

Jaynes-Cummingsモデルの量子力学的チャネル

古市 茂 (山口東京理科大学 基礎工学部)

E-mail: furuichi@ed.yama.sut.ac.jp

通信過程や非可逆過程などの物理過程は状態変換としてとらえることができる。ここでは、状態変換を表す量子力学的チャネル [2] を用いて Jaynes-Cummings モデル (J.C.M.) [1] を記述する。J.C.M. のハミルトニアンは次のように書かれる。

$$H = H_A + H_F + H_I, H_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, H_F = \hbar\omega_0 a^* a, H_I = \hbar g(a \otimes \sigma^+ + a^* \otimes \sigma^-) \quad (1)$$

ここで、 g は原子と場の結合定数、 $\sigma^\pm$ は二準位原子の擬スピン演算子であり、

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma^+ = |2\rangle\langle 1|, \sigma^- = |1\rangle\langle 2|, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a は消滅作用素である。ここで、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_F$ はそれぞれ原子と場の系を表し、 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_F$ の初期状態をそれぞれ $\rho \in \mathfrak{S}_A, \omega \in \mathfrak{S}_F$ で表す。今、原子の初期状態を上準位と下準位の重ね合わせとする：

$$\rho = \mu_1^{(0)} E_1 + \mu_2^{(0)} E_2 \in \mathfrak{S}_A$$

但し、 $E_1 = |1\rangle\langle 1|, E_2 = |2\rangle\langle 2|, \mu_1^{(0)} + \mu_2^{(0)} = 1$ 。また、場の初期状態を光子数固有状態の任意の重ね合わせとする：

$$\omega = |\varphi\rangle\langle\varphi| \in \mathfrak{S}_F, \quad |\varphi\rangle = \sum_n w_n |n\rangle$$

さらに、リフティング [3] $\mathcal{E}_t^*$ と量子力学的チャネル Λ_t^* を次のように定める。

$$\mathcal{E}_t^* : \mathfrak{S}_A \longrightarrow \mathfrak{S}_A \otimes \mathfrak{S}_F, \quad \Lambda_t^* : \mathfrak{S}_A \longrightarrow \mathfrak{S}_A$$

このとき、原子と光が相互作用した後の状態 $\mathcal{E}_t^* \rho \in \mathfrak{S}_A \otimes \mathfrak{S}_F$ は次のように表される。

$$\mathcal{E}_t^* \rho = U_t (\rho \otimes \omega) U_t^*.$$

そして、量子力学的チャネル Λ_t^* はこのリフティングを用いて次のように与えられる。

$$\Lambda_t^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_F} \mathcal{E}_t^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_F} U_t (\rho \otimes \omega) U_t^*.$$

この量子力学的チャネルは時間 t における原子の終状態を表している。今、全系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_F$ のハミルトニアンは形 (1) より、

$$[H_A + H_F, H_I] = 0$$

が成り立つ。この関係式により、系の時間発展は、次のように定まる。

$$U_t = \exp(-itH/\hbar) = \exp(-it(H_A + H_F)/\hbar) \exp(-itH_I/\hbar). \quad (2)$$

ここで、以下の着衣の状態 $|\Phi_j^{(n)}\rangle (j = 0, 1)$ ：

$$|\Phi_j^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n \otimes 2\rangle + (-1)^j |n+1 \otimes 1\rangle)$$

を使うと, $j = 0, 1$ に対して, 次のような固有方程式が成り立つ.

$$(H_A + H_F) |\Phi_j^{(n)}\rangle = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) |\Phi_j^{(n)}\rangle \quad (3)$$

さらに,

$$\langle \Phi_0^{(n)} | \Phi_1^{(n)} \rangle = \langle \Phi_1^{(n)} | \Phi_0^{(n)} \rangle = 0, \|\Phi_j^{(n)}\| = 1 \quad (j = 0, 1)$$

が成り立つので, (3) 式は次のように書ける.

$$H_A + H_F = \sum_{n=0}^{\infty} (H_A^{(n)} + H_F^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}|.$$

従って,

$$\exp(-it(H_A + H_F)/\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \exp\left[-it\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}|. \quad (4)$$

同様に,

$$\exp(-itH_I/\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \exp\left[-it(-1)^j \Omega_n\right] |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}|. \quad (5)$$

但し, $\Omega_n = g\sqrt{n+1}$ である. この Ω_n はラビ振動数とよばれ, 結合定数 g と光子数 n からなる. 従って異なる光子数の状態に対してラビ振動数 Ω_n は異なる値をもつ. ユニタリー作用素は, (2), (4), (5) より次のように書ける.

$$U_t = \exp(-itH/\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 E_{n,j} |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_j^{(n)}|$$

但し, $E_{n,j} = \exp\left[-it\left\{\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) + (-1)^j \Omega_n\right\}\right]$. 従って, このユニタリー作用素から, J.C.M. の量子力学的チャネル (原子の終状態) は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Lambda_t^* \rho &= \text{tr}_{\mathcal{H}_F} \mathcal{E}_t^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_F} U_t (\rho \otimes \omega) U_t^* \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^1 E_{n,j} E_{m,i}^* \langle \Phi_j^{(n)} | \rho \otimes \omega | \Phi_i^{(m)} \rangle \text{tr}_{\mathcal{H}_F} |\Phi_j^{(n)}\rangle \langle \Phi_i^{(m)}| \end{aligned}$$

簡単な計算により, 量子力学的チャネル (原子の終状態) は次のように表現できる.

$$\Lambda_t^* \rho = \left(\mu_1^{(0)} \tilde{c}_1(t) + \mu_2^{(0)} \tilde{s}_0(t)\right) E_1 + \left(\mu_1^{(0)} \tilde{s}_1(t) + \mu_2^{(0)} \tilde{c}_0(t)\right) E_2$$

ただし, $\tilde{c}_i(t), \tilde{s}_i(t)$, ($i = 0, 1$) は光子数確率分布 $P(n) \equiv |\langle n | \varphi \rangle|^2$ を使って次のように与えられる.

$$\tilde{c}_i(t) = \sum_n P(n+i) \cos^2 \Omega_n t, \tilde{s}_i(t) = \sum_n P(n+i) \sin^2 \Omega_n t.$$

この量子系の状態変換を表す量子力学的チャネルを用いることによって量子状態 (密度作用素) に対して定義された von Neumann エントロピーや量子相互エントロピー [2] の計算が可能になる. また, それらを通してこのモデルに対する情報理論的解釈を与えることができると思われる.

参考文献

- [1] E.T.Jaynes and F.W.Cummings, Proc.IEEE, **51**, 89(1963).
- [2] M.Ohya, IEEE Trans.Inf.Theory, **29**, 770(1983).
- [3] L.Accardi and M.Ohya, "Compound channels, transition expectations and lifing", to appear in Journal of Applied Mathematics and Optimization.