

主要型作用素に対する analytic hypoellipticity について.

名城大理工 松澤 忠人

擬微分方程式に対して, hyperfunction の空間で解析的準
積同値性をとらえて考えた. 以下の方法は, 殆んどその
より Schwartz 超関数や ultradistribution に対しても適用され
る.

以下 K は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とし, $A'[K]$ は K 内
に support をもつ analytic functional の集合とする.

n 次元の熱核は

$$E(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) & t > 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

つまり $x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ である. $u \in A'[K]$ に対し

$U(x, t) = u_y(E(x-y, t)) = \int E(x-y, t) u(y) dy$ は $\mathbb{R}_+^{n+1}$ で熱方程
式をみたし, 次の意味で u を初期条件とする: とか判る:

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\Omega} U(x, t) \varphi(x) dx = u(\varphi) \quad , \quad \varphi \in A = A(\mathbb{C}^n).$$

但し Ω は $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ なる任意の有界開集合である,

主としてこのような極限操作を基にして考える. $u \in A'[K]$

に対して上記の defining function $U(x, t)$ は x についての整関数である.

$WF_A(u)$ の同値性をこの定義を述べる:

(a) $(x_0, \xi_0) \in T^*(R^n) \setminus 0$ に対して $(x_0, \xi_0) \notin WF_A(u) \Leftrightarrow$
 x_0 の近傍 Ω と $-\xi_0$ の近傍 V 及び定数 $C, C > 0$ が存在して

$$(2) \quad |U(x+i\xi, t)| \leq C \exp\left(\frac{\xi^2 - C}{+t}\right), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in V.$$

(b) Bros - Lagolnitzor 条件:

$$(3) \quad |u_y(\exp[-i\langle y, \xi \rangle - (\beta - y)^2 \frac{|\xi|}{2}])| \leq C e^{-c|\xi|}, \quad (\beta, \xi) \in \Gamma.$$

==> Γ は (x_0, ξ_0) のある近傍 $\subset T^*(R^n) \setminus 0$.

さて、解析的準微分性の証明において基本となるのは、
 次のような局所表現公式である: $u \in A'[K], x_0 \in R^n, \varepsilon > 0$ に対して

$$(4) \quad u(x) = (2\pi)^{-n} \iint_{\substack{|\beta - x_0| < 2\varepsilon \\ |\xi| \geq B}} u_y(\exp[i\langle x - y, \xi \rangle - (\beta - y)^2 \frac{|\xi|}{2}]) \left(\frac{|\xi|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} d\beta d\xi + w_\varepsilon(x),$$

==> $w_\varepsilon(x) \in \mathcal{B}(\Omega), (K \subset \Omega), w_\varepsilon(x)$ は $|x - x_0| < \varepsilon$ で解析的.

(条件 (3) と見比べていただけでいい.)

更に, $a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times R^n_\xi)$ を解析的擬微分作用素 $a(x, D)$ の symbol とするとき, $u \in A'[K], K \subset \Omega, x_0 \in R^n, \varepsilon > 0$ に対して

$$(5) \quad a(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint_{\substack{|\beta - x_0| < 2\varepsilon \\ |\xi| \geq B}} u_y(\exp[i\langle x - y, \xi \rangle - (\beta - y)^2 \frac{|\xi|}{2}]) a(x, \xi) \left(\frac{|\xi|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} d\beta d\xi \\ + w_\varepsilon(x).$$

(4) や (5) のような表現公式を道具として、種々の作用素の (解析的) 準微分性を証明することはできる。

1例として1階の主要型擬微分作用素について述べる。

まず $N > 1$, $N = n+1$, とし $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
 $(x, t) \in \mathbb{R}^N$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N$ のように
 書くことにする。そして $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\Omega} = \Omega \times \{t\}$
 $0 < \mu < 1$, $\mu > 0$, とする。次の形の作用素を考える:

$$(6) \quad L = D_t - \lambda(x, t, D_x) + \lambda_0(x, t, D_x),$$

$$= \text{すなわち} \quad \lambda(x, t, \xi) \in S_{1,0,1}^1(\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}_\xi^n), \quad \lambda_0(x, t, \xi) \in S_{1,0,1}^0(\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}_\xi^n)$$

これらの記号については例えば [18], [19] などを見られたい。

仮定 1. $(\xi_0, \tau_0) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ であって

$$(7) \quad \tau_0 = \lambda(0, 0, \xi_0), \quad \xi_0 \neq 0$$

とし, $\lambda(x, t, \xi)$ は ξ_0 の conic subd $V' \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に
 おいて ξ に関して1次斉次とする。

仮定 2. $\lambda_0(x, t, \xi)$ は必ずしも ξ に関して斉次ではな
 いか 正定数 C_0, C_1, B が存在して

$$(8) \quad |\lambda_{0|\beta}^{(\alpha)}(x, t, \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} \alpha! \beta! |\xi|^{-|\alpha|}, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega},$$

$$\xi \in V', \quad |\xi| \geq B.$$

仮定 3. (Nirenberg-Treves 条件). $a(x, t, \xi) = \operatorname{Re} \lambda(x, t, \xi)$,
 $b(x, t, \xi) = \operatorname{Im} \lambda(x, t, \xi)$ とするとき, $b(x, t, \xi)$ は次の方程式系の積分曲線 ($C \hat{\Omega} \times V$) に沿って高々 2 次偶数次の零点をもつ:

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = -\operatorname{grad}_{\xi} a(x, t, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = \operatorname{grad}_x a(x, t, \xi).$$

以上の条件の下にまず L の右パラメトリクス $K \in \operatorname{Treves}$ [23] の手順で構成する:

$$(10) \quad Ku(x, t) = (2\pi)^{-N} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle + i(t-s)\tau} K(x, t, \xi, \tau) u(y, s) dy ds d\xi d\tau,$$

$$u \in A'[\hat{K}], \quad \hat{K} \ll \tilde{\Omega}.$$

シンボル $K(x, t, \xi, \tau)$ は次の形で求まる:

$$(11) \quad K(x, t, \xi, \tau) = \int_{-T}^T e^{i\varphi(x, t, t', \xi) - i\tau(t-t')} k(x, t, t', \xi) dt',$$

$$(x, t, \xi, \tau) \in \tilde{\Omega} \times V.$$

ここで V は (ξ_0, τ_0) の $R^N \setminus \{0\}$ における conic nbd でその R^n への射影が V' となるものである。 φ は複素数値の phase であるがよい性質をもっている。 $k(x, t, t', \xi)$ は解析的なシンボルで次の形の評価をみたす:

$$(8)' \quad |k_{(p)}^{(\alpha)}(\alpha, t, t', \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} \alpha! \beta! |\xi|^{-|\alpha|}, \quad (\alpha, t, t') \in \tilde{\Omega} \times \\ \times \{t' < \mu\}, \quad \xi \in V', \quad |\xi| \geq B|\alpha|.$$

以上のように準備の下に次の3項のような性質を導くことができる。

(i) 作用素 $K(\alpha, t, D_\alpha, D_t)$ の核関数 $\mathcal{K}(\alpha, t, y, s)$ は $(\alpha, t) \neq (y, s)$ なる所で $\mathcal{K}(\alpha, t, y, s)$ について解析的。

($(0, 0, 0, 0)$ のある近傍で)。

(ii) $K(\alpha, t, D_\alpha, D_t)$ と ${}^t K(\alpha, t, D_\alpha, D_t)$ はそれぞれ (ξ_0, τ_0) , $(-\xi_0, -\tau_0)$ 方向に analytic pseudo-local である。

$$(iii) \quad LK = \delta + Q,$$

となって Q は (ξ_0, τ_0) 方向に analytic regularizer.

以上で ${}^t L$ の $(-\xi_0, -\tau_0)$ 方向への解析的準微分性か示されたことになる。

REFERENCES

- [1] Aronszajn, N, Preliminary notes for "Traces of analytic solutions of the heat equation" and the traces of analytic solutions of the heat equation, Colloque International C.N.R.S. sur les équations aux dérivées partielles linéaires, 2-3(1973), 5-68.
- [2] Bony, J.M., Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-1977, Exposé No.3.
- [3] Bros, J. and D. Iagolnitzer, Support essentiel et structure analytique des distributions, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, Exposé No.18.
- [4] Chen Dong and T. Matsuzawa, S-spaces of Gel'fand-Shilov and differential equations, to appear in Japan. J. Math. (1993).
- [5] Gel'fand, I. M. and G. E. Shilov, Generalized functions, Vol.2, Academic Press, New York-London, 1968.
- [6] Hanges, N., Propagation of analyticity along real bicharacteristics, Duke Math. J., Vol.48. No.1, (1981), 269-277.
- [7] Hashimoto, S., Matsuzawa, T. and Y. Morimoto, Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey, Comm. in Part. Diff. Eqs., 8(12), (1983), 1277-1289.
- [8] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- [9] Kashiwara, M., Kawai, T. and T. Kimura, Foundation of the

theory of algebraic analysis (in Japanese), Kinokuniya Shoten, Tokyo, 1980.

- [10] Kawai, T. and T. Matsuzawa, On the boundary value of the solution of the heat equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 25, (1989) 491-498.
- [11] Kim, K. W., Chung, S. Y. and D. Kim, Fourier hyperfunctions as the boundary values of smooth solutions of the heat equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29(1993), 289-300.
- [12] Komatsu, H., Ultradistributions I; Structure theorem and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20, (1973) 25-105.
- [13] ———, Ultradistributions II; The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 24, (1977), 607-628.
- [14] ———, Introduction to the theory of generalized functions (in Japanese), Iwanami Shoten, Tokyo, 1978.
- [15] Martineau, A., Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki 1960-1961.
- [16] Matsuzawa, T., Gevrey hypoellipticity of a class of pseudo-differential operators, Tôhoku Math. Journ. 39(1987), 447-464.
- [17] ———, Hypoellipticity in ultradistribution spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 34, No.3, (1987), 779-790.
- [18] ———, A calculus approach to hyperfunctions I, Nagoya Math. J., Vol.108, (1987), 779- 790.
- [19] ———, A calculus approach to hyperfunctions II, Trans. A. M. S. Vol.313, No.2, (1989), 619-654.
- [20] ———, A calculus approach to hyperfunctions III, Nagoya Math.

- J., Vol.118, (1990), 133-153.
- [21] Sjöstrand, J., Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, Comm. in Part. Diff. Eqs., 5 (1), (1980), 41-94.
- [22] ———, Singularités analytiques microlocales, Astérisque, 95, (1982), 1-166.
- [23] Treves, F., Analytic-hypoelliptic partial differential equations of principal type, Comm. Pure Applied Math., Vol. 24, (1971), 537-570.
- [24] ———, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, Vol.1 and 2, Plenum Press, New York-London, 1980.