が現れることを数値的に確かめることができた ([33])。図 11 は $p = 1.36$ のとき 3 次分岐が存在することを示す。

9 4 次分岐と非対称解

Zufiria ([44]) は 4 次分岐の存在とその解の非対称性を数値計算で示した。しかしながら、その解の対称解からのずれは極めて小さい。Zufiria の計算は信頼に足るものと思うが、彼の数値実験を追試してみることも重要ではないかと思う。

Wehausen & Laitone [40] は、「進行波が常に対称であることを Levi-Civita[16] が証明している」と述べている。しかしながら、これは、彼らの読み間違いである。Levi-Civita が証明したのは、

- 自明解からの 1 次分岐解は対称である

ということに過ぎない。従って、2 次分岐以後の解については何らの情報も与えていないのである。Garabedian[10] は

- 1 波長内に山がひとつ谷がひとつで、残りでは単調であるような波は対称である

という事実を証明した。しかし、Zufiria の解は 1 波長内に 6 個の山があるから、Garabedian の定理には抵触しない。なお、Levi-Civita の定理も Garabedian の定理も $q = 0$ の場合すなわち重力波についてのみ証明されていることに注意されたい。Levi-Civita の定理の証明は、実は p, q が何であってても正しいものであるが、Garabedian の定理を表面張力波の場合にも拡張できるかどうかはやさしい問題ではない。

対称でない波の存在についてはもう少し詳しくしらべることも意味のあることであると思う。ちなみに、孤立波では対称でないものは存在しないことが証明されている ([6])。

10 負の表面張力

Levi-Civita 方程式 (2) をみればわかるように、パラメーター p, q は実数であれば何であってても方程式 (2) の意味はある。 $p < 0$ の場合は天井にへばりついたような流体の場合と考えることができる。しかし、 $q < 0$ の場合でも方程式自体は数学的意味を失わないという事実は意外である。表面張力が負であるというのは水とアルコールのような場合でないとい起り得ないので、このような場合に進行波を論ずること自体に意味があるのかどうかよくわからな

い.このような不安定な力学系では安定な平衡状態が存在することはあり得ず,物理現象は $q < 0$ と $q > 0$ では根本的に異なるはずである.しかしながら,負の場合にも,たとえ不安定であれ平衡状態が存在するという事実には何等かの意味があるはずである(と思う).

分岐集合 $n = p + n^2 q$ を見ると,これらは $q < 0$ ではお互いに全く交差しない.従って比較的単純な分岐解の集合が得られるであろう.問題は, $q < 0$ の場合の“波の極限形”である.これはすなわち,解の枝を追っていったときに,もうこれ以上追えないときの波の形である.重力波の場合には良く知られているように,波が120度の角を持つ極限形が得られる.(純)表面張力波で $q > 0$ の極限波では,自己交差が始まることによって極限波が得られる([5,7,31]). $q < 0$ の場合はどうであろうか?

重力パラメーター p を1.1に固定し,分岐の枝を追ってみた.このとき,モード1の解は $q = -0.1$ において分岐し, $q < -0.1$ に解が存在する.解の枝は q の負の方向に延びてゆくが, q が -3.0 くらいになると θ の Fourier 級数は極端に収束が悪くなる.図12は $p = 1.1, q = -3.0$ の解の波形を示す. Crapper の波とは異なり,波の谷に相当する部分が山に相当する部分よりも大きいことがわかる. M. Tanaka [38] のような方法でもっと精密に調べてみるとおもしろいことがわかるかも知れない.

11 重力波に関する話題

重力波に関して述べることは本来の目的ではないが,数学的にみて困難な問題が残されているので,簡単にふれたい.いわゆる極限波 (limit wave = highest wave) の波形がどのような関数で表されるかは難しい問題である.これに関する情報は [1,2,11,13,19,23,37] にある.極限波の数値計算については Yamada[42] が名高い.彼の数値計算は当時としては極めてレベルの高いものである.極限波の分岐については [4,17,18,38] に詳しい.現在の所,「モード2以上の波には2次分岐が生ずるが,モード1の波には2次分岐は生じないというのが結論である.ここでは田中光宏氏による貢献が大きい. Tanaka[38] は重力波の研究者には必須の文献である.モード1の解の枝には2次分岐は存在しないが,極限点(転回点)が無限に存在することが [18] において示唆されている. [18] では1個の存在が数値的に確認されているが,さらなるチェックあるいは数学的証明なども問題と言えるかもしれない.重力波の安定性については [22,39,40] がよい文献であると思う.

重力波と表面張力波の関連を研究することは大変難しい問題であろう.実際,方程式(2)を見ればわかるように,表面張力をゼロに近づけることは $q \rightarrow 0$ を意味するから,これは特異摂動の問題になる. $q \rightarrow 0$ のとき表面張力波がいかにして重力波に近づくか(あるいは近づかないか)という問題は数学者にとっては面白い問題である.「実用上表面張力は無視できる」とはいえ,角のようなものが現れてきたらその近くでは表面張力は無視できなくなる.「粘性の効果が境界層を生み出すこと」を類推させるような現象がきっとあるはずである.このようなことは様々に研究されてきているのではないかとも思うが,浅学のため筆者は文献を知らない.

12 Stokes-Wilton-Levi-Civita の問題の一般化

Levi-Civita 方程式は多くの拡張の仕方が有り得る.たとえば,

- 深さ有限の波を考える

- 波の上の流体の運動も考える（2層流体の問題あるいは内部波）
- 渦ありの波を考える

などが考えられる。それぞれの場合についてコメントしたい。

「1」 深さ有限の波.

深さ有限野場合, Crapper の波に対応する純表面張力波は Kinnersley ([12]) によって得られた. この波は Jacobi の楕円関数を用いて具体的に書くことができる. Levi-Civita が行なった解析を深さ有限の場合に実行したのが Struik[36] である. Levi-Civita 方程式を深さ有限の場合に拡張することは容易である: 単に Hilbert 変換の定義を

$$Hf(\sigma) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+r^n}{1-r^n} (-a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma)$$

に代えればよい ([24]). 深さのパラメーター r は $0 \leq r < 1$ を動く. $r = 0$ の場合は深さが無限大の場合になるし, $r \rightarrow 1$ のとき, 浅水波の特異極限になる.

Shoji[34] は深さが無限の場合のみならず, 有限の場合の表面張力波の分岐も計算している. 不思議なことに, パラメーターが増えたにもかかわらず分岐現象としては特に新しいものは見つからず, 深さが無限大の場合と定性的に同様のものしか得られなかった. なぜパラメーターが増えたにもかかわらず現象として新しいものが見いだされないのか不思議であるが, 理由はよくわからない. その説明として [26] では退化した分岐点を考慮したがそのようなものは存在しないことが示唆されている. 文献 [25] では深さを表すパラメーターの役割について詳論し, 退化した分岐点が存在しないことが証明された.

「2」 2層流体の問題.

これについては船越・及川の解説 [6] が優れている. Saffman や Pullin などの overhanging wave やその極限形など面白い現象が知られている ([6] の文献表参照). これらの文献では表面張力波を無視しているが, 表面張力の効果を入れた場合の考察はこれからの課題であろう. Levi-Civita の論文の2層流体の問題への拡張は Katchine [14] にある.

「3」 渦ありの波.

渦ありの流れで最も有名なものは Gerstner のトロコイド波である (Lamb[15] Art. 251). これは水の進行波の厳密解であるが, 渦ありのためにこれまでの研究とは全く隔離されて来たものである. しかし, Moiseev [21] や Zeidler [43] の方程式は渦無し水面波も Gerstner の波も含むようなものであり, この方程式を総合的に解くことも面白いと思う. つまり, あるパラメーターを含む解の族, 例えば $\{\theta_s; 0 < s < 1\}$ を求め, $s \rightarrow 0$ のときその解が Gerstner のトロコイド波になり, $s \rightarrow 1$ のときその解が渦無しの進行波になるようなものが構成出来れば, 波の全体像をつかむのに役立つはずである.

References

- [1] C.J. Amick and L.E. Fraenkel, Trans Amer. Math. Soc., vol. 299 (1987), pages 273–298.
- [2] C.J. Amick, L.E. Fraenkel, and J.F. Toland, Acta Math., vol. 148(1982), pages 193–214.
- [3] P.G. Aston, Wave Motion, vol. 17, 1993, pp. 113–141

- [4] B. Chen and P.G. Saffman, *Stud. Appl. Math.*, vol. 62 (1980), pages 1–21.
- [5] B. Chen and P.G. Saffman, *Stud. Appl. Math.*, vol. 62 (1980), pages 95–111.
- [6] W. Craig and P. Sternberg, *Commun. Part. Diff. Eqs.*, vol. 13 (1988), pages 603–633.
- [7] G.D. Crapper, *J. Fluid Mech.*, 1957 vol. 2, pp. 532–540.
- [8] G.D. Crapper, *Introduction to Water Waves*, Ellis Horwood, 1984.
- [9] 船越満明, 及川 正行, *ながれ* 第8巻第4号 (1989), pages 311–335.
- [10] P.R. Garabedian, *J. d'Anal. Math.*, vol. 14 (1965), pages 161–169.
- [11] G. Keedy and J. Norbury, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 83 (1978), pages 137–157.
- [12] W. Kinnersley, *J. Fluid. Mech.*, vol. 77 (1976), pages 229–241.
- [13] Yu. P. Krasovskii, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 1 (1961), pages 996–1018.
- [14] N. Kotchine, *Math. Ann.*, vol. 98 (1928), pages 582–615.
- [15] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Sixth Edition, Dover, New York.
- [16] M. Levi-Civita, *Math. Ann.*, 1926 vol. 36, pp. 571–613
- [17] M.S. Longuet-Higgins, *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. A 360 (1978), pages 471–488: *ibid*, vol. A 360 (1978), pages 489–505: *ibid*, vol. A 396 (1984), pages 269–280: *J. Fluid Mech.*, vol. 151 (1985), pages 457–475: *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. A 403 (1986), pages 167–187.
- [18] M.S. Longuet-Higgins and M.J.H. Fox, *J. Fluid Mech.*, vol. 85 (1978), pages 769–786.
- [19] J.B. McLeod, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol 299 (1987), pages 299–302.
- [20] L.M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics (Fifth Edition)*, Macmillan Press (1968).
- [21] N.N. Moiseev, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 24 (1960), pages 1058–1063.
- [22] 日本流体力学会編集, *流体における波動*, 第2章振幅の大きい波, (1989).
- [23] H. Okamoto, 京都大学数理解析研究所 講究録 # 724 (1990), pages 87–112.
- [24] H. Okamoto, *Nonlinear Anal., Theory, Meth. & Appl.*, 1990 vol. 14, pages. 469–481.
- [25] H. Okamoto, to appear in *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* (1994).
- [26] H. Okamoto and M. Shōji, 京都大学数理解析研究所 講究録 # 740 (1991), pages 208–242.
- [27] H. Okamoto and M. Shōji, 京都大学数理解析研究所 講究録 # 745 (1991), pages 21–38.
- [28] H. Okamoto and M. Shōji, *Proc. China-Japan Seminar on Numer. Math.*, eds. Z.-c. Shi and T. Ushijima, World Scientific, pages 119–132.

- [29] H. Okamoto and M. Shōji, submitted to *Physica D*.
- [30] A.H. Schooley, *J. Geophys. Res.*, vol. 65 (1960), pages 4075–4079.
- [31] L.W. Schwartz and J.-M. Vanden-Broeck, *J. Fluid Mech.*, vol. 95 (1979), pages 119–139.
- [32] L.W. Schwartz and J.D. Fenton, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 14 (1982), pages 39–60.
- [33] M. Shōji and H. Okamoto, to appear
- [34] M. Shōji, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA* 1989 vol. 36, pp. 571–613
- [35] G.G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, vol.1, pages 314–326.
- [36] D.J. Struik, *Math. Ann.*, vol. 95 (1926), pages 595–634.
- [37] J.F. Toland, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 363 (1978), pages 469–485.
- [38] M. Tanaka, *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 52 (1983), pages 3047–3055: *J. Fluid Mech.*, vol. 156 (1985), pages 281–289.
- [39] 田中光宏, *ながれ*, vol. 4 (1985), pages 203–212.
- [40] J. V. Wehausen and E. Laitone, *Surface Waves*, in *Handbuch der Physik*, Vol. IX (*Fluid Dynamics*) (1960), pages 446–778.
- [41] J.R. Wilton, *Phil. Mag. (6)* vol 29 (1915), pages 688–700.
- [42] H. Yamada, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.*, vol. V (1957), pages 37–52.
- [43] E. Zeidler, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 50 (1973), pages 34–72.
- [44] J.A. Zufria, *J. Fluid Mech.*, vol. 180 (1987), pages 371–385: *ibid*, vol, 181 (1987), pages 17–39: *ibid*, vol. 184 (1987), pages 183–206: *ibid*, vol. 191 (1988), pages 341–372.

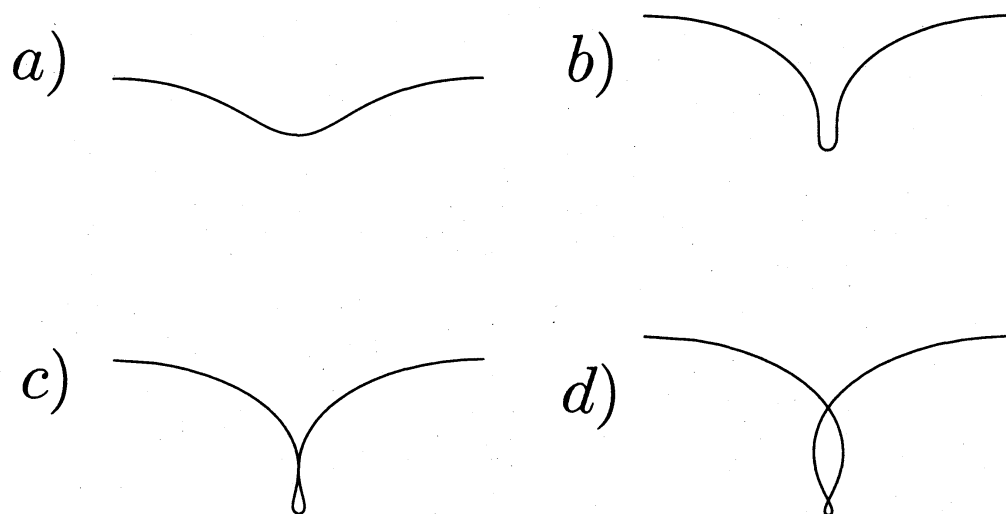


図1. Crapper の純表面張力波. a) $A = -0.2$, b) $A = -0.414215$, c) $A = -0.45467$, d) $A = -0.5$. $0.414215 \dots < |A|$ のときには自由境界 $y = h(x)$ は一価関数ではない. $0.454670 \dots < |A| < 1$ のときは自己交差する.

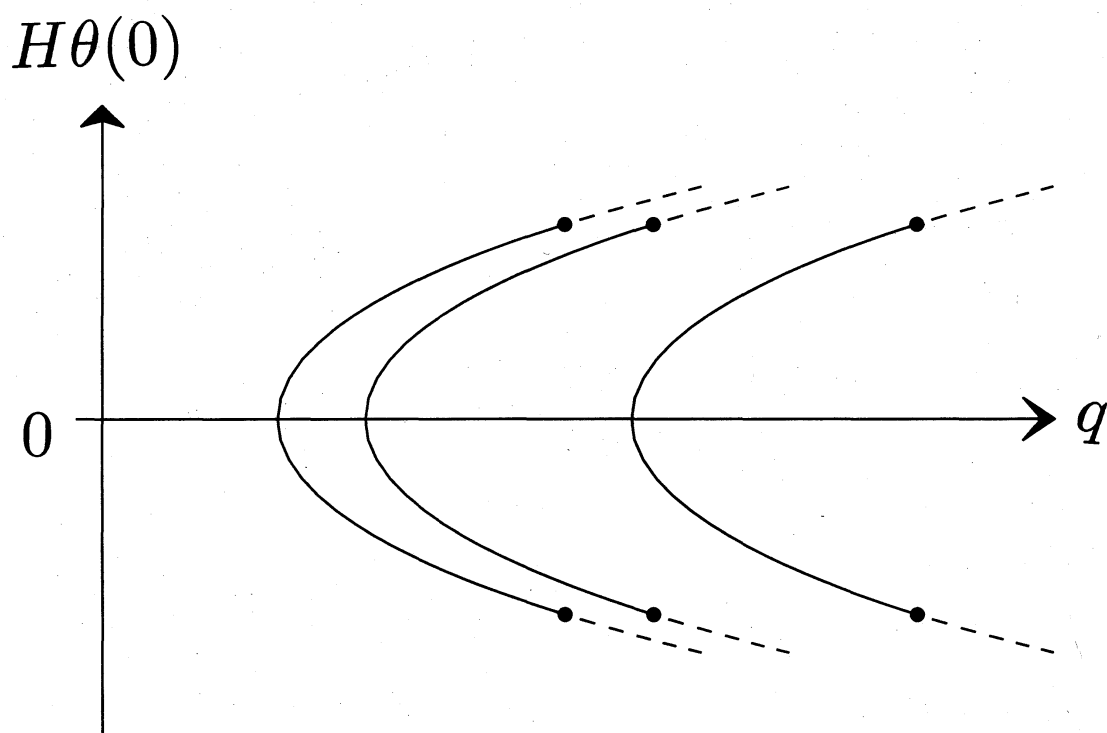


図2. Crapper の波のなす分岐図式. $q = 1, 1/2, 1/3, \dots$ が分岐点である. この図には $1/n$ ($n \geq 4$) からの分岐は描いてない.

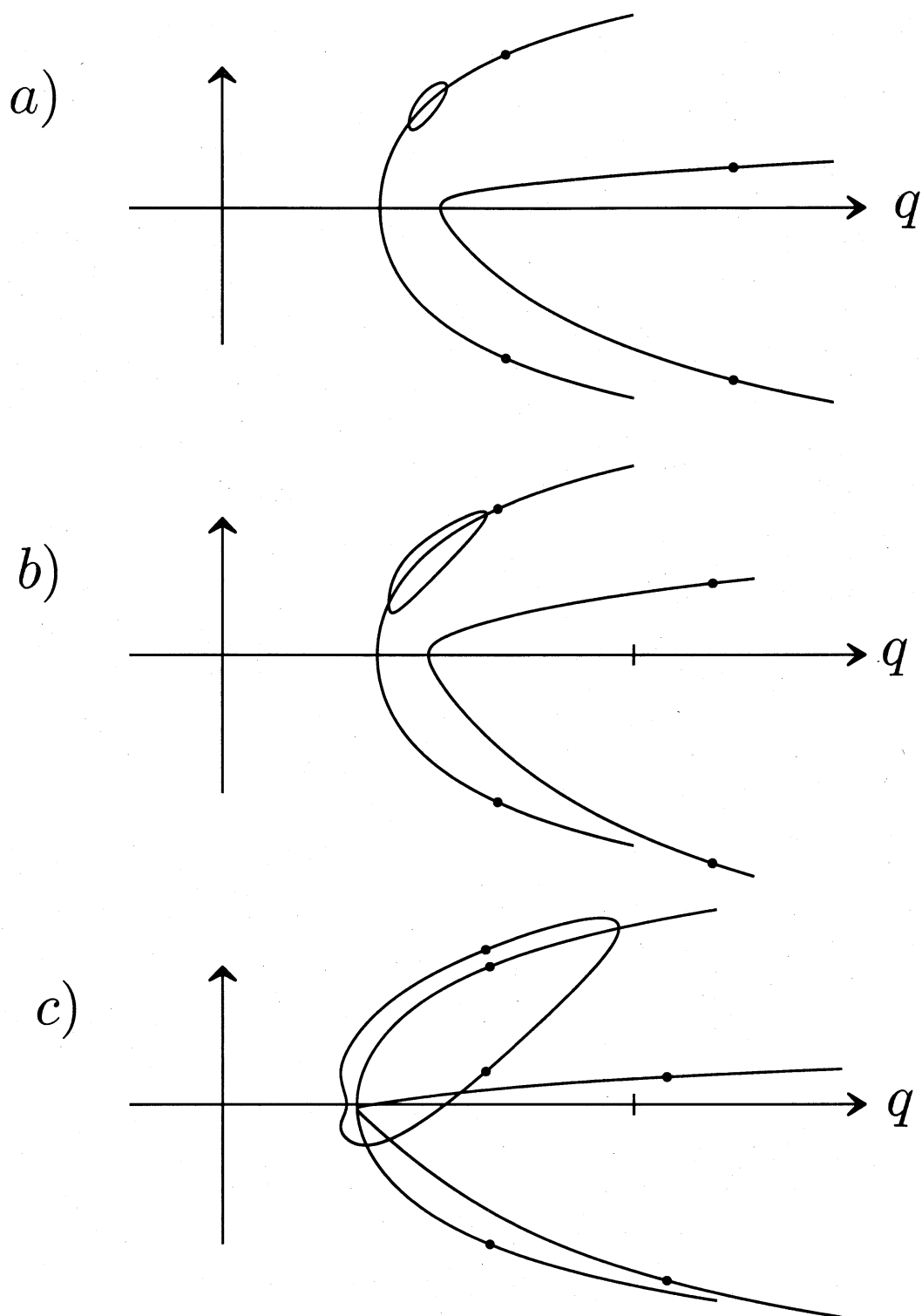
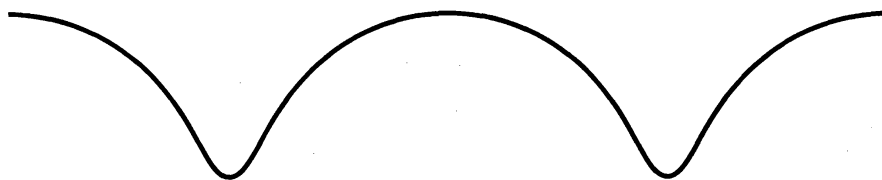
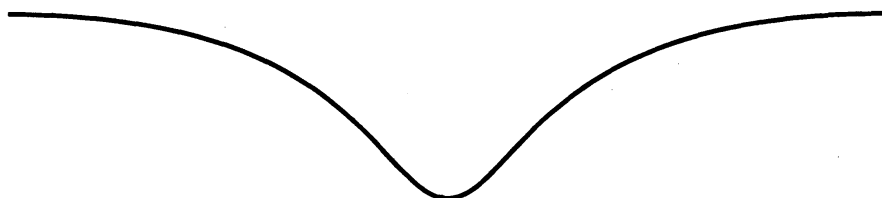


図3：モード(1,2)の2重分岐点近くの解. a) $p = 0.47$, b) $p = 0.50$, c) $p = 0.70$. 黒い点は自由表面が自分自身に接触する解を表す. これらの点の右側にある解は全て自己交差する解を表す.

a)



b)



c)

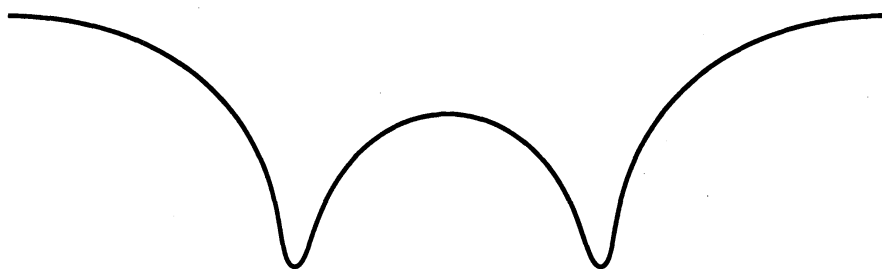


図4：自由表面の形. a) モード2の波 [図3 b) の外側の放物線上の解], b) モード1の波 [図3 b) の内側の放物線上の解], c) 2次分岐した波 [図3 b) の閉曲線上の解].

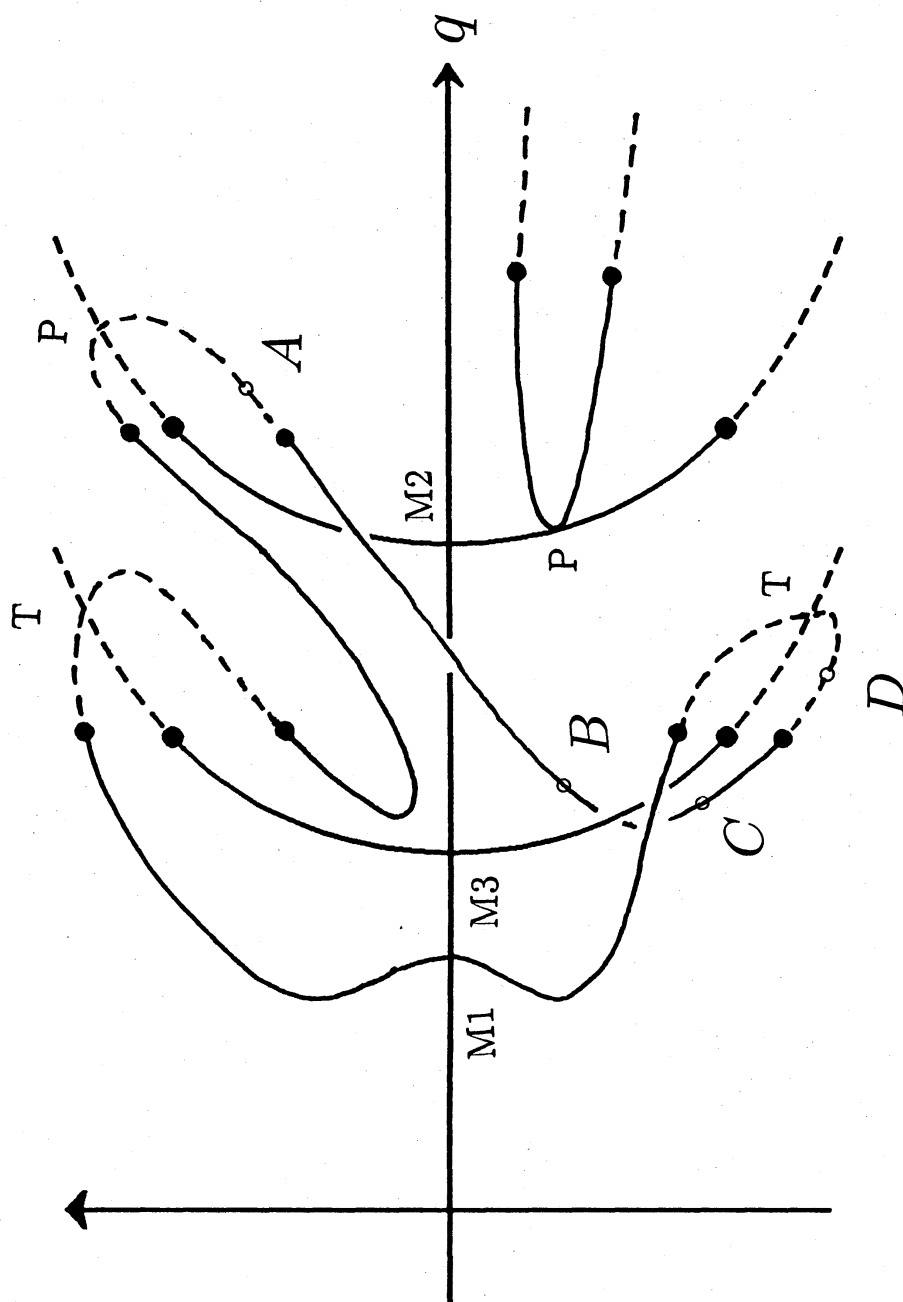


図5：モード(1,3)の2重分岐点の近くでの分岐図式を模式的に書いたもの。自己交差する解は点線で書いてある。実線は交差しない解である。 $M1, M2, M3$ は各々モード1, モード2, モード3の枝を示す。 P はpitchfork分岐を表し, T はtranscritical分岐を表す。白丸は図6で波形を描いた点である。

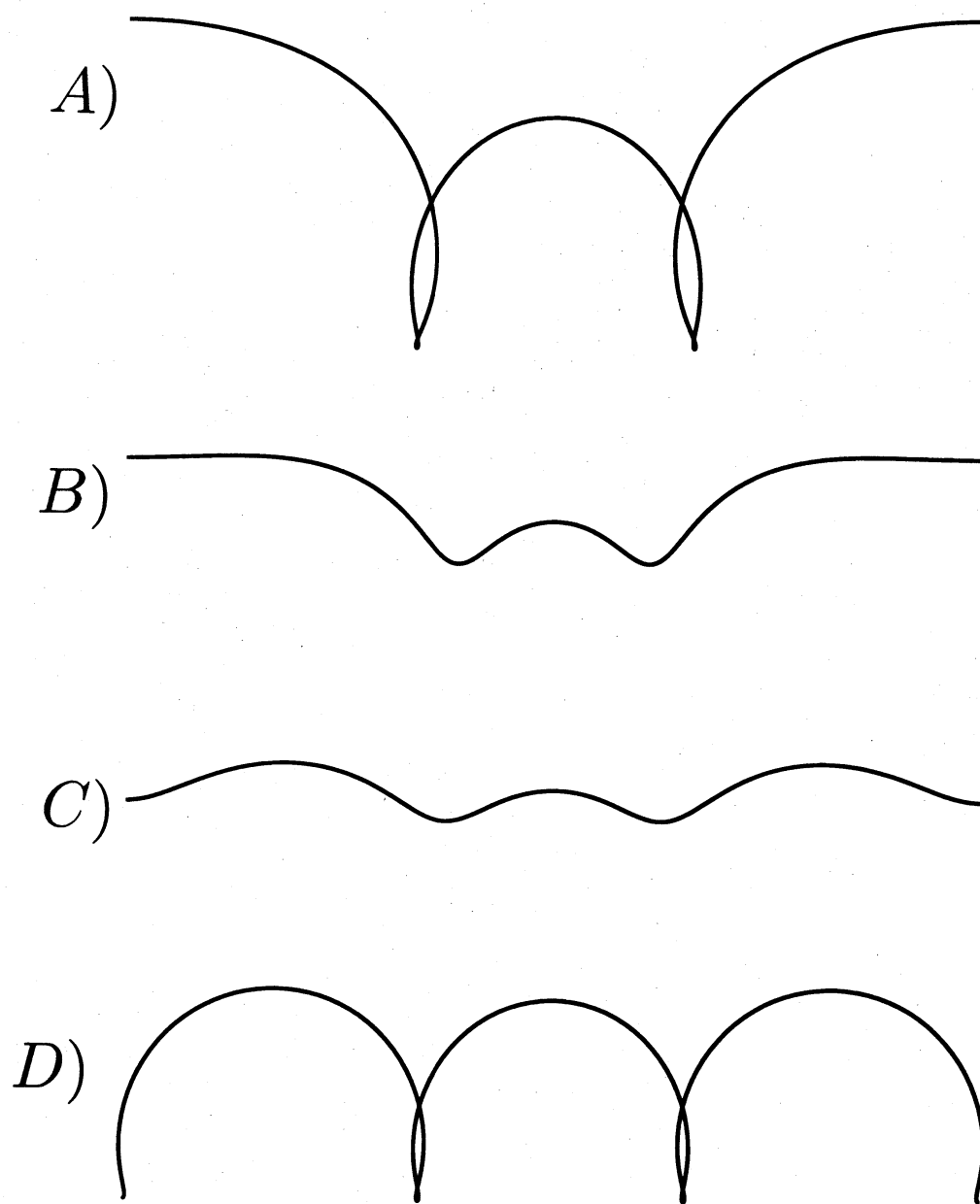


図6：図5の点 A,B,C,D の波形. 図5で B, C は自己交差しない解なのに, 自明な解につながるには自己交差する解を経由しなければならないことに注意すべきである.

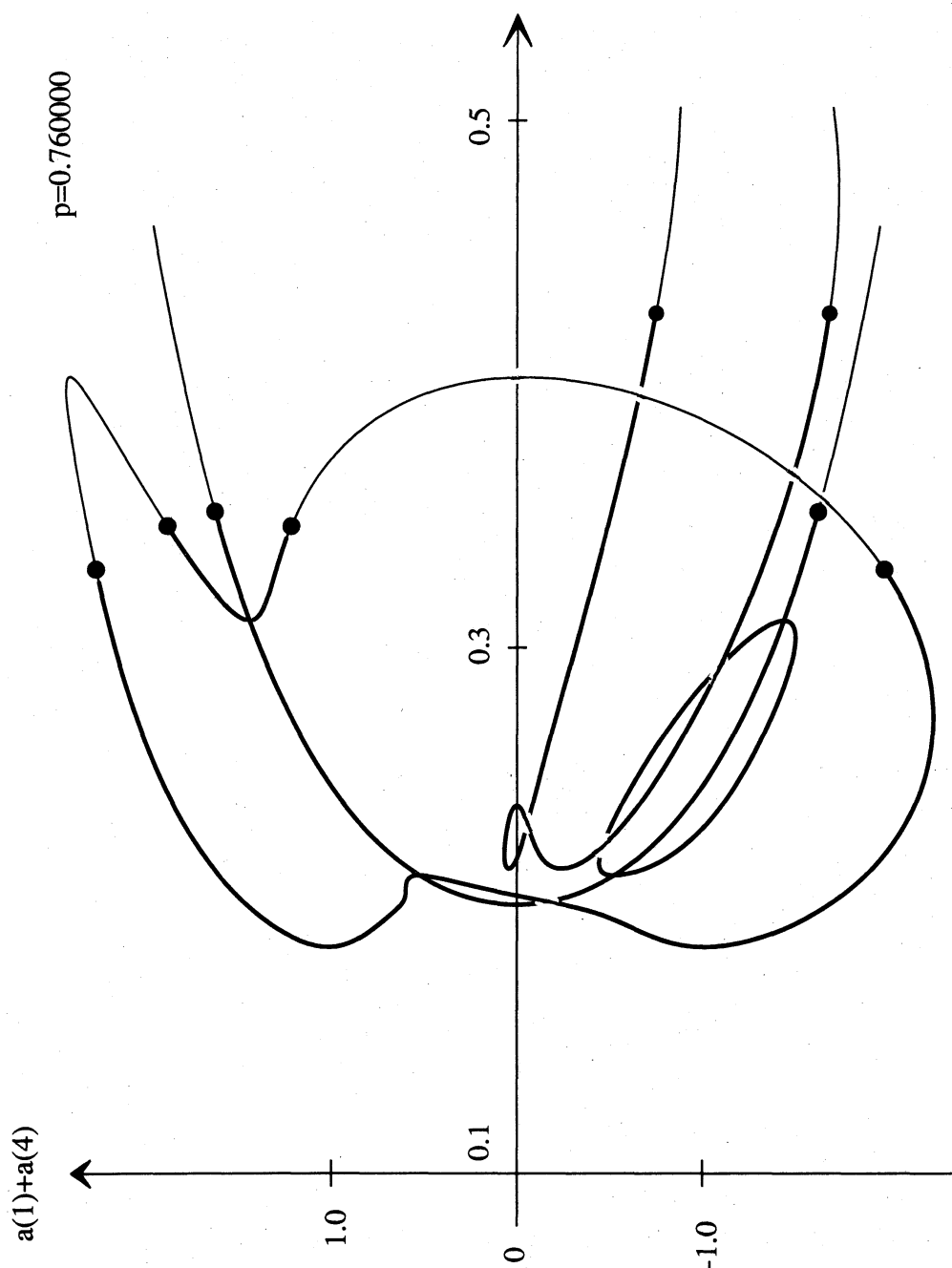


図7：モード(1,4)の分岐図式. $p = 0.76$. 黒丸は自由表面が自分自身に接触する解を表す. 太い線は交差しない解を, 細い線は自己交差する解を表す. 全体で, 極限点が6個存在し, 閉曲線が2本存在する.

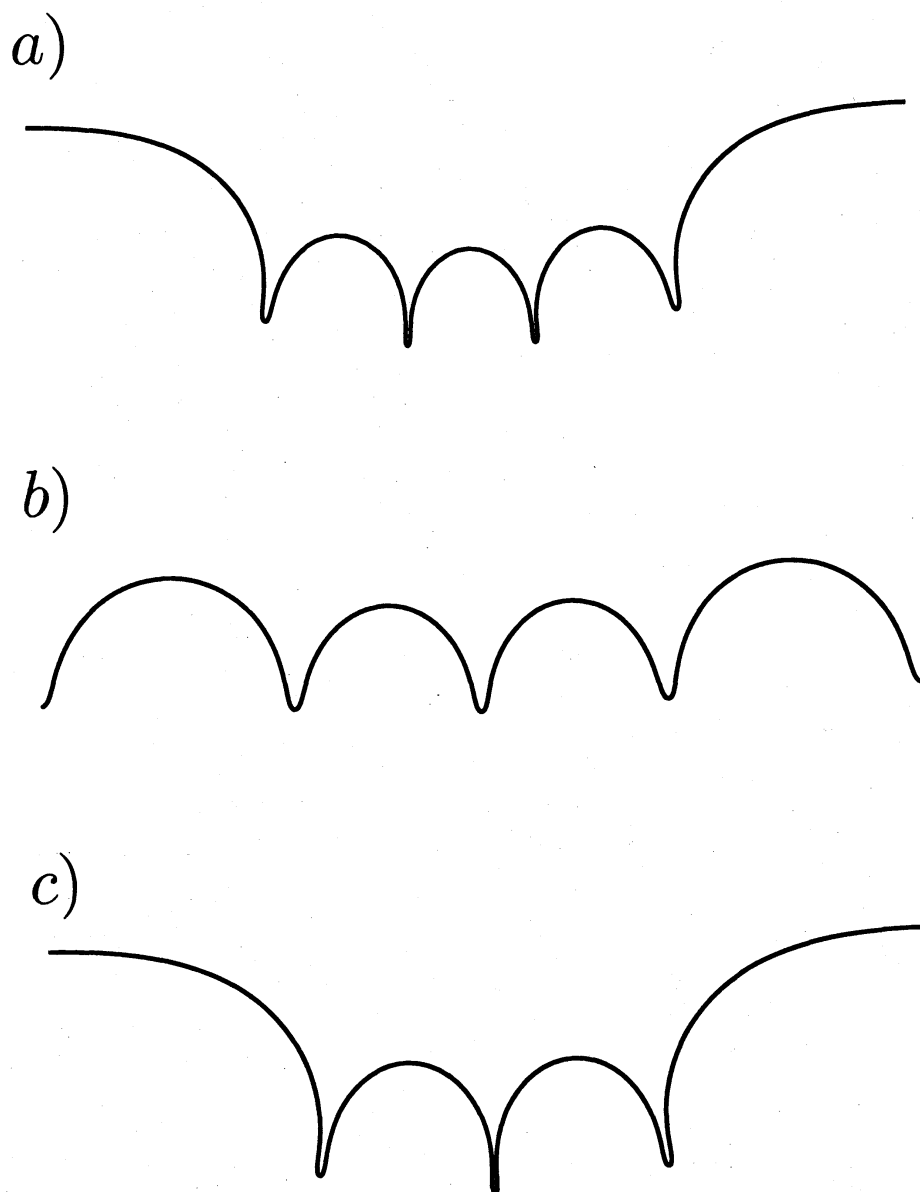


図8： 図7の中の解の表す波形. a) は大きな閉曲線上の解. b) は小さな閉曲線上の解. c) は極限点をもつ枝上の解.

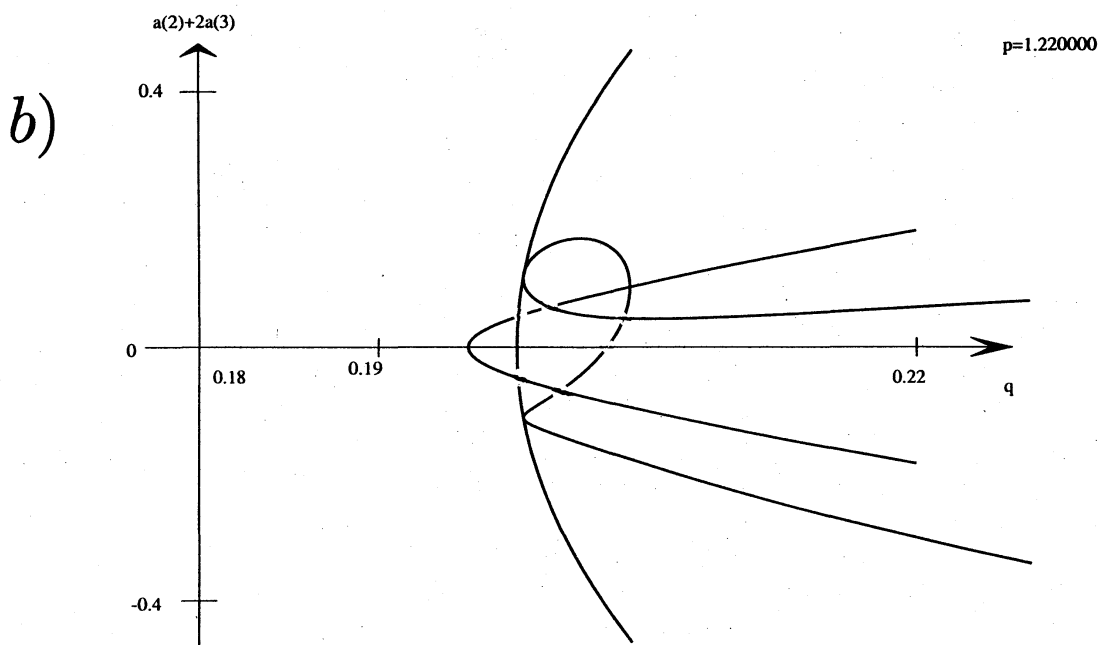
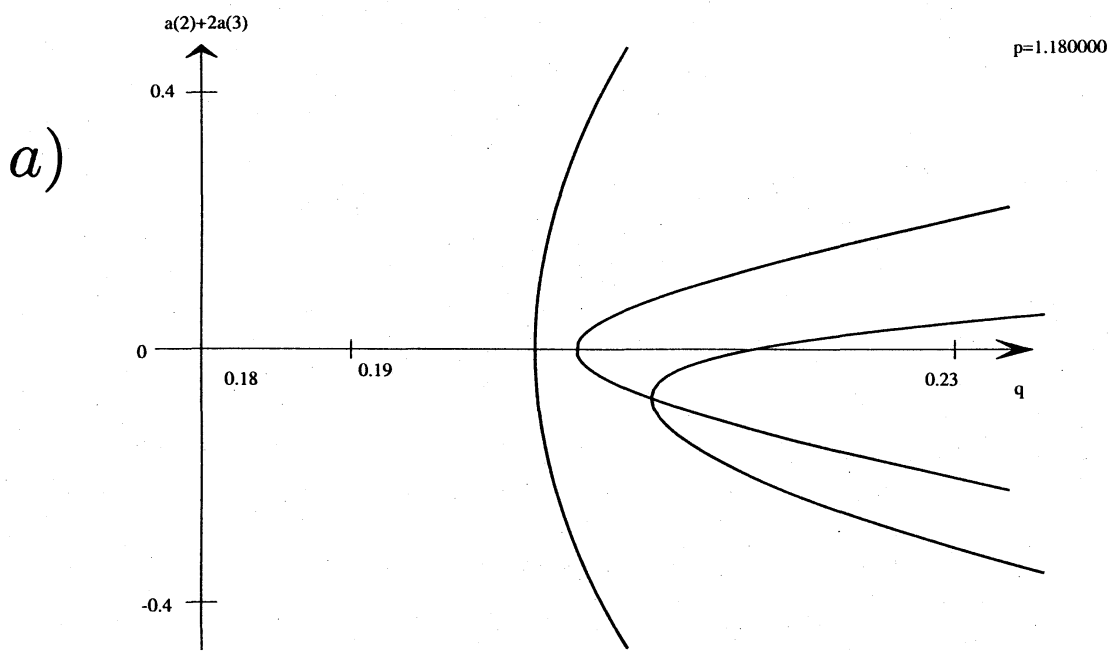


図9：モード(2,3)の近くの解の分岐. a) $p = 1.18$, b) $p = 1.22$.
この図の中の解は全て自己交差しない解である.

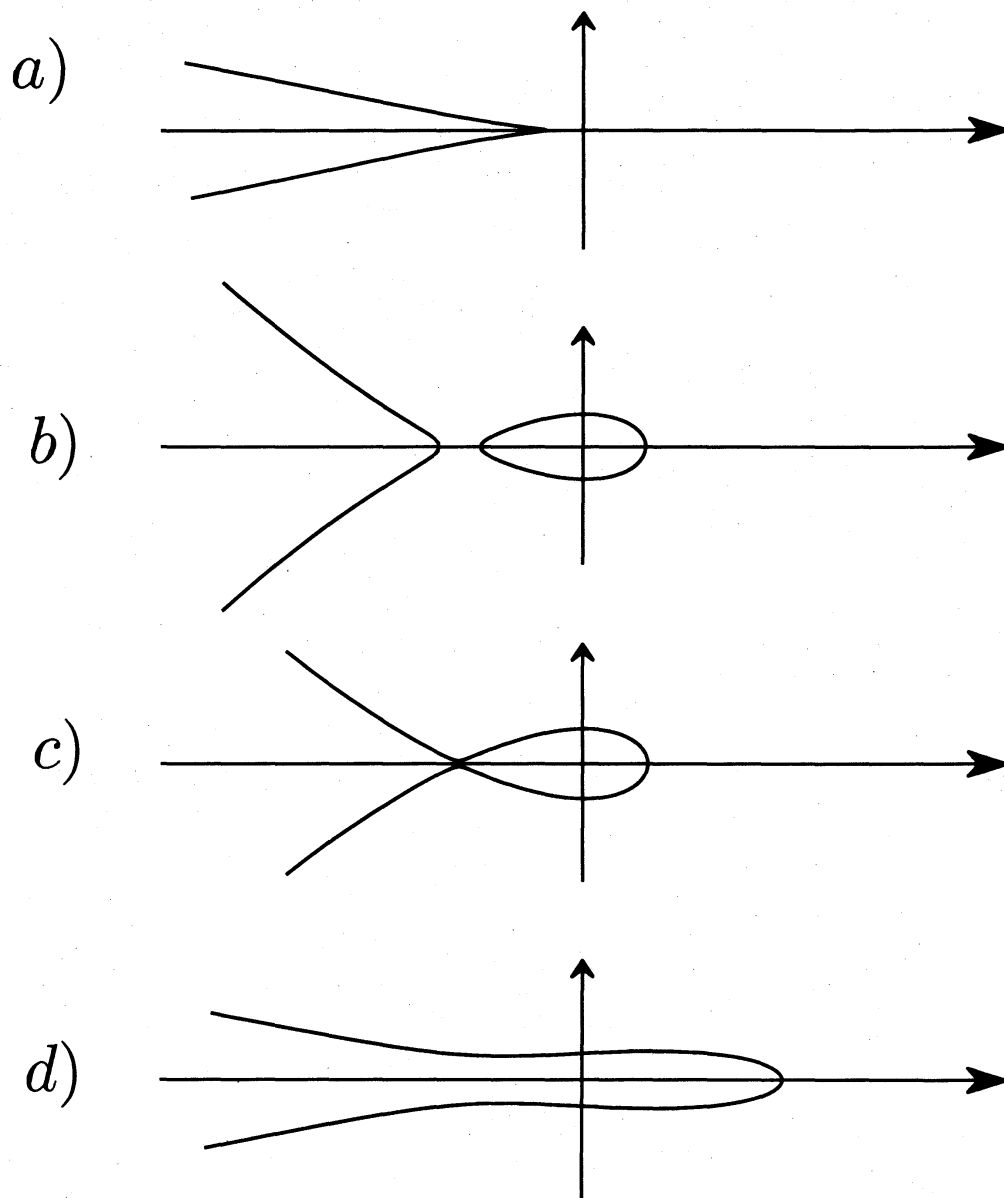


図 10：モード (2,3) の 2 次分岐点近くの分岐の変遷. a) $p = 1.2$, b) $p = 1.20003$, c) $p = 1.200033$, d) $p = 1.22$. 縦軸は $\sin 3\sigma$ の係数を表し, 横軸は $\sin 2\sigma$ の係数を表す.

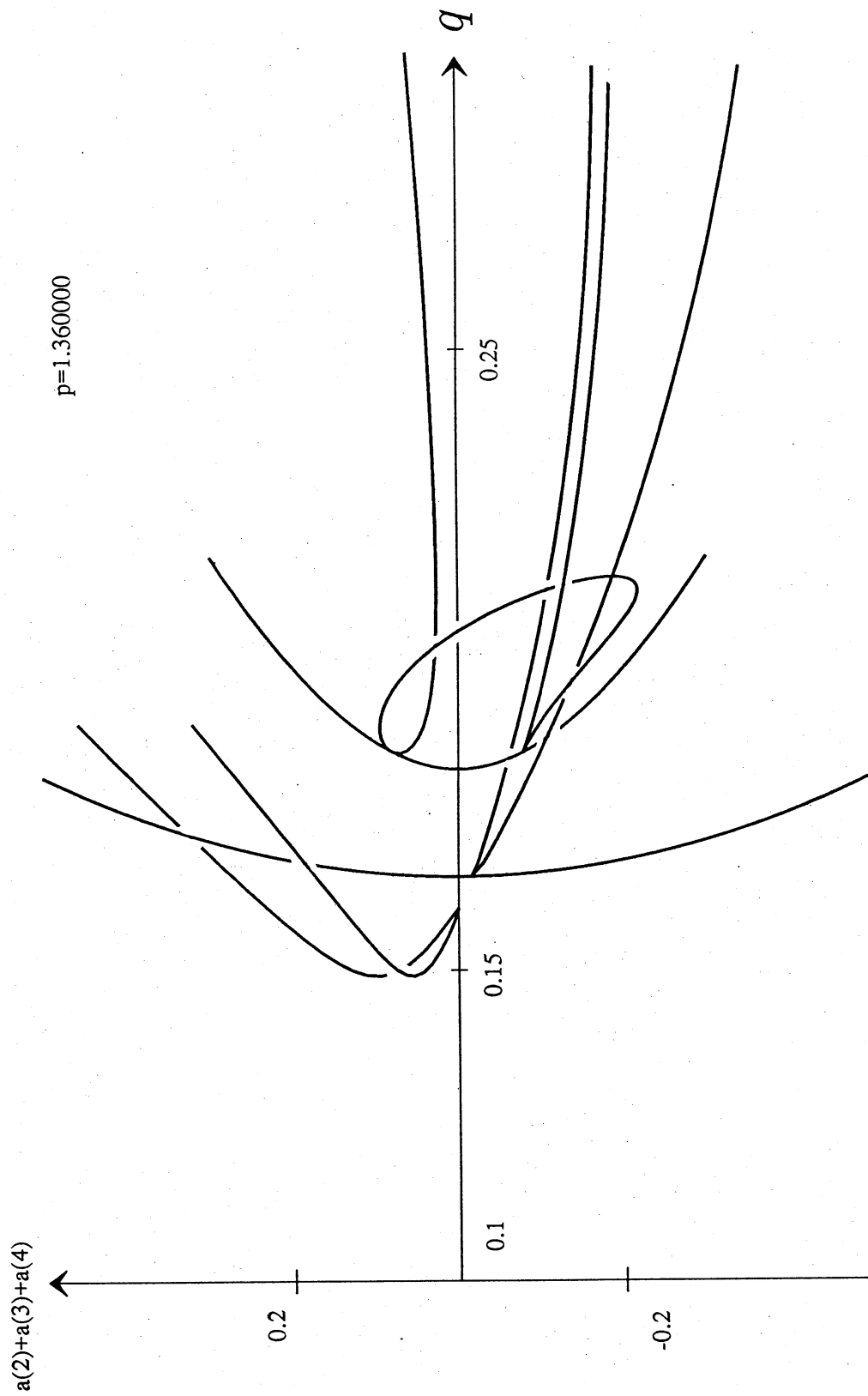


図 11 : $p = 1.36$ のときの分岐図式. 3 次分岐が存在する.

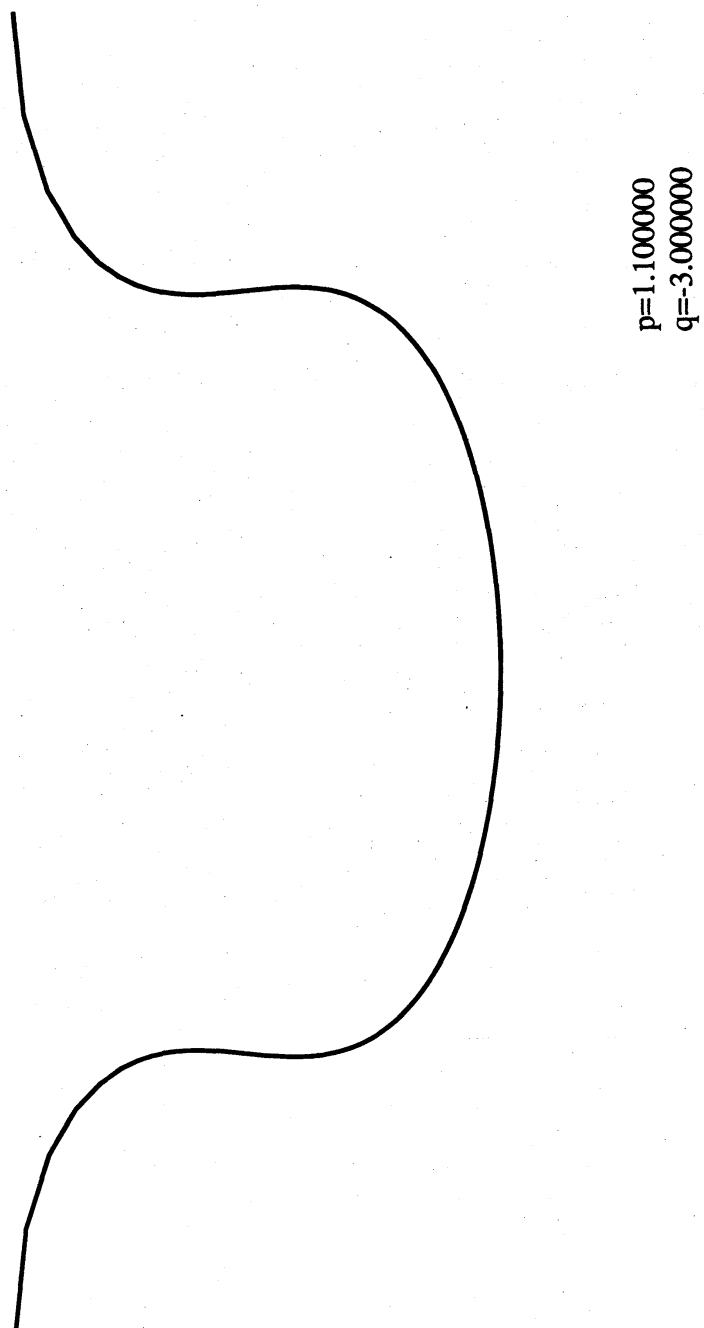


図 12： 表面張力が負の進行波. $p = 1.1, q = -3.0$.