

閉曲面上の閉曲線群について

上智大 理工 寺阪英孝

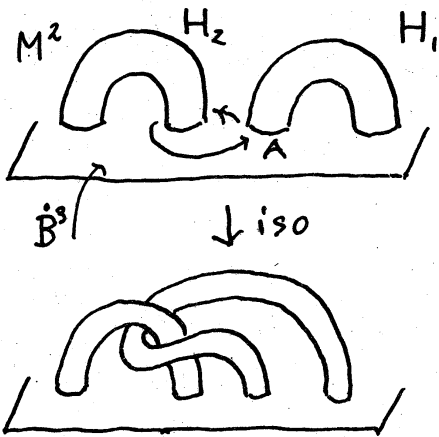
M^2 は genus n (≥ 2) の閉曲面 (2次元多様体) とし,
 M^2 を M^2 自身上に移す homeomorphism (以下 homeo
 と略す) を h とする. 与えられた h を, 以下で述べる
 基本的ないくつかの homeo の積として表わせるか, という
 問題を一つのめどとして, isotopy と homeo との関係,
 h の homology base による表現 matrix の諸性質,
 conjugate pair はなっている曲線群と matrix との関
 係, これらの応用, などについて述べる. 別に目新らしい
 事実はないが, 何かのお役に立てば幸である.

§1.

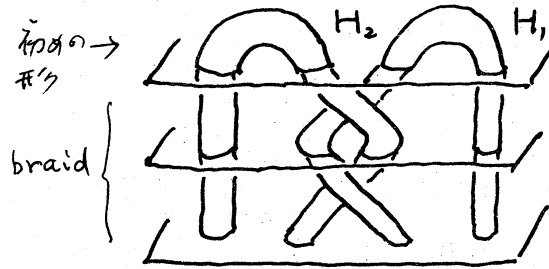
M^2 は, E^3 内の球体 ball B^3 に n (≥ 2) 個の柄 (handle) H_i をつけた 3次元体 M^3 の境界 $M^2 = \partial M^3$ とし,
 E^3 内で標準的な形で実現しているものと考え. M^3
 の柄を B^3 の表面上でよけず isotopy なく, M^2 の基本的
 と思われる homeo を求めるつもりなので, その図形的な表
 示をまず与える.

(i) “くく”変換

柄 H_1 を B^3 上で動かし, H_2 の下をくぐって元に戻る

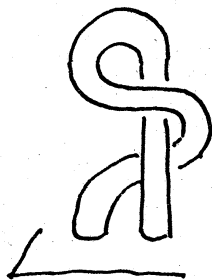
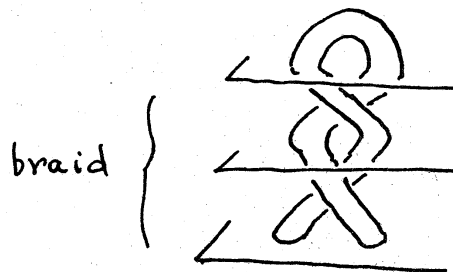
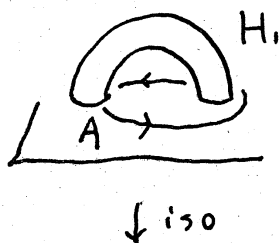


E^3 の ambient isotopy を考える。これは右図のように, H_1, H_2



の両足を延ばして行く図を画くと, 動きがよく分る。右図は組み紐 (braid) の形になっているのに注意。

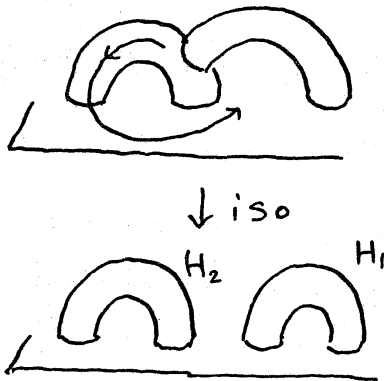
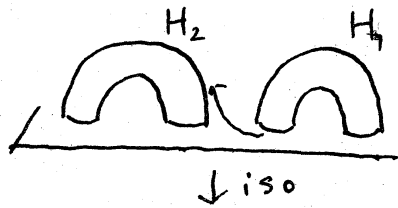
(ii) “ぬける”変換



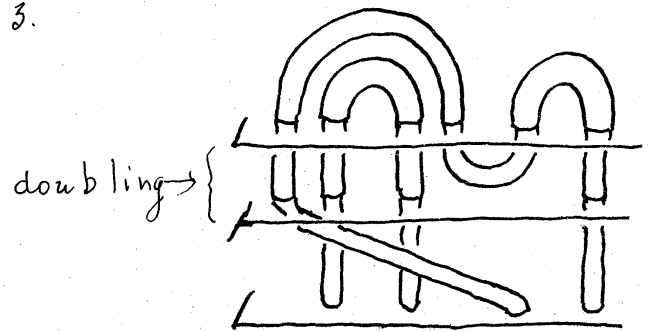
左図のように自身の周りを周るとき柄は必ずしもぬけるわけではないが, ぬけることもできる。柄を B^3 上では動かさずにはぬけるのは, 次の δ で考える。

(iii) “ねじる” 変換

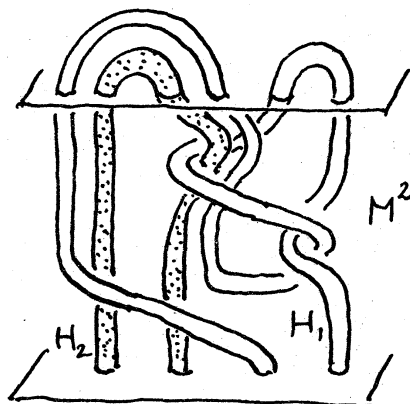
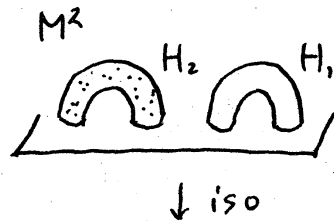
H_1 を H_2 を超えて, お互元に戻す ambient isotopy がある.



ある段階で H_2 の double をつくり, H_1 とつながるとして, H_1 が H_2 を超えることが右図で表わされる.

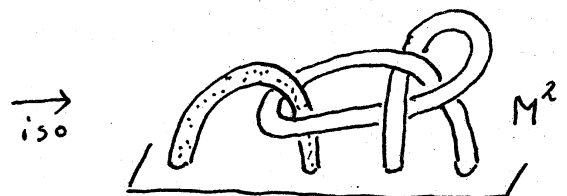


以上の種の isotopy を組合せると, 例えば左図から下の



右図のように, M^2 は一見絡み合, ていそうに見えるものの isotopy して移れることが分かる.

図1 braid theory との関係如何.



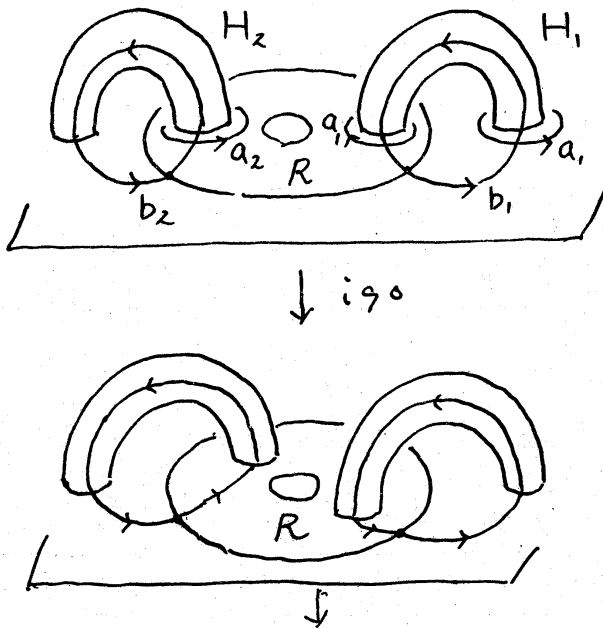
§ 2.

M^2 の iso と homeo. Homology base の変換

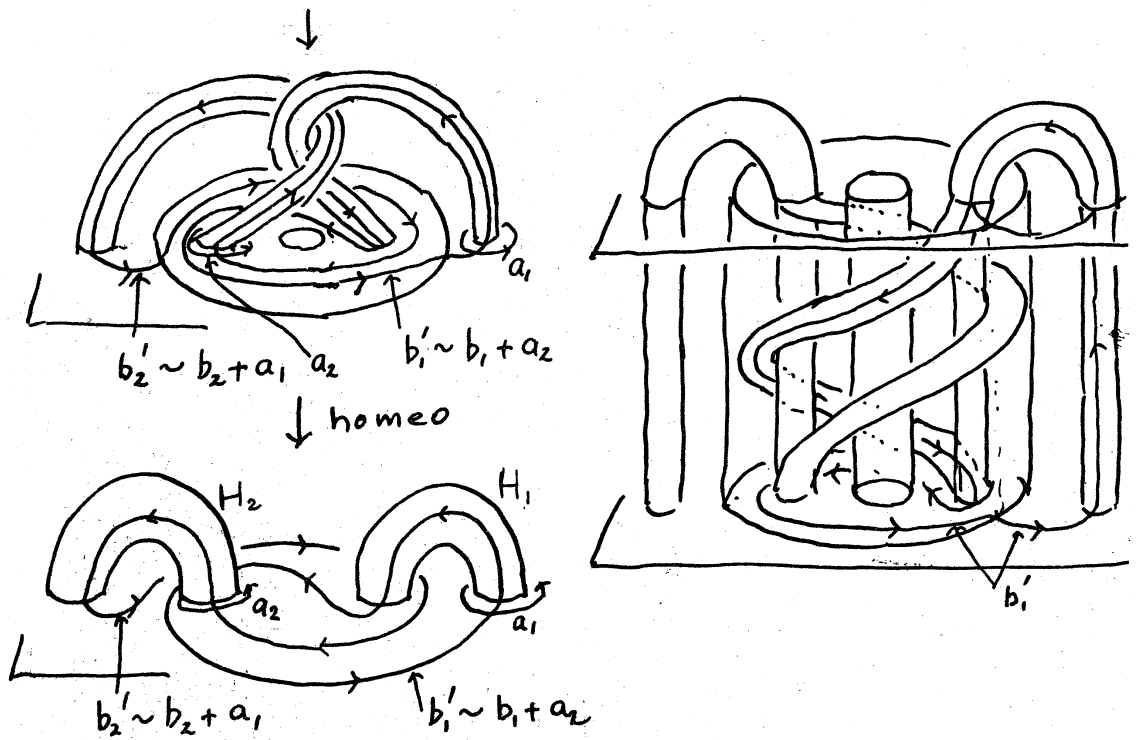
M^2 の homology base を仮りに $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ で表わす. このうち, a_i は M^3 内に円盤が張れるものとする.

§1 で考えた "くぐる", "ぬける", "ぬける" はいずれも最後に handle 上の homeo を実現することになる. M^2 から M^2 自身への homeo になることがわかる. この homeo を今後, "くぐる", "ぬける", "ぬける" homeo と呼ぶことにし, この § ではこのような homeo により (a_i, b_i) がどう変化するかを調べる. 便宜上, H_i, H_j 間ではなく, H_i, H_k の対にだけだけ考えることにする.

(i) "くぐる".



H_1, H_2 の片足だけを含む環状領域 R を作り, その周を 2π 外部は不動とし, 内部だけの isotopy で足を一周させて元に戻す. 足だけの運動は次の如く具体的に画ける

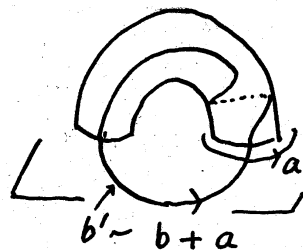


左上図は最終 σ , $=$ 此から homeo して, τ 絡み合 σ をと
 , 大の σ γ a 下の図. $\tau = \tau(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ から (a'_1, b'_1)
 (a'_2, b'_2) に移る σ とす σ は, " $\ll$ " σ は

$$a'_1 \sim a_1, \quad b'_1 \sim b_1 + a_2$$

$$a'_2 \sim a_2, \quad b'_2 \sim b_2 + a_1.$$

(ii) "収める"



$=$ 此は2頁の図 τ 式左図 τ して $\ll$.

(a, b) から (a', b') に移る σ は

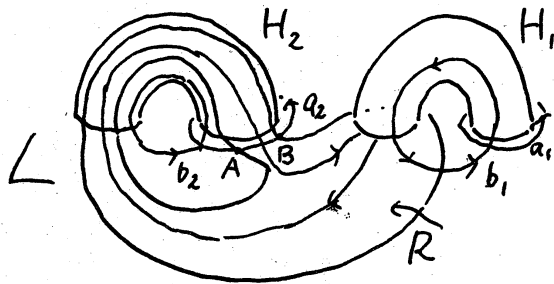
$$a' \sim a, \quad b' \sim b + a$$

となる.

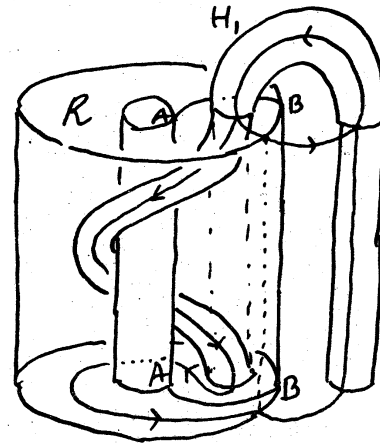
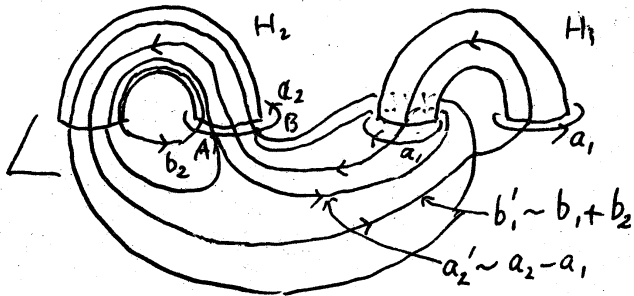
(iii) "わたる".

H_1 の足を含み H_2 を渡る環状領域 R の中での isotopy を

行い、この isotopy の



↓ iso



(左の立体図)

とき、 a_2 上の弧 AB は H_1 の足を囲む弧に変わることに注意。

すると、 $M^2 \rightarrow M^2$ の homeo τ' は

$$a'_1 \sim a_1, \quad b'_1 \sim b_1 + b_2$$

$$a'_2 \sim a_2 - a_1, \quad b'_2 \sim b_2$$

となることが分る。

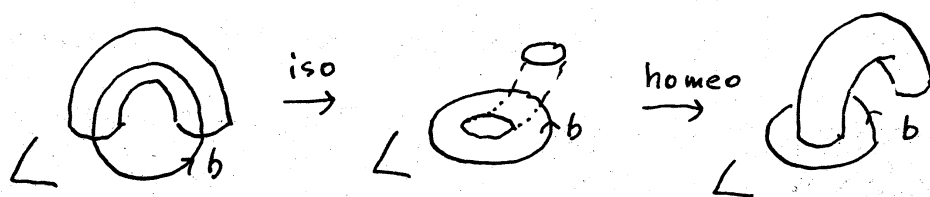
(iv) 柄の "反転".

$\S 2$ では考えなか、たか、これは次の d 変換である。

handle を今、歩道橋と考えたとき、これを地下道に改めて

車を通らせ、更に地下道を車の通る陸橋にかえたとする。 =

の交点数がある。



§3.

共役系 conjugate system と skew orthogonal matrix M^2 の base $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ を改め $(e_1, e_2), \dots, (e_{2i-1}, e_{2i}), \dots, (e_{2n-1}, e_{2n})$ と書く。

M^2 上の cycle (閉曲線) α, β の homological の交点数を $l(\alpha, \beta)$ と書くと, 基本 cycle e_i 同士の交点数は

$$(1) \begin{cases} l(e_{2i-1}, e_{2i}) = -l(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1 \\ l(e_\lambda, e_\mu) = 0 \quad (\lambda, \mu \text{ が他の組合せのとき}) \end{cases}$$

だから, 以後 homology を $\sim$ で $\alpha \sim \tau \alpha$ と表わすと

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^{2n} e_{2n} \\ \beta &= b^1 e_1 + b^2 e_2 + \dots + b^{2n} e_{2n} \end{aligned} \right\} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta) &= a^1 b^2 l(e_1, e_2) + a^2 b^1 l(e_2, e_1) + \dots \\ &= (a^1 b^2 - a^2 b^1) + \dots \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^3 & a^4 \\ b^3 & b^4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a^{2n-1} & a^{2n} \\ b^{2n-1} & b^{2n} \end{vmatrix}$$

よって

$$(2) \quad \begin{cases} \beta = b^1 e_1 + b^2 e_2 + \dots + b^{2n-1} e_{2n-1} + b^{2n} e_{2n} \\ \tilde{\beta} = b^2 e_1 - b^1 e_2 + \dots + b^{2n} e_{2n-1} - b^{2n-1} e_{2n} \end{cases} \quad \text{12.5.1}$$

たゞ $\tilde{\beta} \in \frac{1}{i} \lambda$ であるから、 $l(\alpha, \beta)$ は scalar product $\alpha \tilde{\beta}$:

$$(3) \quad \alpha \tilde{\beta} = l(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^3 & a^4 \\ b^3 & b^4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a^{2n-1} & a^{2n} \\ b^{2n-1} & b^{2n} \end{vmatrix}$$

と仮定する、 $\alpha \tilde{\beta} = -\beta \tilde{\alpha}$ であるから、 $\alpha \tilde{\beta}$ は α と β の skew scalar product である、 $\alpha \tilde{\beta} = 0$ のとき、 α と β は skew orthogonal である、

homeo $h: M^2 \rightarrow M^2$ として $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ に移す、 h と h^{-1} は $l(\alpha_\lambda, \alpha_\mu) = l(e_\lambda, e_\mu)$ である、
(1) である、

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_{2i-1} \tilde{\alpha}_{2i} = 1 \\ \alpha_\lambda \tilde{\alpha}_\mu = 0 \quad (\text{他の場合}) \end{cases}$$

$\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}$ は conjugate pair である、

homeo h は matrix で表現すると

	e_1	e_2	e_3	e_4		e_{2n-1}	e_{2n}
α_1	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_1^4		a_1^{2n-1}	a_1^{2n}
α_2	a_2^1	a_2^2	a_2^3	a_2^4	...	a_2^{2n-1}	a_2^{2n}
α_3	a_3^1	a_3^2	a_3^3	a_3^4		a_3^{2n-1}	a_3^{2n}
α_4	a_4^1	a_4^2	a_4^3	a_4^4		a_4^{2n-1}	a_4^{2n}

$h^{-1} h^{-1}$

e_λ

$\downarrow h$

$$\alpha_\lambda = \sum_{p=1}^{2n} a_\lambda^p e_p$$

(2), (3), (4) の次のような matrix の積を計算すると

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \dots & e_{2n} \\ \hline a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & \dots & a_1^{2n} \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \dots & a_2^{2n} \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & \dots & a_3^{2n} \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & \dots & a_4^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \begin{array}{c|c} \tilde{\alpha}_2 & -\tilde{\alpha}_1 \\ \hline a_2^2 & -a_1^2 \\ -a_2^1 & a_1^1 \\ a_3^2 & -a_1^4 \\ -a_2^3 & a_1^4 \\ \vdots & \vdots \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c|c} \tilde{\alpha}_2 & -\tilde{\alpha}_1 \\ \hline \alpha_1 \tilde{\alpha}_2 & -\alpha_1 \tilde{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \tilde{\alpha}_2 & -\alpha_2 \tilde{\alpha}_1 \\ \alpha_3 \tilde{\alpha}_2 & -\alpha_3 \tilde{\alpha}_1 \\ \alpha_4 \tilde{\alpha}_2 & -\alpha_4 \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots & \vdots \end{array} \\
 & = 1 \text{ (単位 matrix)}
 \end{aligned}$$

(a_λ^{μ}) を skew orthogonal matrix とし、 $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ を full conjugate system とし、

定理 1. 基本の full conjugate system $e_1, \dots, e_{2n}$ を homeo h を移したものを $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ とすれば、これは skew orthogonal matrix を表現する。

上の matrix の計算は次の小行列は有効である。

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき } \tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$(7) \quad A \tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} \text{ となる、これを便にと}$$

補題 1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ならば

$$(AB)^{\sim} = \tilde{B} \tilde{A}. \quad \square$$

$$\xi = \tau \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{2i-1}^{2j-1} & a_{2i-1}^{2j} \\ a_{2i}^{2j-1} & a_{2i}^{2j} \end{pmatrix} \quad a \text{ と } \xi$$

$$A = (A_{ij}) \quad \text{に } \tilde{A} = (\tilde{A}_{ji}) \text{ とすれば}$$

(5) は

$$(8) \quad A \tilde{A} = (A_{ij})(\tilde{A}_{ji}) = \left(\sum A_{ip} \tilde{A}_{pj} \right) = 1. \quad \text{即ち}$$

(9) $A = (A_{ij})$ が skew orthogonal とは (8) の成り立つることを示す。

これを適用すると容易に

定理 2. $A, B = (B_{ij})$ が skew orthogonal ならば
 AB は skew orthogonal である。□

§4

Skew orthogonal system の作り方

$e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ を単位 vector とする実 vector 空間を V^{2n} とする。

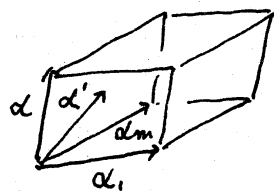
$m (\leq 2n)$ 個の一次独立な整数 vector $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ がある linear subspace $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 上のどの integer vector ξ も、整数係数 $x_1, \dots, x_m$ により

$$\xi = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m$$

で表わせるとき、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を素一次独立、略して 素独立 とし、すると明らか (* primely independent)

(10) 整数 vector $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が一次独立で, α のうち $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が素独立ならば, $\alpha' \in L(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ を適当に定めると $L(\alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_m) = L(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ であり $\alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_m$ は素独立であるようにできる。

($\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ からできる超平行多面体中に $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ に最も近い vector α' を採ればよい。) (10) から容易に



定理 3. 整数 vector $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ について次の四つは同値である:

- (i) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は素独立である。
- (ii) $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2n}$ を求めて $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ が素独立であるようにできる。(このとき (iii) が成立つ)
- (iii) $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2n}$ を求めて $\det |\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}| = 1$ であるようにできる。(このとき (ii) が成立つ)
- (iv) matrix $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ のすべての m 次の部分行列式は最大公約数が 1 である。□

これより

定理 4. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{2i-1}$ ($1 \leq i \leq n$) が (i) 且 $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ を加えて, $\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}$ が conjugate pair

τ であるような full conjugate system $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$

を構成することが出来る。

(証) 条件 (ii) から定理 3 (iii) 及び (iv) により

α_1	$a_1^1 \ a_1^2 \ a_1^3 \ a_1^4 \ \dots \ a_1^{2n}$
α_2	$a_2^1 \ a_2^2 \ a_2^3 \ a_2^4 \ \dots \ a_2^{2n}$
α_3	$a_3^1 \ a_3^2 \ a_3^3 \ a_3^4 \ \dots \ a_3^{2n}$
α_4	$a_4^1 \ a_4^2 \ a_4^3 \ a_4^4 \ \dots \ a_4^{2n}$
$\vdots$	$\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \dots \ \vdots$

$$(11) \quad \det |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \dots \ \alpha_{2n}| = 1$$

τ であるような $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ が求まる。すると (11) から

$$(12) \quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^{2n} x_{2n} = 1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^{2n} x_{2n} = 0 \\ \vdots \\ a_{2n}^1 x_1 + a_{2n}^2 x_2 + \dots + a_{2n}^{2n} x_{2n} = 0 \end{cases}$$

を満たす $x_1, \dots, x_{2n}$ がただ一つだけ存在する。 $\xi = \tau$

$$\xi = -x_2 e_1 + x_1 e_2 - x_4 e_3 + x_3 e_4 - \dots + x_{2n-1} e_{2n} \text{ と表わす}$$

$$\tilde{\xi} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{2n} e_{2n}$$

したがって, (12) を書き直すと

$$(13) \quad \alpha_1 \tilde{\xi} = 1, \quad \alpha_2 \tilde{\xi} = 0, \quad \alpha_3 \tilde{\xi} = 0, \quad \dots \quad \alpha_{2n} \tilde{\xi} = 0$$

i) $\tau = \tau' \in \mathcal{L}$

$$\xi = y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_3 + \dots + y_i \alpha_{2i-1} \quad \text{と, したがって, } \tilde{\alpha}_1$$

をかける、(13) および (3), (4) から $\xi \tilde{\alpha}_1 = 0$ 即ち

$-1=0$ の矛盾。故に $\xi, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ は一次独立。

ii) 次に $L(\xi, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1})$ から ξ' を求めて、 $\xi', \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ が素独立であるように α_2 を定める。

$$\xi = x\xi' + a_1\alpha_1 + a_3\alpha_3 + \dots + a_i\alpha_{2i-1}$$

に代る、両辺に $\tilde{\alpha}_1$ をかけると (13) から

$$-1 = x\xi'\tilde{\alpha}_1, \quad \therefore x = \pm 1$$

$$\therefore \pm \xi' = \xi - (a_1\alpha_1 + \dots + a_i\alpha_{2i-1})$$

$$\therefore L(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}, \xi') = L(\alpha_1, \dots, \alpha_{2i-1}, \xi)$$

故に $\xi, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ は素独立。従って $\alpha_2 = \xi$

とおけば (13) から $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ から (i)

$\alpha_1\tilde{\alpha}_2 = 1$ の外は skew orthogonal, (ii) 素独立になる。

以下同様にして $\alpha_4, \alpha_6, \dots, \alpha_{2i}$ を定め、

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{2i-1}, \alpha_{2i} \quad \text{に於いて}$$

$\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}$ は conjugate pair, 他は互いに skew orthogonal, 全体として素独立であるようにする。

このとき、 $i < n$ ならば、 $\alpha_1, \dots, \alpha_{2i}$ が素独立である

と仮して $\alpha_{2i+1}, \dots, \alpha_{2n}$ を求めて $\alpha_1, \dots, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \dots$

α_{2n} が素独立であるようにする。 $\xi = \alpha_{2i+1}$ とする。

$$\alpha_{2n+1} = (-\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_2)\alpha_1 + (\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_1)\alpha_2 + \dots + (\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_{2i-1})\alpha_{2i} + \alpha_{2i+1}$$

とおけば、 $\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_1 = 0, \dots, \alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_{2i} = 0$ となる。

今 α_i と同様な条件が満たされてゐる α_i α_{2i+2} があつて、

従つて full conjugate system があつて、 $\square$

この定理と其の証明から、次の一般の定理が導かれる：

定理 5. (i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}$ は $\alpha_{2\lambda-1}, \alpha_{2\lambda}$ が conjugate pair であり、(ii) 他の組合せは skew orthogonal (iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}, \alpha_{2m+3}, \dots, \alpha_{2m'+1}$ は素独立なものは、これを full conjugate system $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ として拡大する。 ($n=0$ $m=0, m'=0, m=m'=0$ であるとき、 $n=0$) $\square$

§5

基本 homeo の matrix

(i) “<<” は、 H_i から H_j へ “<<” (逆と同じ) 向きの “変換”

$e_1, e_2, \dots, e_{2i-1}, e_{2i}, e_{2j-1}, e_{2j}, \dots$ ($\varepsilon = \pm 1$) と、右の “変換” とを考慮すると、

	e_1, e_2	e_{2i-1}, e_{2i}	e_{2j-1}, e_{2j}	...
α_1	1			
α_2		1		
α_{2i-1}			1	ε
α_{2i}			(ε)	
α_{2j-1}		ε	1	
α_{2j}		(ε)		1

(空白は 0)

(ε 或 (ε) かつ ε は 0)

と考慮すると、

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1} + \varepsilon e_{2j}, & \alpha_{2i} = e_{2i} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1} + \varepsilon e_{2i}, & \alpha_{2j} = e_{2j} \end{cases}$$

又は ($\varepsilon = \pm 1$)

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1}, & \alpha_{2i} = e_{2i} + \varepsilon e_{2j-1} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1}, & \alpha_{2j} = e_{2j} + \varepsilon e_{2i-1} \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

matrix は左の通り。

(ii) "収める" は次の二通りを考える。

	e_{2i-1}	e_{2i}
α_{2i-1}	/	
α_{2i}	(ε)	/

$$\alpha_{2i-1} = e_{2i-1} + \varepsilon e_{2i}, \quad \alpha_{2i} = e_{2i} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

または

$$\alpha_{2i-1} = e_{2i-1}, \quad \alpha_{2i} = e_{2i} + \varepsilon e_{2i-1} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

($\varepsilon, (\varepsilon)$ のどちらかは 0)

(iii) "巾たる" は次の二通りを考える。

	e_{2i-1}	e_{2i}	e_{2j-1}	e_{2j}
α_{2i-1}	/			
α_{2i}		/		
α_{2j-1}	(ε)		/	
α_{2j}		ε		/

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1} - \varepsilon e_{2j-1}, & \alpha_{2i} = e_{2i} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1}, & \alpha_{2j} = e_{2j} + \varepsilon e_{2i} \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1}, & \alpha_{2i} = e_{2i} - \varepsilon e_{2j} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1} + e_{2j}, & \alpha_{2j} = e_{2j} \end{cases}$$

(空欄は 0) ($\varepsilon, -\varepsilon$) か ($(\varepsilon), (\varepsilon)$) のどちらかは 0. ($\varepsilon = \pm 1$)

すぐ確かめられるように

定理 6 "くくる", "収める", "巾たる" の matrix はすべて

skew orthogonal である。□

いま簡単のため $n=2$ の場合について "くくる", "収める", "巾たる" の homeo を考えこみると, 空欄は 0 と 1 である。

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} / & \varepsilon \\ \hline & / \end{array} \right) = A^{\varepsilon}, & \left(\begin{array}{c|c} / & \varepsilon \\ \hline -\varepsilon & / \end{array} \right) = B^{\varepsilon 0}, & \left(\begin{array}{c|c} / & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & / \end{array} \right) = B^{0\varepsilon} \\ \left(\begin{array}{c|c} / & \\ \hline \varepsilon & / \end{array} \right) = A_{\varepsilon 1}, & \left(\begin{array}{c|c} / & \varepsilon \\ \hline -\varepsilon & / \end{array} \right) = B_{0\varepsilon}, & \left(\begin{array}{c|c} / & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & / \end{array} \right) = B_{\varepsilon 0} \end{cases}$$

$$(14) \left(\begin{pmatrix} ' & ' & ' & \varepsilon \\ & & & \end{pmatrix} = D'^\varepsilon, \begin{pmatrix} ' & ' & ' & \varepsilon \\ & & & \varepsilon \end{pmatrix} = D_{\varepsilon 1} \right) \text{ の 8 種 がある.}$$

すると elementary 変換

$$(15) B^{\varepsilon\varepsilon} D_{11} D'^{-1} B^{\varepsilon\varepsilon} D'' D_{11} = 1 \quad \therefore \begin{cases} B^{\varepsilon\varepsilon} = D_{11} D'^{-1} B^{\varepsilon\varepsilon} D'' D_{11} \\ B^{\varepsilon\varepsilon} = D'' D_{11} B^{\varepsilon\varepsilon} D_{11} D'^{-1} \end{cases} \text{ (dual)}$$

$$B_{\varepsilon\varepsilon} D'' D_{11} B_{\varepsilon\varepsilon} D_{11} D'^{-1} = 1 \quad \therefore \begin{cases} B_{\varepsilon\varepsilon} = D'' D_{11} B_{\varepsilon\varepsilon} D_{11} D'^{-1} \\ B_{\varepsilon\varepsilon} = D_{11} D'^{-1} B_{\varepsilon\varepsilon} D'' D_{11} \end{cases} \text{ (dual)}$$

即ち

定理 7. "収める" かつ "わたる" $\Leftrightarrow$ "くぐる". $\square$

さて, "収める", "わたる" は skew orthogonal matrix を表わせるから, 定理 2 を用いると, 次の定理が証明できる:

定理 8. Skew orthogonal matrix は "わたる", "収める" の両 skew orthogonal matrix の積で表わせる.

(証) e_1, e_2, e_3, e_4

α_1	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_1^4
α_2	a_2^1	a_2^2	a_2^3	a_2^4

$\rightarrow$ は "収める" matrix $A'^\varepsilon, A_{\varepsilon 1}$ ((14) 参照) に ε, τ

α_1	d_1	0	d_2	0
α_2	*		*	

$\leftarrow$ は直交. $d_i = (a_1^{2i-1}, a_1^{2i})$
 τ $(d_1, d_2, \dots, d_n) = 1$ かつ
 $B^{\varepsilon\varepsilon}, B_{\varepsilon\varepsilon}$

α_1	1	0	0	0
α_2	a_2^1	a_2^2	*	*

$\leftarrow$ は直交.
 すると

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_2^1 & 1 & * & \\ \hline \end{array}$$

$$1 = \alpha_1 \tilde{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ * & \end{vmatrix} + \dots$$

$$\therefore a_2^2 = 1$$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & a_2^3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

← 上 matrix は A_{el} として左に

なる. $(a_2^1 = 0, a_2^2 = 0)$. $\therefore \tau$

$d_2 = (a_2^3, a_2^4)$, etc. $\therefore$ 上は $B_{\varepsilon 0}$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_3^1 & a_3^2 & * & \\ \hline a_4^1 & a_4^2 & & \\ \hline \end{array}$$

← τ , 左になる*) すると $\lambda \geq 3$ となる

$$(i) \quad 0 = \alpha_1 \tilde{\alpha}_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_\lambda^1 & a_\lambda^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_\lambda^3 & a_\lambda^4 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\therefore a_\lambda^2 = 0$$

$$(ii) \quad 0 = \alpha_2 \tilde{\alpha}_\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_\lambda^1 & a_\lambda^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_\lambda^3 & a_\lambda^4 \end{vmatrix} + \dots$$

$\therefore a_\lambda^1 = 1$. 従って、左の形を得られる。

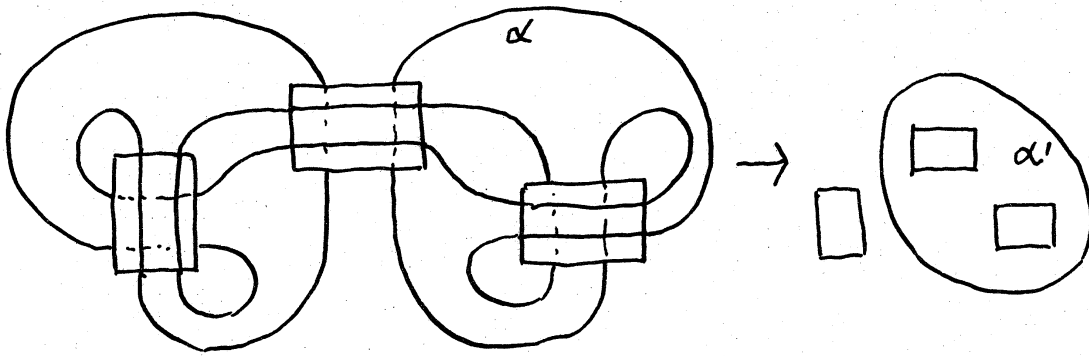
以下同様にして 1 が得られる。□

*) 便宜上 $B_{\varepsilon 0}$ ($< < <$) を用いたが、定理 9 によつて、 τ “収める” と “収められる” の置き換えられる。

定理 9. $homeo$ は homological に “収める” “収められる” (または “<<<” “収める”) の積として表わすことができる。□

問 2 τ の系は homotopical に成立するかどうか。

図3 単一閉曲線 α が ~ 0 のとき, M^2 上の基本変形
 くぐる, ゆいる, ゆたると α を, handle を "ゆた
 うたり, くぐり, たうりしない" α' に変形できるか?



($\square$ は handle を上から見た図) (この図は演習問題)

今までのことから M^2 上の conjugate pair になる閉曲線
 について種々のことがわかるが, そのうちの次の定理がある

定理 (金子哲夫氏) $\alpha = a_1 e_1 + \dots + a_{2n} e_{2n}$ と $\sim$ する M^2

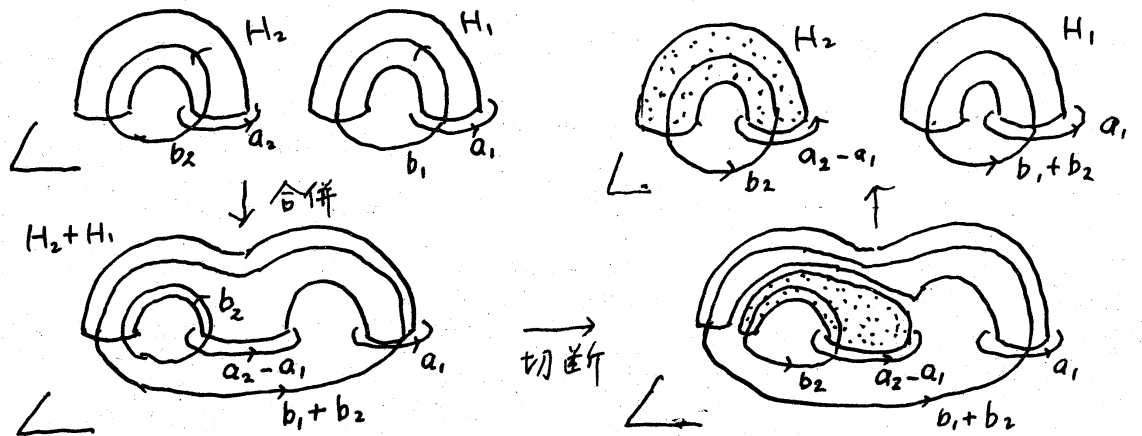
を2分しない単一閉曲線が存在する条件は $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$
 $= 1$ である.

§6

handle を分離する操作

"ゆたう" homeo は特に重要な意味をもつ. これは M^2 の
 handle を切り取る操作が homological にこれと同じな
 かである.

次頁の図で, 柄 H_1 を動かして H_2 と合併させ, 二れを別
 の切口によって二つの柄に切断すると, 基本 cycle (a_i, b_i)



(handle の合併と切断)

(a_2, b_2) は $(a_1, b_1+b_2), (a_2-a_1, b_2)$ と $\sim$ である cycle に移る。この変形は "わたり" と同じである。すると "合併" と "切断" の繰返は "わたり" matrix の積で表わせる = となるが、今はこの matrix を次のように分けて書くことが分り易い。

新	旧	a_1	a_2	a_i	a_j	a_n	b_1	b_2	b_i	b_j	b_n
新	旧	e_1	e_3	e_{2i-1}	e_{2j-1}	e_{2n-1}	e_2	e_4	e_{2i}	e_{2j}	e_{2n}
$\alpha_1 = \alpha_1$		1									
$\alpha_2 = \alpha_3$			1								
$\alpha_i = \alpha_{2i-1}$				1	$(-\varepsilon)$						
$\alpha_j = \alpha_{2j-1}$				$-\varepsilon$	1						
$\vdots$											
$\alpha_n = \alpha_{2n-1}$						1					
$\beta_1 = \alpha_2$							1				
$\beta_2 = \alpha_4$								1			
$\beta_i = \alpha_{2i}$									1	ε	
$\beta_j = \alpha_{2j}$									(ε)	1	
$\vdots$											
$\beta_n = \alpha_{2n}$											1

(空欄は 0)

新	→	$a_1, a_2, \dots, a_n$	$b_1, b_2, \dots, b_n$
↓	旧	$e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}$	$e_2, e_4, \dots, e_{2n}$
α_1	α_1	a_i^j	0
α_2	α_3		
$\vdots$	$\vdots$		
α_n	α_{2n-1}		
β_1	α_2	0	b_i^j
β_2	α_4		
$\vdots$	$\vdots$		
β_n	α_{2n}		

従って、 τ の積は左の δ に残り、(5) は簡単に

$$(a_i^j)(b_j^k) = 1 \quad (\text{単位行列})$$

に帰着される。これから
また定理 4 によって、 τ の
(a_i^j) は $|a_i^j| = \pm 1$
である任意の i, j が取
られることになる。

さて先に行った“合併”“切断”で得られる柄の (α, β) を
表わすと、 α, β は夫々 M^2 の外部と内部に disk が張り、 $\alpha\beta$
 $\alpha^{-1}\beta^{-1}$ と homotop な単一 cycle γ が M^2 を切る球面 S^2 によ
って標準的な handle が M^2 から分離できる。“合併”と“切断”の繰
返すことによる様々な柄の分離ができる。ところが上の matrix
の議論は逆に、標準 handle の分離は homological に決まっ
て τ の操作で得られることを教えている。よって

定理 10. $(\alpha_i, \beta_i) \ i=1, \dots, n$, $\alpha_i = \sum a_i^p a_p$, $\beta_i = \sum b_i^p b_p$ が

M^2 上の標準的な handle を表わす conjugate pair の

full system になる必要十分条件は $|a_i^j| = \pm 1$ である。特

に $|a_i^j| = \pm 1$ となる (a_i^j) を与えれば、 (b_i^j) は

$(a_i^j)(b_i^j) = 1$ (単位行列) の関係から決定される。以上。