

琵琶湖南湖の吹送流に関する数値解析

岩佐 義朗・多田 彰秀

NUMERICAL ANALYSIS OF WIND-INDUCED CURRENTS IN THE SOUTHERN BASIN OF LAKE BIWA

By *Yoshiaki IWASA* and *Akihide TADA*

Synopsis

A boundary element method is used to realise the wind-induced three-dimensional steady currents in the southern basin of Lake Biwa. Under the assumptions of hydrostatic pressure distribution and no-stratification, Ekman-type model is adopted and transformed into a partial differential equation for the stream function using a rigid-lid approximation for the free surface. Then the equation for the stream function is solved by the boundary element method. In particular, the lateral boundary conditions are also improved in order to include in- and outflows.

The main conclusions obtained in this study is that the velocity integrated water flux is extremely influenced by the wind and the effects of bottom topography and lake configuration and that the vertical circulation is significantly affected by the variation of vertical eddy viscosity.

1. 緒 言

大規模閉鎖性水域内の流動のうちで風によって生起する吹送流を対象とした研究は、従来より数多くなされてきた。特に、コンピュータに関するハードウェアの驚異的な発達に伴い、数学モデルを用いて吹送流をシミュレートする数値解析的研究が増加し、今や一般的になっている。既に、有限差分法¹⁾や有限要素法²⁾を用いた数値解析法が数多く開発されている。

本研究では、構造力学の分野においてよく利用されている境界要素法を用い、密度成層を有しない浅水湖の吹送流を予測する数値解析法の開発を行っている。特に、河川等からの流出入の影響が大きい湖においても適用可能な方法を提案している。さらに、平均水深 3.6 m、湖水面積 53.5 km²を有する琵琶湖南湖における吹送流の数値解析を行い、提案した方法の有効性を明らかにするとともに、鉛直渦動粘性係数の変化が流動特性に及ぼす影響について 2, 3 の考察を行っている。

2. 基礎式とその無次元化

2.1 基礎式

Liggett & Hadjitheodorou³⁾に従えば、一様風の条件下における密度成層を有さない浅水湖内での吹送流に対する基礎式は、次のようになる。

連続式;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

運動量式；

x -方向

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

y -方向

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

z -方向

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 x , y , z ；原点からの距離で、**Fig. 1**に示すように x 軸は東向き、 y 軸は北向き、 z 軸は鉛直上向きを正とするとともに基準面を $z = 0.0$ (静水面) としている。 u , v , w ；それぞれ x , y 及び z 方向の流速成分、 p ；圧力、 ρ ；水の密度、 g ；重力加速度、 f ；コリオリ係数、 A_v ；鉛直渦動粘性係数である。

また、この時の境界条件は、

水底 ($z = -h$)：

$$u = v = w = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

水表面 ($z = \zeta$)：

$$w = u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\rho A_v \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x, \quad \rho A_v \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。なお、 τ_x 及び τ_y は風による水面せん断応力の x 及び y 成分である。

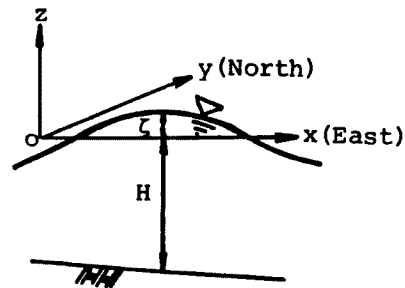


Fig. 1. Definition sketch.

2.2 基礎式の無次元化

次に、上式の無次元化を行うために次のような無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} x_* = \frac{x}{L}, \quad y_* = \frac{y}{L}, \quad z_* = \frac{z}{D}, \quad h_* = \frac{h}{D}, \quad \zeta_* = \frac{\zeta}{D} \\ u_* = \left(\frac{fL}{gD} \right) u, \quad v_* = \left(\frac{fL}{gD} \right) v, \quad w_* = \left(\frac{fL^2}{gD^2} \right) w, \quad p_* = \left(\frac{p}{\rho g D} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 L ；水平方向の代表長、 D ；代表水深、 h ；基準面から水底までの深さ、 ζ ；基準面からの水位変動量とする。

(8) 式で示される無次元量を基礎式 (1) ~ (4) に代入して整理すれば、次のような無次元化がなされた関係式が得られる。

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$-v_* = -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$u_* = -\frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 v_*}{\partial z_*^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$-1 = \frac{\partial p_*}{\partial z_*} \dots\dots\dots (12)$$

なお、(10) 式及び (11) 式中のパラメータ $(1/2m^2)$ は、鉛直エクマン数と呼ばれ、 $E_v = (1/2m^2) = (A_v/fD^2)$ の関係がある。

次に (12) 式を水表面から任意の水深 z_* まで積分するとともに、水表面での大気圧 p_{*s} を無視すれば、静水圧分布式が得られる。したがって、(10) 式及び (11) 式は次式のように書き改められる。

$$-v_* = -\frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \dots\dots\dots (13)$$

$$u_* = -\frac{\partial \zeta_*}{\partial y_*} + \frac{1}{2m^2} \frac{\partial^2 v_*}{\partial z_*^2} \dots\dots\dots (14)$$

同様に、無次元化された境界条件を示せば、

水 底 ($z_* = -h_*$):

$$u_* = v_* = w_* = 0 \dots\dots\dots (15)$$

水表面 ($z_* = \zeta_*$):

$$w_* = u_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial y_*} \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial z_*} = \tau_{x*}, \quad \frac{\partial v_*}{\partial z_*} = \tau_{y*} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $\tau_{x*} = (fL/\rho A_v g) \tau_x$, $\tau_{y*} = (fL/\rho A_v g) \tau_y$ である。以下では、簡略化する意味で無次元量を表す (*) を全て略して表記する。

2.3 流れ関数によって表記された基礎方程式

水平流速成分 u 及び v は、(13) 式及び (14) 式から解析的に求められる。すなわち、

$$u = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \cos mz \cdot (C_2 e^{mz} - C_4 e^{-mz}) - \sin mz \cdot (C_1 e^{mz} - C_3 e^{-mz}) \dots\dots\dots (18)$$

$$v = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \cos mz \cdot (C_1 e^{mz} + C_3 e^{-mz}) + \sin mz \cdot (C_2 e^{mz} + C_4 e^{-mz}) \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 C_1 , C_2 , C_3 及び C_4 は水表面と水底の境界条件によって決定される積分定数である。

鉛直方向の流速成分 w については、連続式を水底から任意の水深まで z について積分することにより求められる。

$$\begin{aligned} w = & -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial C_3}{\partial y} - \frac{\partial C_4}{\partial x} \right) \{ e^{mz} (\cos mz + \sin mz) \\ & - e^{-mh} (\cos mh - \sin mh) + e^{-mz} (-\cos mz + \sin mz) + e^{mh} (\cos mh + \sin mh) \} \\ & + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{\partial C_4}{\partial y} \right) \{ e^{mz} (\sin mz - \cos mz) + e^{-mh} (\sin mh + \cos mh) + e^{-mz} (\sin mz \\ & + \cos mz) + e^{mh} (\sin mh - \cos mh) \} - \frac{1}{2m^2} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) (e^{mz} \cos mz \\ & - e^{-mh} \cos mh) - \frac{1}{2m^2} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \right) (e^{mz} \sin mz + e^{-mh} \sin mh) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

さらに、上式に $z = \zeta$ を代入し境界条件 (16) 式を用いて整理すれば、次の関係式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\zeta} u dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-h}^{\zeta} v dz \right) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

また、(13) 式及び (14) 式を水底から水表面まで積分し水深で除すとともに rigid-lid approximation を導入すれば、平均流速成分 $\bar{u}$ 及び $\bar{v}$ が定義される。

$$\bar{u} = \frac{1}{(h+\zeta)} \int_{-h}^{\zeta} u dz = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 u dz = h_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + h_4 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + h_2 \tau_y + h_3 \tau_x \dots (22)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{(h+\zeta)} \int_{-h}^{\zeta} v dz = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 v dz = -h_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + h_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + h_3 \tau_y - h_2 \tau_x \dots (23)$$

なお、積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 ならびに h_1, h_2, h_3, h_4 の詳細については参考文献 4) に譲る。さらに、 $\bar{u}$ 及び $\bar{v}$ が定義されたことにより、(21) 式は divergent form に書き改められる。したがって、 $\bar{u}$ 及び $\bar{v}$ に對して、

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \bar{v} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots (24)$$

の関数を満足する流れ関数 ϕ を導入することが可能となる。次いで、上記の関係式を (22) 式及び (23) 式に代入するとともに、 $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ 及び $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ について解けば、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = q_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} + q_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + q_4 \tau_y - q_3 \tau_x \dots (25)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = q_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} - q_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} - q_3 \tau_y - q_4 \tau_x \dots (26)$$

が得られる。最後に、(25) 式及び (26) 式から圧力勾配を消去することにより流れ関数に関する最終的な基礎方程式が誘導される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = A(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + C(x, y) \dots (27)$$

ここで、 q_1, q_2, q_3, q_4 および $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ の詳細は、同様に参考文献 4) に譲る。

3. 境界要素法と計算手法

3.1 境界要素法による離散化式の誘導

(1) 境界積分方程式の誘導

次に、境界要素法を用いて (27) 式を数値的に解く方法について説明を加える。

(27) 式は、右辺に未知量 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 及び $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ を含むために、このままでは直接解くことは出来ない。一方、(27) 式中の関数 $C(x, y)$ が、 $A(x, y)$ 及び $B(x, y)$ よりも相対的に大きい場合には、右辺を既知項とみなし反復計算によって近似的に解を求めることが可能である。いま、(27) 式の右辺を b とすれば、流れ関数 ϕ に対する Poisson 型の偏微分方程式が誘導される。

$$\nabla^2 \phi^* = b, \quad b \equiv A(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + C(x, y) \dots (28)$$

さらに、2次元 Laplace 方程式の基本解を ϕ^* とすれば、 ϕ^* は次式で与えられる⁵⁾。

$$\nabla^2 \phi^* + \delta_i = 0 \dots (29)$$

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \dots (30)$$

ここで、 r ; field point (x, y) と source point (ξ, η) 間の距離、 δ_i ; Dirac のデルタ関数である。

(28) 式の両辺に ϕ^* を乗じるとともに、計算対象領域 Ω で部分積分を 2 回行って整理すれば、次式のような境界積分方程式が導かれる。

$$c_i \phi_i = \int_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} b \phi^* d\Omega \dots (31)$$

なお、 Γ ; 計算対象領域 Ω の境界、 n ; 境界上での外向き法線、 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$; 関数 ϕ に関する法線方向の微係数である。さらに、(31) 式に含まれる係数 c_i の値は、source point の位置に依存して決定される。すなわち、

- ① i 点 (source point) が計算対象領域 Ω 内に存在する場合, c_i の値は 1.0 に等しい。

$$\phi_i = \int_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} b \phi^* d\Omega \quad (32)$$

- ② i 点が境界 Γ 上に位置するとき, $c_i = 1 - (\theta/2\pi)$ となる。

ただし, θ は Fig. 2 に示すような角点での外角である。

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) \phi_i = \oint_{\Gamma} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Omega} b \phi^* d\Omega \quad (33)$$

ここに, $\oint_{\Gamma} F d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} F d\Gamma$; Cauchy の主値積分,

$\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$, Γ'' ; 境界上の点 i を迂回する半径 ε の円弧。

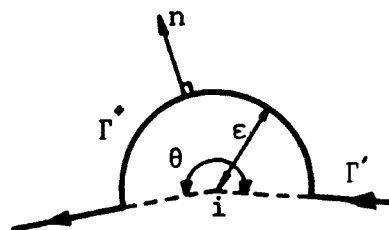


Fig. 2. Point i on boundary Γ .

(2) 境界積分方程式の離散化

(31) 式は, 境界積分及び領域積分から構成されている。したがって, (31) 式の離散化に際しては, まず計算対象領域の境界 Γ を境界要素に分割しなければならない。また, 計算対象領域 Ω についても, 数値領域積分が適用可能なように内部要素に分割する必要がある。本研究では, 境界要素として要素上の変数が一次式で内挿される『線形要素』を, 内部要素として『三角形要素』を採用している。

以上より, (31) 式は N 個の境界要素に対して離散化され, 次式のように表記される。

$$\begin{aligned} c_i \phi_i + \int_{\Omega} b \phi^* d\Omega + \sum_{j=1, j \neq i-1}^N \int_{\Gamma_j} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_i} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_{i-1}} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma \\ = \sum_{j=1, j \neq i-1}^N \int_{\Gamma_j} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_i} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_{i-1}} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (34) \end{aligned}$$

上式中の境界要素 Γ_j に沿った積分及び領域積分の詳細な求め方については, ここでは割愛する (文献⁴⁾参照)。なお, 前者については一次元 Gauss 積分公式が, 後者については Hammer の積分公式が用いられている。

最後に, 隣接する境界要素間の関係を考慮して整理すれば, 境界上のすべての節点に対して次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j + B_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (35)$$

ここで,

$$B_i = \int_{\Omega} b \phi^* d\Omega, \quad q_j = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j, \quad h_{ik,j} = \int_{\Gamma_j} \phi_k \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma, \quad q_{ik,j} = \int_{\Gamma_j} \phi_k \phi^* d\Gamma \quad (k=1, 2),$$

$$H_{ij} = h_{i1,j} + h_{i2,j-1} \quad (i \neq j)$$

$$= h_{i1,j} + h_{i2,j-1} + c_i \quad (i=j)$$

$$G_{ij} = g_{i1,j} + g_{i2,j-1}$$

また, (35) 式をマトリックス表示すれば,

$$H\phi + B = GQ \quad (36)$$

となる。さらに, 流れ関数に関する境界条件を (36) 式に代入すれば, 上式は連立一次方程式となる。し

たがって、それらの方程式を解くことによって、境界 Γ 上の未知量 ϕ または $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ がすべて求まる。また、必要があれば、計算対象領域 Ω 内の任意の点 i における関数値 ϕ_i についても境界 Γ 上の ϕ 及び $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ を用いて (32) 式より容易に得られる。

3.2 計算方法

計算対象領域内の任意の点 i における流れ関数の $n+1$ 次近似値を ϕ_i^{n+1} と定義するならば、その値は次のような反復計算によって求められる。ただし、 n 次の近似値は既知量であり ϕ_i^n によって表されるものとする。

① Fig. 3 に示される a, b, c 及び d の4点における流れ関数の値を (32) 式より求める。

② 次式に従って i 点での $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^n$ 及び $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i^n$ の値を近似的に求める。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^n \approx \frac{\phi_{ib}^n - \phi_{ia}^n}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i^n \approx \frac{\phi_{id}^n - \phi_{ic}^n}{\Delta y} \quad (37)$$

したがって、(27) 式右辺を既知量と評価することができる

ので、(36) 式左辺のベクトル B は数値積分によって求められる。

③ 流れ関数に対する境界条件を (36) 式に代入して解き、境界上の未知量 ϕ_B^{n+1} または $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_B^{n+1}$ を算出する。

④ すべて既知量となった境界上の関数値および (32) 式より、領域内の点 i での流れ関数 ϕ_i^{n+1} 及びそこでの勾配 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^{n+1}$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i^{n+1}$ を求める。なお、1 次の近似値としては $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^1 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i^1 = 0.0$ が便宜的に与えられている。

⑤ 反復計算の収束判定条件としては、次式を採用しており、この式が満足される場合のみ収束したものと判断して計算を終了させている。

$$\frac{1}{M'} \sum_{i=1}^{M'} \sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^n \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_i^n \right\}^2} < \varepsilon_1 \quad (38)$$

ここに、 M' ; 計算対象領域内部で ϕ の微係数を求める点の総数、 $\varepsilon_1 = 1.0 \times 10^{-5}$ である。

⑥ (38) 式が満足された後、 x 方向および y 方向の圧力勾配は、反復計算の最終段階で得られた $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 及び $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ の値と (25), (26) 式より求められる。

⑦ 最後に、上で求められた圧力勾配を (18), (19), 及び (20) 式に代入することにより、任意の水深 z における流速成分が算出される (Fig. 4 参照)。

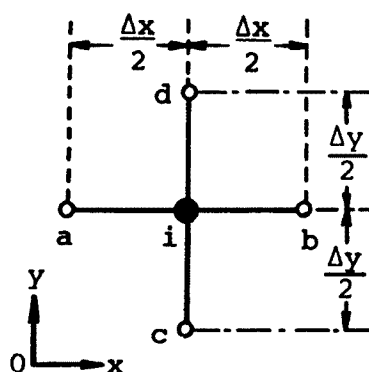


Fig. 3. Evaluation of differential coefficient for ϕ .

4. 琵琶湖南湖における吹送流の数値シミュレーション

4.1 計算条件

(1) 離散化要素

解析に際して、Fig. 5 (a) 及び (b) に示されるような境界要素 ($N=97$) 及び内部要素 ($M=388$) を設定した。特に、内部要素を決定する際には、Fig. 5 (c) の水深分布図を参考にして、水深変化の大

きい領域を細かく分割している。また、Fig. 5 (c) より南湖の湖底は湖盆形状をなし最深部が西岸に偏っているととも、東岸で遠浅となっていることが確認される。なお、この湖底図⁶⁾は矢橋沖の埋立てが完成する以前のものであり、矢橋人工島は考慮されていない。解析に際しては、Fig. 5 (c) に示される水深分布に 1.0 m を一律に加えた水深を用いている。

(2) 流れ関数に関する境界条件

琵琶湖南湖の北端は北湖に接しており、また南端は琵琶湖疎水とともに琵琶湖の流出口である瀬田川につながっている (Fig. 5 (c) 参照)。これらの地形的特徴から、北湖から南湖を通過して瀬田川へ流出する恒流的な成分が考えられ、これに風によって生起する吹送流が重なるものと予想される。したがって、本研究においては、北湖、瀬田川及び疎水からの流入流出量を考慮に入れた境界条件を課して (36) 式を解かなければならない。すなわち、湖岸部において基本境界条件 ($\phi = \text{const.}$) を、南湖の北端、南端及び疎水放流口において自然境界条件 ($\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0.0$) を与えて混合境界値問題として解くことになる。なお、後者の境界条件は、物理的に流れが流入部に対して直角に交わっているものと解釈される。さらに、ここでの流れ関数の値については、流入部をはさんで流入流出量に等しい値だけ変化することになる。

また、Fig. 6 に示されるように湖岸部と流入部が交わる節点 A においては、上述の両境界条件が同

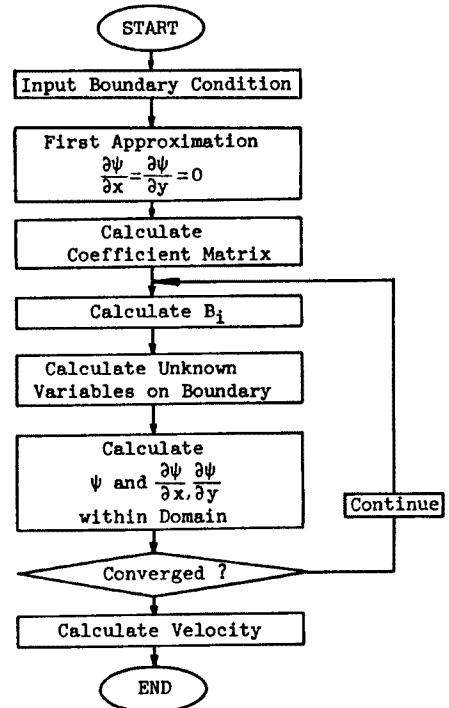


Fig. 4. Flow chart.

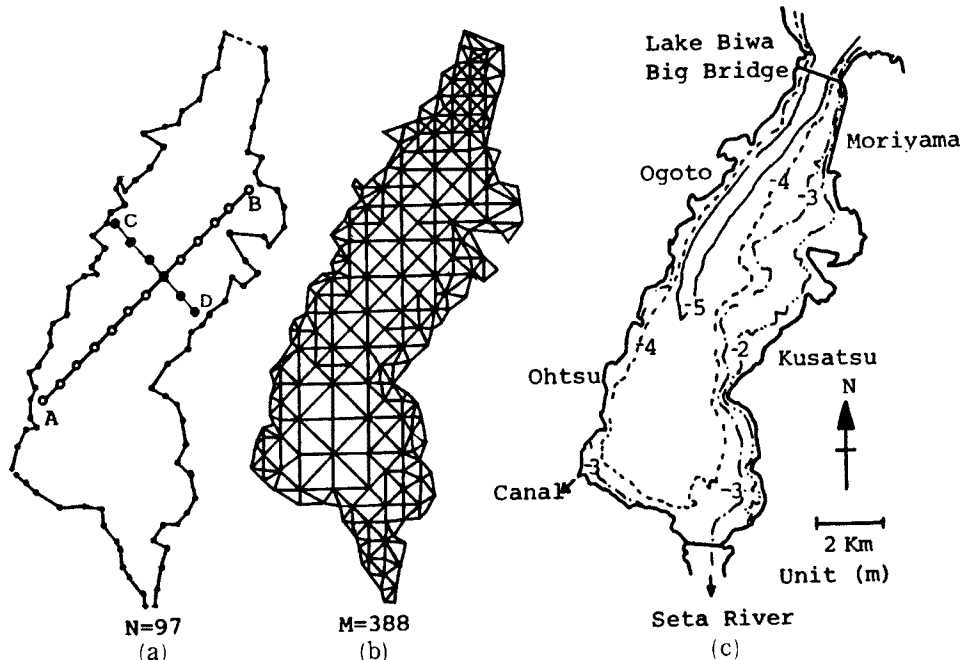


Fig. 5. Discretization.

(a) Boundary nodes (b) Internal cells (c) Bottom topography.

時に課せられるために、数値計算的な精度の低下を招く恐れがある。ここでは、新たに A 点に極めて近い節点 B を設けるとともに、 A 点には基本境界条件を、 B 点には自然境界条件を与えて数値解析を行っている。なお、図中の ε' は A 点と B 点間の距離である。この値の選択に際しては、岩佐・多田・山野⁷⁾の結果を踏まえて $L' \times 10^{-3}$ と設定している (L' : 境界要素長)。

(3) 風によるせん断応力

水表面に作用する風によって生じるせん断応力成分 τ_x , τ_y については

$$(\tau_x, \tau_y) = \rho_a \gamma_a^2 (W_x, W_y) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \dots\dots\dots (39)$$

で与える。ただし、 ρ_a : 空気の密度 ($= 1.21 \text{ kg/m}^3$), $\gamma_a^2 = 1.3 \times 10^{-3}$, W_x 及び W_y : 風速の x 及び y 方向成分 (m/sec) である。また、風の条件としては、長軸方向の風 (北北東及び南南西) が湖面全体に一様に吹いているものと仮定し、風速としては 2.0 m/sec を与えている。

(4) コリオリ係数

コリオリ係数 f についても、湖全体にわたって一定とし、次式で与えている。

$$f = 2\omega \sin \phi \dots\dots\dots (40)$$

ここで、 ω : 地球の自転角速度, ϕ : 緯度である。なお、琵琶湖南湖の緯度は $35^\circ 08'$ である。

(5) 鉛直渦動粘性係数

鉛直渦動粘性係数 A_v が一定と仮定された解析結果においては、水面近傍で好ましい結果を得ることがしばしば難しいと報告されている⁸⁾。しかしながら、出来る限り簡単かつ容易に数値シミュレーションを遂行するために、本研究では敢えて全湖及び水深方向にわたって鉛直渦動粘性係数が一定と仮定するとともに、次の経験式⁹⁾を参考にして算定している。

$$A_v = 2.0 \times \bar{h} \times |W| \times 10^{-5} \dots\dots\dots (41)$$

ここで、 $|W|$: 風速 ($= \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$, m/sec), $\bar{h}$: 平均水深 (m) である。

4.2 計算結果とその考察

本研究では、琵琶湖南湖の長軸方向 (北北東及び南南西) に一様風を与え、その条件下で吹送流の数値シミュレーションを行った。

Fig. 7 (a) 及び **(b)** は、それぞれ北北東及び南南西の風 2.0 m/sec の下で計算された流量フラックス図である。両者とも、浅い東岸沿いには風と同じ向きの流れが、水深が比較的深い西岸沿いには風と逆向きの流れが生じている。また、それらに伴って前者の場合には時計回りの環流が、後者では反時計回りの環流の存在が確認される。同様のことは、岩佐・井上らが琵琶湖南湖の湖流を対象とし、二次元一層モデルを適用して行った数値シミュレーション結果においても得られている¹⁰⁾。さらに、北、南、北西及び南西の風のもとでも同様な数値計算を行ったが、南よりの風の場合が北よりの風の場合よりも環流は明瞭に形成されるようである。なお、ここでの瀬田川流量 Q_s は平水時を想定し、 $80 \text{ m}^3/\text{sec}$ と与えている。

一方、**Fig. 8** は出水時に瀬田川の流量が大きくなった場合 ($Q_s = 580 \text{ m}^3/\text{sec}$) の流量フラックス図である。**Fig. 7 (b)** と比較すれば、南下する恒流成分が相対的に大きくなるとともに、環流が消滅していることが確認される。したがって、本研究で提案している流入流量を考慮に入れた流れ関数に対する境界条件の与え方は、妥当なものと判断される。なお、両図ともに琵琶湖疎水からの流出流量 Q_e は $20 \text{ m}^3/\text{sec}$ であり、北端部では $Q_s + Q_e$ の流量が北湖より流入しているものと考えている。また、風については **Fig. 7 (b)** の場合と同一の条件が与えられている。

南南西の風 2.0 m/sec の条件のもとで、水表面及び水面下 1.5 m , 4.0 m における流速ベクトルの分布を示したものが **Fig. 9 (a)~(c)** である。水表面の流速ベクトルは、風下よりやや時計回りにずれている

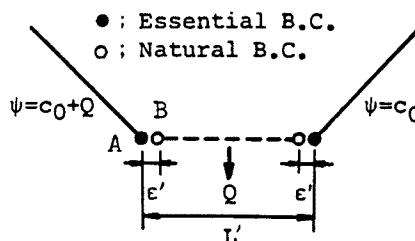


Fig. 6. Open boundary.

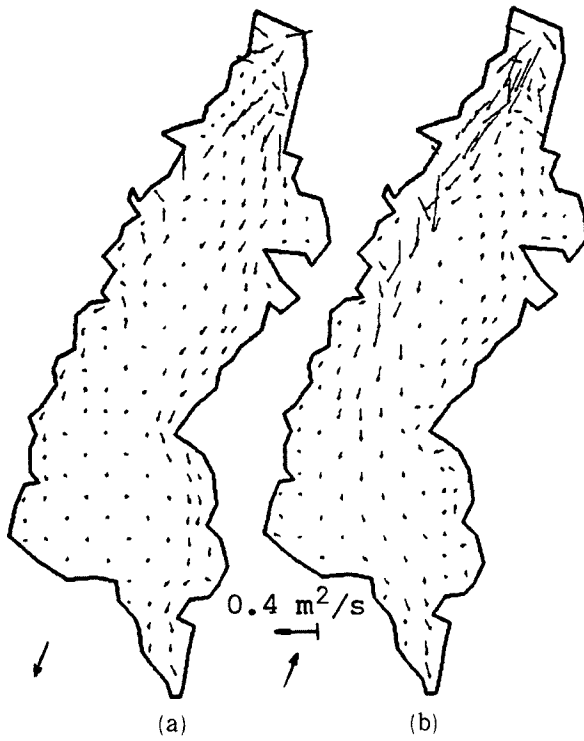


Fig. 7. Discharge flux ($Q_s = 80 \text{ m}^3/\text{sec}$).
(a) NNE (b) SSW

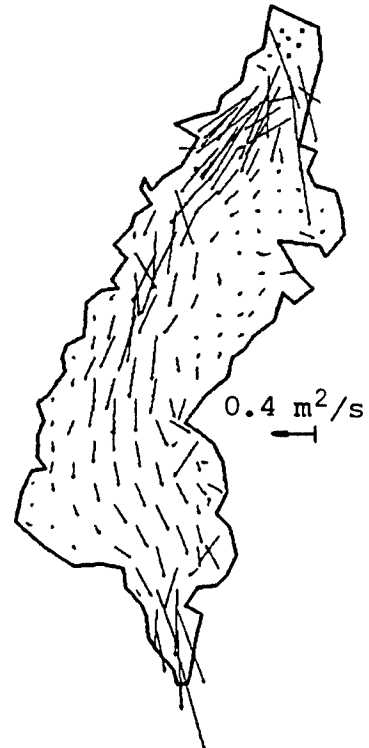


Fig. 8. Discharge flux.
(SSW, $Q_s = 580 \text{ m}^3/\text{sec}$).

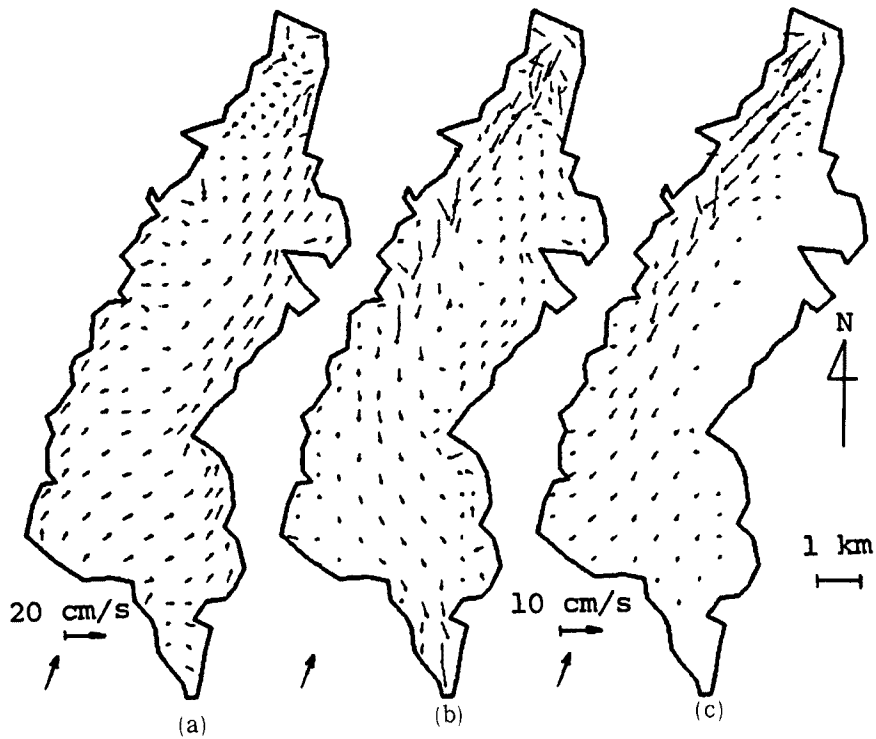


Fig. 9. Velocity distributions.
(a) Free surface (b) $z = -1.5 \text{ m}$ (c) $z = -4.0 \text{ m}$.

(Fig. 9 (a) 参照)。これは、コリオリ効果によるものと解釈される。また、水面下 1.5 m における流速分布は、湖心部に Fig. 7 (b) と同様な環流を形成している (Fig. 9 (b) 参照)。さらに、水底に近い $z = -4.0$ m での流速分布では、風向とほぼ逆向きの流れとなっている。したがって、これらの図より、流速の鉛直分布はエクマンスパイラルを形成するとともに、湖全体として水面下 1.0 m ~ 2.0 m 付近を境に上層と下層での流れの向きが逆転する鉛直循環流の存在が確認される。なお、Fig. 7 ~ Fig. 9 における鉛直渦動粘性係数 A_v の値は、(41) 式を参考にして $1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$ と与えた。

次に、シミュレートされた流動特性に対して鉛直渦動粘性係数の値の違いが流況に及ぼす影響について考察を加える。なお、ここでの風の条件は Fig. 9 と同一のものである。

Fig. 10(a) ~ (c) は、鉛直渦動粘性係数 A_v の値をそれぞれ 0.72×10^{-4} 、 1.44×10^{-4} 及び $7.20 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$ と増加させた場合の流量フラックス図である。環流は、 A_v の値が小さいほど顕著に現れる傾向にある。もし、(41) 式に従って A_v の値が選定されるとすれば、 A_v を大きく設定することは取りも直さず風速 $|W|$ を大きく与えることに対応する。しかしながら、ここでの風速は 3 ケースともに同一であると仮定している (南南西、 $|W| = 2.0 \text{ m/sec}$)。すなわち、矛盾するようであるが、風以外の何らかの要因によって鉛直渦動粘性係数が変化すると想定し、その変化による流れへの影響を比較しようとしている。以後、簡略化のためにこれらを Run 1、Run 2 及び Run 3 と呼ぶことにする。

Fig. 5 (a) に示されている A-B 鉛直断面内での流速分布について、Run 1、Run 2 及び Run 3 の 3 ケースで比較したものが Fig. 11(a) ~ (c) である。Run 1 及び Run 2 では、鉛直循環流が顕著に形成されている。一方、鉛直エクマン数 E_v が Run 2 の 5 倍に相当する Run 3 (Fig. 11(c) 参照) では、顕著な鉛直循環流は生じていない。また、これらの図より、A-B 断面内の比較的水深の深い部分における流

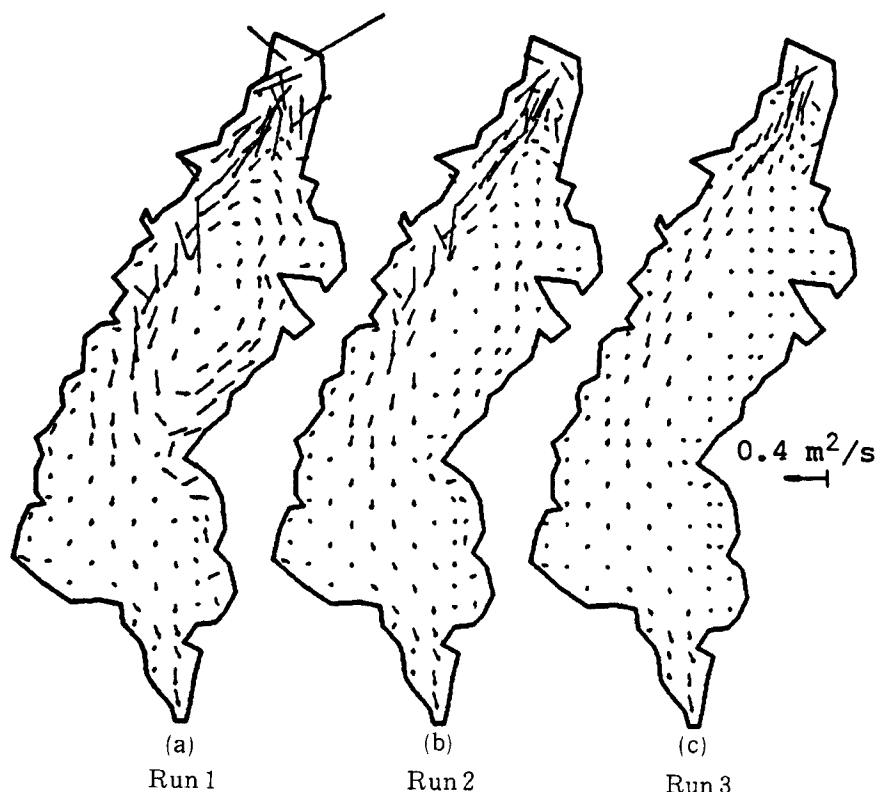


Fig. 10. Discharge flux (SSW 2.0 m/sec).

- (a) Run 1, $A_v = 0.72 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$
- (b) Run 2, $A_v = 1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$
- (c) Run 3, $A_v = 7.20 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$

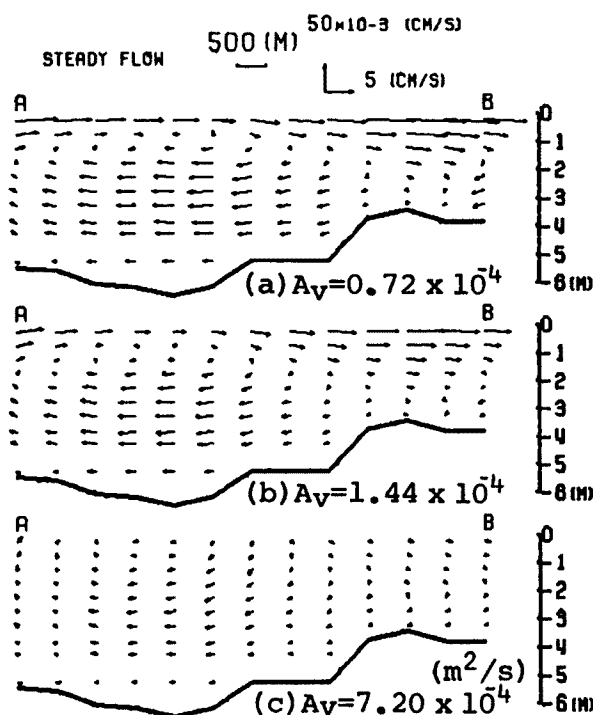


Fig. 11. Vertical circulation currents on longitudinal A-B section.

- (a) Run 1, $A_v = 0.72 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$
- (b) Run 2, $A_v = 1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$
- (c) Run 3, $A_v = 7.20 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$

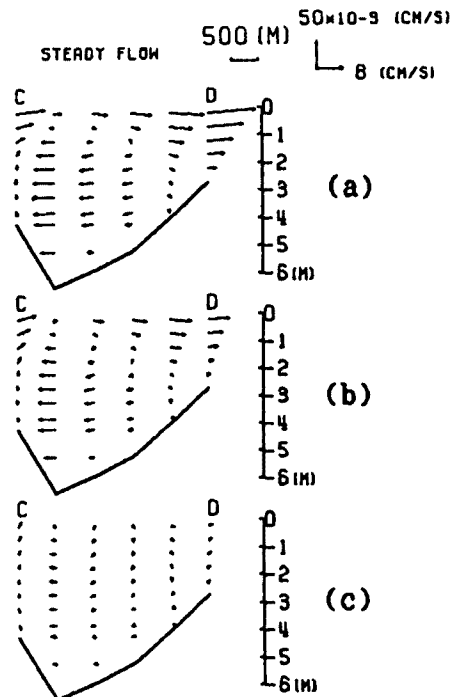


Fig. 12. Vertical currents on C-D section.

- (a) Run 1, $A_v = 0.72 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$
- (b) Run 2, $A_v = 1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$
- (c) Run 3, $A_v = 7.20 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$

速は、 A_v の値の増加に伴い一様流に近づくとともに、その大きさが減少する傾向にあることも再現されている。さらに、Fig. 12(a)～(c)は、A-B断面に垂直な横断面C-D面内での流れを示した図である。Fig. 11の場合と同様に、Run 1 (Fig. 12(a))及びRun 2 (Fig. 12(b))においてわずかながらではあるが二次流の存在も認められる。

以上の結果より、鉛直渦動粘性係数 A_v の違いは、少なくとも鉛直方向の流動特性に極めて敏感に影響を及ぼすものと判断される。

5. 結 言

本研究は、エクマンタイプ・モデルを用いるとともに、境界要素法により琵琶湖南湖における定常な吹送流の数値シミュレーションを行ったものである。

得られた結果を要約すれば、以下のようである。

(1) 河川等からの流出入部において自然境界条件 $\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0\right)$ を課すことにより、流出入流量の影響が大きい浅水湖における吹送流の数値シミュレーションが可能となった。

(2) 算出された流量フラックスは、二次元一層モデルを適用して行われた数値シミュレーションとはほぼ同様な流況を呈していることが明らかになった。

(3) 鉛直渦動粘性係数 A_v は、吹送流における鉛直方向の流動特性に極めて敏感に影響を及ぼすパラメータであることが確認された。したがって、その設定法は数値解析的研究にとって極めて重要であるこ

とも明らかになった。

(4) ここで提案されたような境界要素法を基本とした数値解析法を用いても、十分に流れの三次元性の再現が可能であることが示された。

最後に、本研究をすすめるにあたり、種々の御助言を賜わった京都大学工学部土木工学教室井上和也先生に衷心より感謝申し上げます。また、作図等に多大の御援助・御協力を頂いた同大学院生広瀬昌由氏に謝意を表します。なお、ここでの数値計算はすべて京都大学大型計算機センター M-382 によったことを附記する。

参 考 文 献

- 1) 例えば, Liggett, J. A.: Unsteady Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, Proc. ASCE, Vol. 95, HY 4, 1969, pp. 1273 - 1288.
- 2) 例えば, Cheng, R. T.: Numerical Investigation of Lake Circulation around Islands by the Finite Element Method, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 1972, pp. 103 - 112.
- 3) Liggett, J. A. and C. Hadjithodorou: Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, Proc. ASCE, Vol. 95, HY 2, 1969, pp. 609 - 621.
- 4) 岩佐義朗, 多田彰秀, 泊 宏: 境界要素法を適用した諏訪湖の湖流に関する数値解析, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号 B-2, 1986, pp. 561 - 578.
- 5) Banerjee, P. K. and R. Butterfield: Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1981, pp. 38 - 77.
- 6) 井上和也: 開水路非定常流の数値計算法とその水工学への応用に関する研究, 京都大学学位論文, 1986, pp. 147 - 149.
- 7) 岩佐義朗, 多田彰秀, 山野一弥: 水理学を対象とした境界要素法の適用について, 昭和 58 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 1983, pp. II-65-1 ~ II-65-2.
- 8) Barannik, V. A., YE. V. Yeremenko and O. M. Spiner: Determination of Eddy Viscosity and Friction at the Bottom in Wind-Driven Currents in Shallow Water Basins, Fluid Mechanics-Soviet Research, Vol. 6, No. 2, 1977, pp. 165 - 172.
- 9) 大久保賢治, 村本嘉雄, 久保田 一: 琵琶湖南湖の湖流解析, 京都大学防災研究所年報, 第 26 号 B-2, 1983, pp. 503 - 530.
- 10) 岩佐義朗, 井上和也, 足立敏之: 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 B-2, 1978, pp. 293 - 305.