

2-基本アーベル群をイデアル類群にもつ虚2次体について

熊 丸 理 山 元 淳

類数1の虚2次体の決定についての Siegel の方法 ([1]) を、イデアル類群が2-基本アーベル群となる虚2次体の場合に適用して、Siegel と同じ不定方程式が得られることを述べる。この結果は類数2の場合に九州大学における代数的整数論研究会 (1978) で既に報告している。

$\mathbb{Q}$ を有理数体, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を判別式 d をもつ虚2次体とし, $d = p_1^* p_2^* \cdots p_r^*$ (p_i^* は素判別式), $\omega = \frac{\sqrt{d}-5d}{2}$, $j(z)$ を modular 不変量とする。

定理. K の類数が 2^{r-1} であり, $d \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $(3, d) = 1$ とする。このとき, 次のことが成り立つ。

(i) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, 不定方程式 $A^2 - 5B^6 = 4$ をみたす $\mathbb{Q}(j(\omega))$ の整数 A, B が存在する。

(ii) $d \equiv 0 \pmod{8}$ のとき, 不定方程式 $A^2 - 5B^6 = -4$ をみたす

す $\mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{-d})$ の整数 A, B が存在する。

(iii) $d = -4m$, $m \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, 不定方程式 $A^2 - 5B^2 = -4$ をみたす $\mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{E})$ の整数 A, B が存在する。ここで ε_m を $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の基本単数とすると, $E = \begin{cases} \varepsilon_m & (N\varepsilon_m = -1) \\ \sqrt{\varepsilon_m} & (N\varepsilon_m = 1) \end{cases}$ である。

以下, この定理の証明の概略を述べる。 $\eta(z)$ を Dedekind の η -関数とし, Siegel に従って

$$\varphi(z) = \sqrt{5}^{-1} \frac{\eta(\frac{z}{5})\eta(\frac{z-1}{5})\eta(\frac{z+1}{5})}{\eta(5z)\eta(\frac{z-2}{5})\eta(\frac{z+2}{5})}, \quad \psi(z) = \sqrt{5}^{-1} \frac{\eta(\frac{z}{5})\eta(\frac{z-2}{5})\eta(\frac{z+2}{5})}{\eta(5z)\eta(\frac{z-1}{5})\eta(\frac{z+1}{5})}$$

とおくと, $\varphi(z), \psi(z)$ は Stufe 5 の modular 関数で, $\varphi(-z^{-1}) = \psi(z)^{-1}$

となる。また, $j(z)$ はこれらの関数によって

$$(1) \quad \begin{aligned} j(z) &= \sqrt{5}^5 \varphi(z)^{-5} (\varphi(z) + \varepsilon^3) [(\varphi(z) + \varepsilon)(\varphi(z)^2 - \varepsilon^{-1}\varphi(z) + \varepsilon^{-2})]^3 \\ &= \sqrt{5}^5 \psi(z)^{-5} (\psi(z) + \varepsilon^3) [(\psi(z) + \varepsilon^{-1})(\psi(z)^2 - \varepsilon\psi(z) + \varepsilon^2)]^3 \end{aligned}$$

と表わされる。ここで $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。更に,

$$\frac{\eta(z)}{\eta(5z)} \prod_{k=2}^4 \frac{\eta(\frac{z}{5})}{\eta(\frac{z+k}{5})} = 1, \quad \sqrt{-\varepsilon\sqrt{5}} = \zeta_5 - \zeta_5^{-1} \quad (\zeta_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}})$$

を用いて, $\varphi^*(z) = \sqrt{-\varepsilon^3\varphi(z)}$, $\psi^*(z) = \sqrt{-\varepsilon^3\psi(z)}$ を

$$\varphi^*(z) = \sqrt{-\varepsilon^3\sqrt{5}^{-1}} \frac{\eta(z)^3}{\eta(5z)\eta(\frac{z-2}{5})\eta(\frac{z+2}{5})}, \quad \psi^*(z) = \sqrt{-\varepsilon^3\sqrt{5}^{-1}} \frac{\eta(z)^3}{\eta(5z)\eta(\frac{z-1}{5})\eta(\frac{z+1}{5})}$$

と定義すると, $\eta(z)$ の変換公式によって $\varphi^*(z), \psi^*(z)$ は Stufe 10 の modular 関数であり, $\varphi_k^*(z) = \varphi^*(z+k)$, $\psi_k^*(z) = \psi^*(z+k)$ ($0 \leq k \leq 4$)

とおくとき,

$$\varphi_k^*(z+5) = -\varphi_k^*(z), \quad \psi_k^*(z+5) = -\psi_k^*(z) \quad (0 \leq k \leq 4)$$

$$\varphi_0^*(-z^{-1}) = -\psi_0^*(z)^{-1}, \quad \varphi_1^*(-z^{-1}) = \psi_3^*(z)^{-1}, \quad \varphi_2^*(-z^{-1}) = \varphi_3^*(z),$$

$$\varphi_4^*(-z^{-1}) = \psi_2^*(z)^{-1}, \quad \psi_1^*(-z^{-1}) = \psi_1^*(z), \quad \psi_4^*(-z^{-1}) = \psi_4^*(z)$$

となる。従って $\pm \varphi_k^*(z), \pm \psi_k^*(z)^{-1}$ ($0 \leq k \leq 4$) は $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用で互いに置換する。また (1) は $\varphi^*(z), \psi^*(z)$ によって

$$\begin{aligned} (2) \quad j(z) &= -\sqrt{5}^{-1} (\varphi^*(z) - \varphi^*(z)^{-1}) [5(\varepsilon \varphi^*(z) - \varepsilon^{-1} \varphi^*(z)^{-1})(\varepsilon^4 \varphi^*(z)^2 + \varepsilon^{-4} \varphi^*(z)^{-2} + 1)]^3 \\ &= -\sqrt{5}^{-1} (\psi^*(z) - \psi^*(z)^{-1}) [5(\varepsilon^{-1} \psi^*(z) - \varepsilon \psi^*(z)^{-1})(\varepsilon^{-4} \psi^*(z)^2 + \varepsilon^4 \psi^*(z)^{-2} + 1)]^3 \end{aligned}$$

と表される。次に $\varphi^*(\omega), \psi^*(\omega)$ が含まれる類体を求めるために $z = e^{2\pi i z}$ とし, $\varphi_k^*(z), \psi_k^*(z)$ を $q^{\frac{1}{5}}$ -展開すると, 定義からこれらの係数は $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ に含まれる。従って $K_\pm$ を K の $\pm$ を法とする合同類体とすれば, Söhngen の定理 ([2]) より

$$(3) \quad \varphi(\omega), \psi(\omega) \in K_5, \quad \varphi^*(\omega), \psi^*(\omega) \in K_{10}$$

となる。また Dirichlet-Kronecker の極限公式によって

$$(4) \quad (-1)^d \prod_{\substack{d_1, d_2 = d \\ d_1 > 0}} \varepsilon_{5d_1}^{\frac{1}{2d}} h_{5d_1} h_{5d_2} = \begin{cases} \varphi(\omega) & d \equiv 2 \pmod{5} \\ \psi(\omega) & d \equiv -2 \pmod{5} \end{cases}$$

が得られる (Stark [3])。ここで積は $d_1 = 1, d_2 = d$ を含めて d_1, d_2 が 2 次体の判別式となるすべてにわたり, $\varepsilon_{5d_1}, h_{5d_1}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5d_1})$ の基本単数と類数, h_{5d_2} は $\mathbb{Q}(\sqrt{5d_2})$ の類数である。以後, 定理の証明には $d \equiv 2 \pmod{5}$ と $d \equiv -2 \pmod{5}$ の 2 つの場合に分れるが, 全く同様に証明出来るので, $d \equiv 2 \pmod{5}$

従って φ, φ^* の方のみを扱う。(4)において $2^{r-1} | h_{sd_1} h_{sd_2}$ に注意すると, $\varphi(\omega)^2 \in \mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{5})$ 即ち $K_1(\varphi(\omega))/K_1$ は 2 次又は 4 次の拡大である。また $(\frac{d}{5}) = -1$, $d \neq -3, -4$ より $[K_5 : K_1] = 12$ である。更に $\zeta_5 \in K_5$, $[K_1(\zeta_5) : K_1] = 4$ であるから (3) より $\varphi(\omega) \in K_1(\zeta_5)$ となる。 $\varphi(\omega)$ は実単数であるから $\varphi(\omega) \in \mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{5})$ であり, 結局 $\varphi^*(\omega)^2 \in \mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{5})$ が得られる。一方 K_{10}/K_1 の拡大次数は

$$[K_{10} : K_1] = \begin{cases} 4 \cdot 3 & (\frac{d}{2}) = 1 \\ 4 \cdot 3^2 & (\frac{d}{2}) = -1 \\ 8 \cdot 3 & (\frac{d}{2}) = 0 \end{cases}$$

である。このことから定理が次の様に証明される。

(i) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, (3) より $\varphi^*(\omega)$ は $K_1(\zeta_5)$ に含まれる実単数であるから, $\varphi(\omega)$ と同じく $\varphi^*(\omega) \in \mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{5})$ となる。今 $\sigma \in \mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ の自己同型写像で $j(\omega)^\sigma = j(\omega)$, $\sqrt{5}^\sigma = -\sqrt{5}$ とすると, (4) より $(\varphi(\omega)\varphi(\omega)^\sigma)^2 = 1$ である。一方 $\varphi(\omega)\varphi(\omega)^\sigma = -(\varphi^*(\omega)\varphi^*(\omega)^\sigma)^2$ であり, 従って $\varphi(\omega)\varphi(\omega)^\sigma = -1$ となる。また定理の仮定 $(3, d) = 1$ のとき, $\sqrt[3]{j(\omega)} \in \mathbb{Q}(j(\omega))$ である。故に, (2) より $\varphi^*(\omega) - \varphi^*(\omega)^{-1} \equiv 0 \pmod{\sqrt{5}}$ となり $\sqrt{5}^{-1}(\varphi^*(\omega) - \varphi^*(\omega)^{-1}) = B^3$ (B は $\mathbb{Q}(j(\omega))$ の整数) とおける。従って $\varphi(\omega)^\sigma = \varphi^*(\omega)^{-1}$ となるから $\varphi^*(\omega) = \frac{A+B^3\sqrt{5}}{2}$ とおくと A も $\mathbb{Q}(j(\omega))$ の整数であり $A^2 - 5B^6 = 4$ が得られる。

(ii) $d \equiv 0 \pmod{8}$ のとき, $i = \sqrt{-1} \notin K_1$ かつ $i \in K_2 \subset K_{10}$ である。従って $K_1(i, \zeta_5)$ が K_{10} に含まれる K_1 上の 8 次の拡大体となり, (4) より $i^2\varphi^*(\omega)$ は実単数であるから $i^2\varphi^*(\omega) \in \mathbb{Q}(j(\omega), \sqrt{d}, \sqrt{5})$ が得

られる。故に (i) の場合と同様にして, $i^{-1}\varphi^*(\omega) = \frac{A+B^3\sqrt{5}}{2}$ (A, B は $\mathbb{Q}(i(\omega), \sqrt{d})$ の整数) となり $A^2 - 5B^6 = -4$ が成り立つ。

(iii) $d = -4m$, $m \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, $i \in K_1$ である。 $\varepsilon_m \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の基本単数とし, $E = \begin{cases} \varepsilon_m & (N\varepsilon_m = -1) \\ \sqrt{\varepsilon_m} & (N\varepsilon_m = 1) \end{cases}$ とおくと $K(\sqrt{E})/K$ はアーベル拡大であり, $E \in K_1$, $\sqrt{E} \notin K_1$ である。従って $K_1(\sqrt{E}, \zeta_5)$ は K_1 上の 8 次の拡大体である。また $\alpha = \frac{\sqrt{E} + i\sqrt{E}^{-1}}{1+i}$ とおくととき, $K_1(\sqrt{E}) = K_1(\alpha)$ かつ $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{2}$ となる。このことから導きと計算して $K_1(\sqrt{E}) = K_2$ が得られ, $K_1(\sqrt{E}, \zeta_5)$ が K_{10} に含まれることが判る。故に (ii) の場合と同じく $i^{-1}\varphi^*(\omega) = \frac{A+B^3\sqrt{5}}{2}$ (A, B は $\mathbb{Q}(i(\omega), \sqrt{E})$ の整数) となり $A^2 - 5B^6 = -4$ が成り立つ。

参考文献

- [1] C. L. Siegel, Zum Beweise des Starkeschen Satzes, *Inventiones Math.*, 5 (1968), 180-191.
- [2] H. Löhngen, Zur komplexen Multiplikation, *Math. Ann.*, 111 (1935), 302-328.
- [3] H. M. Stark, Values of L-functions at $s=1$. I. L-functions for quadratic forms, *Adv. in Math.*, 7 (1971), 301-343.