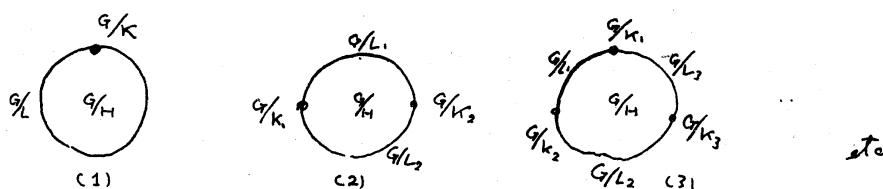


余次元 2 の主軌道をもつ球面の変換群

新潟大理 渡部 剛

G は compact connected Lie group, M は n 次元球面とし, G の M 上への可微分作用で, effective 2-codimension 2 の principal orbit G/H , 少なくとも 2 つの singular orbit をもつものを考える. orbit の様子は orbit space $M^* = M/G$ が 2 次元四角板から次のように図示できる.



$i \neq j$ により $G/L_i = G/L_j$, $G/K_i = G/K_j$ となってもよい. ρ を related singular orbit G/K_i の個数とする.

次の結果が得られる.

THEOREM. (G, M) は上の性質をもつ変換群とする. $\rho = 1$ ならば $G = U(2)$, $M = S^6$ で次の作用と同等である.

$U(2) \xrightarrow{\theta} SO(3)$ を kernel が $U(2)$ の中心である準同型とすると $SO(3)$ の $\mathbb{R}^3$ への自然な作用から θ で導かれる $U(2)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用

と $U(2)$ の $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ への自然な作用との積により得られる $U(2)$ の $S^6 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ への作用.

REMARK 1. Theorem における $U(2)$ の S^6 への作用の orbit は $H=1$, $L=U(1) \times 1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2) \right\}$, $K=U(1) \times U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in U(2) \right\}$ となる.

以下定理の証明の概略を示す. 次の事実が知られる ([B]₁, [B]₂, [U]).

$$(a) \quad M = M_1 \cup_f M_2$$

M_1 は G/L 上の equivariant l -disk bundle, M_2 は G/K 上の equivariant k -disk bundle で, $f: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ は equivariant diffeomorphism である.

$$(b) \quad \dim G/K < \dim G/L.$$

$$(c) \quad G/K, G/L \text{ は simply connected, 従って } K, L \text{ は connected である.}$$

(d) G/K における slice 表現から引き起こされる K の S^{k-1} への作用は codimension 1 の principal orbit $\mathcal{K}_1 \subset 2$ と a singular orbits $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ (L, L_2 は G における L と共役な K の subgroup) をもつ.

$$(e) \quad \chi(M) = \chi(G/K) + \chi(G/L) - \chi(\partial M_1) \quad (\chi(\cdot) \text{ は Euler characteristic}).$$

次の Lemma が得られる.

$$\text{LEMMA 1.} \quad n+1 = k+l \quad \text{で} \quad G/K = S^{l-1}, \quad G/L = S^{k-1}.$$

証明は $M_0 = \partial M_1 \cong \partial M_2$ とおくと Mayer-Vietoris exact sequence により.

$$H^i(G/K) \oplus H^i(G/L) \rightarrow H^i(M_0) \quad \text{が} \quad 0 < i < n-1 \quad \text{で同型, 従って} \quad \partial M_1 \cong S^{l-1} \times G/L$$

$$\partial M_2 \cong S^{k-1} \times G/K \quad (\text{spaces } X, Y \text{ について} \quad X \cong Y \text{ は } H^*(X; \mathbb{Z}) \cong H^*(Y; \mathbb{Z})$$

で表わす) が得られ, Lemma はこれよりすぐ出る.

以下 G の M の作用は *almost effective* と仮定する。従って, $G = T^r \times G_1 \times \cdots \times G_s$ (T^r は r -次元トーラス, G_i は simply connected simple Lie group) とおいてもよい。

LEMMA 2. n は even である。

証明. n が odd であると仮定する。 l が odd である場合は $[W]$ の結果により $k/H = k/L_1 \times k/L_2$ となる。これより k が even, 従って $n+1 = k+l$ は奇数。
 l が even であるとき $[W]$ により次の 5 の場合が起り得る。

I. $k/L_1 = k/L_2 = S^{k-l}$, $k/H = k/L_1 \times k/L_2$

II. $k/L_1 = k/L_2 = \text{pt.}$

III. K が S^{k-l} の作用の ineffective kernel の identity component $\in W$ とする;
 $K = K_1 \circ W$ (semi-direct product), $H_1 = H_1 \circ W$, $L_1 = L_1' \circ W$. K_1 は $k/2$ の center が trivial な compact simple Lie group, $H_1 = T^2$, L_1' は $T^1 \times A_1$ と local isomorphic ($L_1' \sim T^1 \times A_1$ とする)。

IV. $k=14, l=6, K_1 = A_1 \times C_3, H_1 \sim C_1 \times C_1 \times C_1, L_1' \sim C_1 \times C_2$.

V. $k=26, l=10, K_1 = F_4, H_1 = D_4, L_1' = B_4$.

I は起り得ない。実際 $k=2l-2$ の fibre bundle $k/L_1 = S^{l-2} \rightarrow k/H = S^{k-l} \rightarrow G/H = S^{l-1}$ となるのは $l > 2$ より不可能。

II は起り得ない。III ~ V の場合は G, L が semi-simple となるが、III は不可能。 G の G/H の自然な作用の ineffective kernel の identity component とする。 $W \cap Z$ が G の normal subgroup となり、従って $(W \cap Z)_0 = 1$, 故に $Z = K_1$ 或 $Z = 1$ 。IV の場合 $Z = 1$ のとき

$G/K = S^5$ より $G = D_3, A_2$, 即ち $G/L = S^{13}$ が transitive に作用し得る。
 い。 $Z = K_1$ のとき, $G = G' \times K_1$, $G' = D_3, A_2$, $K_1 \sim C_3$. G は $G/L = S^{13}$ が
 transitive になり得ない。 V と同様な議論で不可能。

n が even とする。 (e) より r が even, l が odd と仮定する。 $n = 4r$ かつ $l = 2r+1$ とおく。
 更に $[W]$ の結果より $K/H = K/L_1 \times K/L_2$, $H \cong L_1 \cap L_2$ となり $l = 2r+1$ とおく。
 $r = 4r$, $n = 6r$ が得られる。

$V \in G$ の G/L への自然な作用の ineffective kernel の identity component とする。
 $G = G' \times V$, $L_L = (L_1 \cap G') \circ V$.

LEMMA 3. V の maximal torus T_V とする $T_V \subset H$.

証明. B は singular orbits の union とする。 $B \subset F(T_V, M)$ は明らか。

$B = F(T_V, M)$ と仮定すると B は $4r$ -dim. integral homology sphere かつ $B - G/K$
 は $S^1 - \{pt\}$ 上の G/L の fibre とする fibre bundle, 従って $B - G/K \cong G/L \times \mathbb{R}^1$.
 両辺の homology を考えて矛盾。 故に $B \subsetneq F(T_V, M)$ 故に $T_V \subset H$. $\square$

以下 $r > 2$ と仮定する。

LEMMA 4. $U \in G$ の G/K への自然な作用の ineffective kernel の identity component とする U の K/L への自然な作用は non-transitive.

証明は $[U]$ と $[G/K]$ の intersection number を用いて示す。 U の simple factor は r 個 $r \leq 1$ となる。 $L'_1 = L_1 \cap G''$ とおく。 $L'_1 \cup G'' = G'' \times U$.
 このとき $L'_1/H = L'_1/L_1 \cap H$ が示される。

PROPOSITION 5. G の G/L への自然な作用は almost effective とする。

証明. $G = G' \ltimes V = G' \ltimes U$ (V, U は G' の G' 不変部分群). $L_1 \subset K$ より V

$\subset U$. 従って $G' \subset G$. $G' \cap L_1$ は L_1/H に transitive; $S^{2r-1} = L_1/H = L_1 \cap G' / L_1 \cap G' \cap H$.

従って $\text{rk}(L_1 \cap G') = \text{rk}(L_1 \cap G' \cap H) + 1 = \text{rk}(H \cap G') + 1$. $(H \cap G')_0 \times (H \cap V)_0$.

は H の normal subgroup であり LEMMA 3 より $\text{rk}((H \cap G')_0 \times (H \cap V)_0) = \text{rk} H$ である.

よって $H = (H \cap G')_0 \times (H \cap V)_0$. 従って $L_1/H = G' \cap L_1 / G' \cap H \times V/H \cap V$

より $V = H \cap V$ 即ち $V \subseteq H$. 故に $V = 1$ $\square$

$G/L_1 = S^{4r-1}$ より G の可能な r は $D_{4r}, A_{2r-1}, A_{2r-1} \times T^1, C_r, C_r \times T^1,$

$C_r \times C_1, B_4$ ($r=4$) であり $G/K = S^{2r-1}$ に transitive に作用し得る.

...

$r=2, 1$ の場合を分ける.

$r=2$ のとき; $G/L = S^7, G/K = S^4, L/H = S^3, K/H = S^3 \times S^3$.

fibre bundle $L/H \rightarrow G/H \rightarrow G/L$ より $\pi_1(G/H) = \pi_2(G/H) = 1$. 従って G は semi-

simple. $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ とおくと $\text{rk} G = \text{rk} K$ より $K = K_1 \times \cdots \times K_n$ ($K_i \subseteq G_i$ であり $\text{rk} K_i = \text{rk} G_i$).

G の G/L への自然な作用の ineffective kernel の

identity component は $G_{n+1} \times \cdots \times G_n$ とおくと $K = 1$ であり得る. U

は G の G/K への自然な作用の ineffective kernel の identity component とする.

よって $K=1$ のとき $U = G_1 \times \cdots \times G_n$. $G_1 = D_4, A_3, C_2, B_3$ のいずれかであり得る.

よって $G/K = G_1/H_1 = S^4$ となり得る. $K=2$ のとき

も同様にして議論する.

$r=1$ のとき; $G/L = S^3, G/K = S^2, K/L = S^1, L/H = S^1$.

よって $G = T^1 \times G_1 \times \cdots \times G_n$, H_0 は semi-simple であり得る.

が容易にわかる。 $V \in G$ の G/L への自然な作用の ineffective kernel の identity component とする。 $G = G' \times V$, $L = (L \cap G')_0 \cdot V$.

容易に $G' = A_1 \times A_1$, A_1 は $A_1 \times T^1$ となることを示すことができる。 $G' = A_1 \times A_1$, A_1 となるならば、 π は π を射影する。 $G' = A_1 \times T^1$ のとき $G = A_1 \times T^1$, $K = T^1 \times T^1$, $L = T^1$, $H_0 = 1$ が示される。従って $G = U(2)$ とおけば、 $K = U(1) \times U(1)$, $L = U(1) \times 1$. G の M への作用の ineffective kernel を N とおけば、 $N \subseteq Z(G) \cap L$. したがって $N = 1$. K の subgroups L_1, L_2 として L は G の中で L に共役な $L_1 \cap L_2 = 1$ となるものを示すから $H = L_1 \cap L_2 = 1$. 以上により定理の orbit structure に関係する部分の証明を完了した。

次に continuous action として G の orbit structure をもつものを示す。 π は equivalent とあることを示す。

orbit space $M^* \in \{z \in \mathbb{C}^1; |z| \leq 1\}$ と同一視する。 $M_+^* = \{x^* \in M^*; \operatorname{Im} x^* \geq 0\}$, $M_-^* = \{x^* \in M^*; \operatorname{Im} x^* \leq 0\}$ とおくと cross section

$$\varphi_+ : M_+^* \rightarrow M \quad G_{\varphi_+(x^*)} = \begin{cases} H & |x^*| < 1 \\ L & |x^*| = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_- : M_-^* \rightarrow M \quad G_{\varphi_-(x^*)} = \begin{cases} H & |x^*| < 1 \\ L & |x^*| = 1, \operatorname{Re} x^* \neq 0 \\ K & |x^*| = 1, \operatorname{Re} x^* = 0. \end{cases}$$

が存在することは示すことができる。 $A^* = M_+^* \cap M_-^*$ とおくと、

$$x^* \in A^*, |x^*| < 1 \text{ ならば, } \exists f(x^*) \in G; f(x) \varphi_-(x) = \varphi_+(x).$$

即ち continuous map $f : (-1, 1) \rightarrow G$ が得られる。明らかに K は

$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) \in M_L$ である。homotopy $h_t : U(2) \rightarrow U(2)$ を $h_0 = \text{id}$, h_1 は M_L の点 f を M_L に移すものとする。 $f' = h_1 \circ f$ とおくと f' は f と homotopic である。homotopy $h_t \circ f$ により $\lim_{x \rightarrow \pm 1} (h_t \circ f)(x) \in M_L$ である。従って f' は $f' : [-1, 1] \rightarrow G$ であり $f'(\pm 1) \in M_L$ である。 f map の $(-1, 1)$ 上の制限は homotopic である。 φ_+ の comparison function とする。

LEMMA 5. $f_0, f_1 : [-1, 1] \rightarrow G$ を $f_i(\pm 1) \in M_L$ であるとする。 f_0, f_1 により $F : [-1, 1] \times I \rightarrow G$; $F(x, t) = f_i(x)$ $i=0, 1$
 $F(\pm 1, t) \in M_L$ $0 \leq t \leq 1$.

上の f_0, f_1 は $S^1 = [-1, 1]/\{\pm 1\} \rightarrow G/M_L = S^2$ を induce する。 S^1 は S^2 の π_1 である。

LEMMA 5 の f_0, f_1 は homotopic rel. $\{\pm 1\}$ である。

LEMMA 6. $f_0, f_1 : [-1, 1] \rightarrow G$, $f_i(\pm 1) \in M_L$ を homotopic rel. $\{\pm 1\}$ とする。 $f_0 \cdot f_1^{-1} : [-1, 1] \rightarrow G$ は constant map に homotopic rel. $\{\pm 1\}$ である。

f_0, f_1 の homotopy を $F : [-1, 1] \times I \rightarrow G$ とすると $H(x, t) = F(x, t) \cdot F(x, 1)^{-1}$ とおくと $f_0 \cdot f_1^{-1}$ は constant map $e : [-1, 1] \rightarrow G : x \mapsto 1$ の homotopy である。

LEMMA 7. cross sections $(\varphi_-^0, \varphi_+^0), (\varphi_-^1, \varphi_+^1)$ の comparison functions φ_- と φ_+ は f_0, f_1 と φ_- は $f_0 \simeq f_1$ rel. $\{\pm 1\}$ である。

$$\exists \varphi : M_+^* \rightarrow G : \varphi(M_+^* \cap B^*) \subset M_L.$$

$M_+^* \simeq [-1, 1] \times I$ より LEMMA 6 の H を用いて φ を作る。

$(\varphi_-^0, \varphi_+^0), (\varphi_-^1, \varphi_+^1)$ は LEMMA 7 の cross sections である。 $\bar{\varphi}_+^1(x) = \varphi(x) \varphi_+^1(x)$ とおくと $\bar{\varphi}_+^1 : M_+^* \rightarrow M_L$ は cross section であり $(\varphi_-^1, \bar{\varphi}_+^1)$ の

comparison function は 明らか 1) に f_0 である。

$C_0 = \text{Im } \varphi_-^0 \cup \text{Im } \varphi_+^0$, $C_1 = \text{Im } \varphi_-^1 \cup \text{Im } \varphi_+^1$ と $2 < \infty$, C_0, C_1 は M の閉集合
 かつ $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ である。 $\psi: C_0 \rightarrow C_1$ は $\psi(\varphi_-^0(x)) = \varphi_-^1(x)$, $\psi(\varphi_+^0(x))$
 $= \varphi_+^1(x)$ と定義すれば ψ は連続である。

$$\psi(f_0(x) \varphi_-^0(x)) = \psi(\varphi_-^0(x)) = \varphi_-^1(x) = f_0(x) \varphi_-^1(x) = f_0(x) \psi(\varphi_-^0(x))$$

があり 従って、次の結果より 定理の equivalence の部分が示される。

PROPOSITION 8. G is compact Lie group, $X_1, X_2 \in \text{Hausdorff } G\text{-spaces}$

$C_i \subset X_i$ is a closed subset such that $C_i = X_i$ ($i=1,2$) is not true and $\psi: C_1 \rightarrow C_2$

such that $g \in G, x \in C_1, gx \in C_1$ and $\psi(gx) = g\psi(x)$ is true.

Then ψ is a homeomorphism and equivariant map $\hat{\psi}: X_1 \rightarrow X_2$ exists.

証明 $[B]_1, [B]_2$

REMARK 2. 定理の equivalent が可微分作用とあるが、これは

を示す必要はない。 $n=2$ のとき $n \geq 16$ の orbit structure が決定する。

である。

文献

[B]₁ Bredon, G. E.; Introduction to compact transformation groups. Academic Press, 1972

[B]₂ Bredon, G. E.; Transformation groups on spheres with two types of orbits, Topology 3 (1965) 103-113

[U] Uchida, F.; Compact Transformation groups on complex projective spaces

[W] Wang, H. C.; Amer. J. Math. 82 (1960) 698-748.