

ドリフト波乱流の発達過程における動的スケーリング則

九州大学理学部物理学科

渡邊 威 (Takeshi Watanabe)、藤坂博一 (Hirokazu Fujisaka)

九州工業大学情報工学部制御システム工学科

岩山 隆寛 (Takahiro Iwayama)

1 はじめに

一般に十分発達した乱流は3次元であるが、地球の大気、海洋の大規模運動や強い一様磁場中におかれた電磁流体の運動は近似的に2次元運動として記述できる。それゆえ1960年代以降、2次元乱流の研究が理論的、数值的に盛んに行なわれるようになり、3次元乱流とは異なる独特の性質を持つことがわかってきた。特に3次元一様等方乱流におけるKolmogorovのエネルギーカスケード理論(K41)[1]に対して、2次元乱流系は二つの保存量、エネルギーとエントロピー、の二重カスケード過程によりエネルギースペクトルが形成されることが調べられている[2, 3, 4]。特に注目すべきことは、3次元乱流ではエネルギーが高波数側にカスケードするのに対し、2次元乱流ではエネルギーは低波数側にカスケードするという点である。その結果時間が経ってエネルギーは空間的に大きな渦に集中し、大規模構造の形成による自己組織化が引き起こされる。このことは2次元乱流の波数空間における特色であり、3次元乱流と大きく異なる点の一つである。

さらに1980年代になって盛んに行なわれるようになった乱流の直接数値計算の研究により、乱流場における実空間の構造が注目されるようになった。特に2次元減衰性Navier-Stokes(NS)乱流において、コヒーレントな渦が自己組織化し、長い時間安定に存在し続けることが分かった[5, 6, 7]。さらにこのコヒーレントな渦が系のダイナミクスを支配しており、同符号の渦は合体し、より大きな渦となる。エネルギーの輸送はこのダイナミクスと密接につながっていると考えられる。

最近、2次元乱流系の一つであるCharney-Hasegawa-Mima(CHM)方程式が理論的[8]、数值的[9, 10]に詳しく調べられている。この方程式は一様で強い磁場がプラズマ中に印加されている時、磁場に垂直な面内における静電ポテンシャルの2次元的な変動を記述した方程式であり[11]、又、惑星大気において地衡流平衡にある流れの時間発展を近似的に記述する方程式でもあり、準地衡流渦位方程式と呼ばれていて[12]、波の効果が無視できるほどの強い乱流状態では、次の様に書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi) + J(\phi, \nabla^2 \phi) = 0. \quad (1.1)$$

ここで、 $J(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$ は Jacobian operator を表す。(1.1) 式は $\lambda \rightarrow 0$ の極限で非粘性の場合の渦度方程式に完全に一致する。つまり λ^{-1} より非常に小さいスケールでは CHM 方程式は2次元 NS 方程式と同じダイナミクスを示し、2次元 NS 乱流の統計的性質がこのスケールでは成り立つと考えられる。逆に言えば、 $\lambda \neq 0$ の場合は CHM 方程式に特徴的な

スケールが存在することになり, λ^{-1} より大きなスケールでは CHM 方程式に特徴的なダイナミクスと統計的性質が見られると考えられる. このことは次の様に考えても良い. 今 (1.1) 式に $(\lambda^2 - \nabla^2)^{-1}$ を演算すると,

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J(\phi(\mathbf{r}', t), \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \phi(\mathbf{r}', t)) d\mathbf{r}', \quad (1.2)$$

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\lambda^2 + |\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.3)$$

と書き換えられる. ただし $K_0(z)$ は第二種の変形 Bessel 関数を表す. (1.3) 式は ϕ -field での interaction kernel を表し, λ^{-1} は相互作用の及ぶ範囲と考えて良い. $\lambda \rightarrow 0$ の極限で相互作用の及ぶ範囲は無限大になり, 一方 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限では相互作用の及ぶ範囲は局所的になり, $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lambda^{-2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ となる. この考え方は, 乱流場における渦のダイナミクスを考える時, 渦間相互作用の及ぶ範囲が λ^{-1} 程度であることと密接につながってくるため, 重要になる. CHM 方程式に特徴的な渦のダイナミクスは, 文献 [10] の中で渦が格子状のパターンを形成することが報告されており, vortical quasicrystal と呼ばれている.¹ これは λ^{-1} のスケールで渦間相互作用が遮蔽されるためであり, λ^{-1} より大きなスケールの渦のダイナミクスの統計的性質は 2 次元 NS 方程式で良く知られたものとは大きく異なっていると考えられる.

本研究では, λ より大きな波数 k_f を中心とする狭いバンド領域でランダムに注入されるエネルギーが逆カスケードにより大きなスケールの乱流揺らぎが形成される過程を調べる. このような状況においては乱流揺らぎの発展過程は二つの時間領域に分けられる. まず, k_f で注入されたエネルギーの一部は, 順カスケードで高波数側に流れ, 残りは逆カスケードで低波数側に流れていく. エネルギースペクトルは一山構造を持つ. ピークが λ に達するまでの時間を t_λ とすると, $t < t_\lambda$ では NS 方程式の特徴であるコヒーレントな渦が形成される. 渦の配置はランダムであるが, $t > t_\lambda$ では渦が準結晶状態を形成し, 時間発展はゆるやかになる. このために, 低波数側へのエネルギーの輸送もゆるやかになる. 本研究では特に, $k \ll \lambda$ での乱流揺らぎの発達と準結晶構造の統計性の時間変化を調べることを目的とする.

2 二重カスケード理論とエネルギースペクトルの構造

CHM 方程式が 2 次元 NS 方程式から導かれる渦度方程式に類似した方程式であることに注目し, 2 次元乱流の二重カスケード理論と同様のカスケード理論を議論する.

2.1 保存則

CHM 方程式 ((1.1) 式) は, 2 次元 NS 方程式と似て 2 つの 2 次の保存量, 全エネルギー E と全ポテンシャルエントロフィー U ,

$$E = \frac{1}{L^2} \int -\frac{1}{2} \phi \xi \, d\mathbf{r} = \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + \lambda^2 \phi^2] \, d\mathbf{r}, \quad (2.1)$$

¹ここで言う quasicrystal(準結晶) は, 固体物理のものとは異なり, 疑似結晶あるいは結晶的構造という意味である.

$$U = \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} \nabla^2 \phi \xi \, d\mathbf{r} = \frac{1}{L^2} \int \frac{1}{2} [(\nabla^2 \phi)^2 + \lambda^2 (\nabla \phi)^2] \, d\mathbf{r} \quad (2.2)$$

を持つことが簡単に示される. L^2 は今考えている領域の面積を表し, $\xi(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$ はポテンシャル渦度と呼ばれる.

2.2 エネルギースペクトルのスケーリング則

(2.1), (2.2) 式は ϕ のフーリエ成分 $\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ を用いて書き換えると

$$E = \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + \lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.3)$$

$$U = \sum_{\mathbf{k}} k^2 (k^2 + \lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.4)$$

となる. 2次元 NS 乱流における二重カスケード過程との類似から, ドリフト波乱流に対するエネルギースペクトルは E と U の二重カスケード過程により形成され则认为られ, Kolmogorov 型の次元解析から次のように得ることができる [8, 9].

まず, CHM 方程式 ((1.1) 式) のフーリエ成分表示

$$\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} = -\frac{1}{k^2 + \lambda^2} \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{k}')_z |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'} \quad (2.5)$$

から, $\phi_{\mathbf{k}}$ の次元解析的スケーリングにより

$$\phi_{\mathbf{k}} \sim \lambda^2 k^{-4} t^{-1} f(k/\lambda) \quad (2.6)$$

となる.² ただし $f(x)$ は無次元関数で, 波数 λ におけるスケーリングの振舞い方の違いを考慮したものであり, 次の様に与えられる.

$$f(x) = \begin{cases} \text{finite} & (x \ll 1) \\ x^2 & (x \gg 1) \end{cases} \quad (2.7)$$

(2.3), (2.4), (2.6) 式からエネルギー輸送率 ϵ とポテンシャルエンストロフィー輸送率 η はそれぞれ

$$\epsilon \sim E/t \sim \lambda^6 k^{-8} \tau_E^{-3} \tilde{f}(k/\lambda), \quad (2.8)$$

$$\eta \sim U/t \sim \lambda^6 k^{-6} \tau_U^{-3} \tilde{f}(k/\lambda) \quad (2.9)$$

となる. ただし $\tilde{f}(x)$ は $\tilde{f}(x) = (1 + x^2)f(x)^2$ で定義される無次元関数である. ここではエネルギーが逆カスケードする領域とポテンシャルエンストロフィーがカスケードする領域で ϵ, η は一定であると仮定して, 両カスケード領域で特徴的な時間スケール τ_E (eddy turnover time) と τ_U を用いている. (2.8), (2.9) 式から直ちに

$$\tau_E \sim \lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3} g(k/\lambda), \quad \tau_U \sim \lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2} g(k/\lambda) \quad (2.10)$$

² この次元解析は普通の次元解析とは多少異なる. なぜなら k と λ は同じ次元を持つからである. ここでは k と λ の違いに注意して次元解析を行なった.

と求められる. ただし $g(x) \equiv [\tilde{f}(x)]^{1/3}$ で定義される.³ 今エネルギーを注入する波数を k_f とする. $k < k_f$ の領域はエネルギーの輸送が支配的な領域であり, $k > k_f$ の領域はポテンシャルエンストロフィーの輸送が支配的な領域であるとする. エネルギースペクトル $E(k)$ は (2.3) 式から

$$E(k) \sim \lambda^6 k^{-9} t^{-2} \tilde{f}(k/\lambda) \quad (2.11)$$

で与えられるので, 両カスケード領域でのスペクトルの形は (2.10), (2.11) 式から

$$E(k) \sim \lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3} g(k/\lambda), \quad (2.12)$$

$$E(k) \sim \lambda^2 \eta^{2/3} k^{-5} g(k/\lambda) \quad (2.13)$$

となる. 上に求めたスペクトルの漸近形を決定するため, 次の二つのケースを考える.

$$\lambda \ll k_f, \quad k_f \ll \lambda. \quad (2.14)$$

(2.5) 式の中で $k \ll \lambda$ のケースを考える時, CHM 方程式の λ 依存性は $t \rightarrow t/\lambda^2$ と置き換えることによって時間の変数の中に押し込めることができる. つまりダイナミクスの λ 依存性はあからさまには入ってこない. 考えている波数領域は時間的に定常であり, 時間依存性はない. それで ϕ_k の強度は λ に依存せず, エネルギースペクトル $E(k)$ は λ^2 に比例する. この λ^2 は (2.3) 式の第二項から入ってくるものである. 結果としてスケーリング関数 $g(x)$ は $x \ll 1$ で有限であるべきである. 一方 $k \gg \lambda$ のケースでは CHM 方程式は 2 次元 NS 方程式の特徴を持ち, それで統計量は λ に依存しない. これは $x \gg 1$ で $g(x) = x^2$ になることと同等である. この考察から τ_E, τ_U と $E(k)$ は $k \ll \lambda$ と $k \gg \lambda$ では全く異なることがわかる. これらの結果をまとめたものを表 1 と図 1 に記す.

3 直接数値シミュレーション

乱れの発達過程を詳しく調べるために, CHM 方程式 ((1.1) 式) に外力と散逸を加え直接数値シミュレーションを行なう. 数値計算スキームは擬スペクトル法 [13] を用いた.

3.1 境界条件

乱れの発達過程を数値的に調べるために, ランダムエネルギー注入と散逸を考慮する. エネルギー注入と散逸を入れた CHM 方程式は ϕ のフーリエ成分で書くと次の様である.

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \frac{1}{k^2 + \lambda^2} \left[- \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{k}')_z |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \phi_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'} + \nu (|\mathbf{k}|^2)^p (-|\mathbf{k}|^2 \phi_k) + F(\mathbf{k}, t) \right]. \quad (3.1)$$

散逸項は hyperviscosity で $p = 2$ と置き, 超粘性係数 ν は $\nu = 3.0 \times 10^{-8}$ に固定した. $F(\mathbf{k}, t)$ は波数空間での外力を表し, $51 \leq k_f \leq 54$ の狭いシェルに加える.

³結局 $x \gg 1$ で $g(x) = x^2$, $x \ll 1$ で $g(x) \sim \text{finite}$ の様に振舞う.

○ $\lambda \ll k_f$

	$k \ll \lambda$	$\lambda \ll k \ll k_f$	$k_f \ll k$
τ_E	$\lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3}$	$\epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$	
τ_U	$\lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2}$	$\eta^{-1/3}$	
$E(k)$	$\lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3}$	$\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$	$\eta^{2/3} k^{-3}$

○ $\lambda \gg k_f$

	$k \ll k_f$	$k_f \ll k \ll \lambda$	$\lambda \ll k$
τ_E	$\lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3}$		$\epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$
τ_U	$\lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2}$		$\eta^{-1/3}$
$E(k)$	$\lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3}$	$\lambda^2 \eta^{2/3} k^{-5}$	$\eta^{2/3} k^{-3}$

表 1: 異なる波数領域における特徴的な時間スケール τ_E, τ_U とエネルギースペクトル $E(k)$ の漸近形を表す. 上の表 (下の表) は $\lambda \ll k_f$ ($k_f \ll \lambda$) のケースである. ただし k_f はエネルギーを注入する波数を表す. $k \ll k_f$ ($k \gg k_f$) でのエネルギースペクトルの漸近形はエネルギー (ポテンシャルエンストロフィー) のカスケード過程によって決定される.

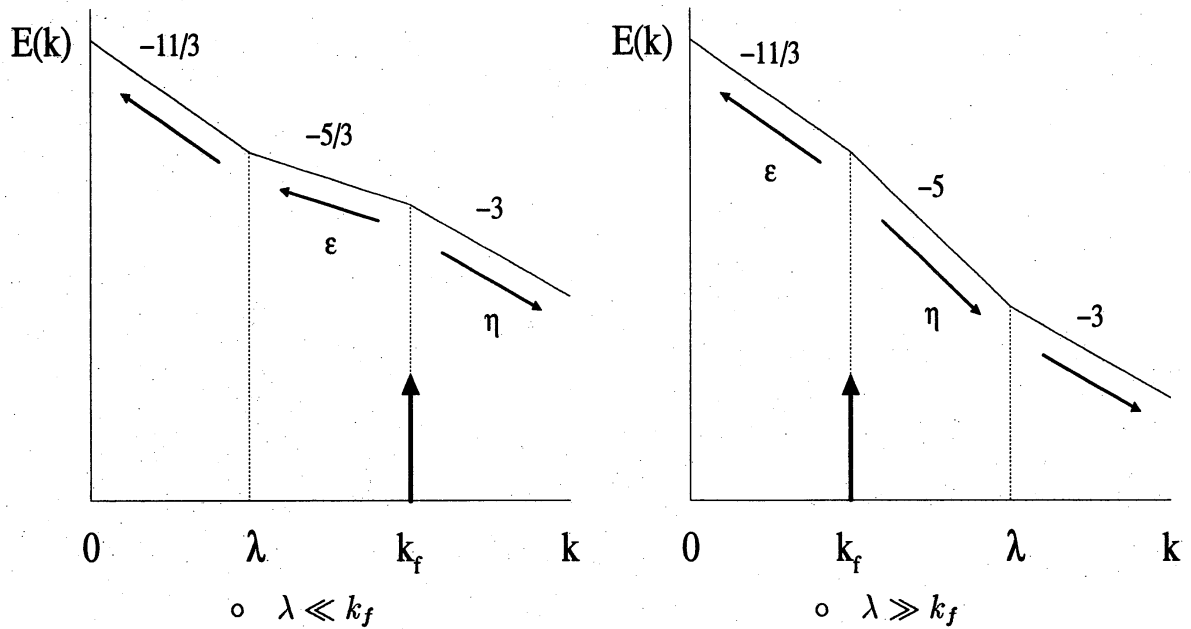


図 1: エネルギースペクトルの漸近形の概略図

ただし, $F(\mathbf{k}, t) = i(\mathbf{k} \times \mathbf{f}(\mathbf{k}, t))_z$ で与えられ, $\mathbf{f}(\mathbf{k}, t)$ の各成分の実部及び虚部は各時刻 t において, 平均値 0, 分散 $\sqrt{0.5}$ の正規乱数と置いた. 又, システムサイズは $L = 2\pi$ に固定し, $\lambda = 50$ と置いた. シミュレーションは物理空間の解像度 256×256 で周期境界条件の下, 初期値は外力に比べて無視できるほどの小さいランダムな値で, $\phi_{\mathbf{k}} \approx 0$ から出発する. 数値積分は 4 次の Runge・Kutta 法を用い, 時間間隔は $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ とした. (3.1) 式をそのまま解くと計算で得る物理量は $\phi(\mathbf{r}, t)$ となるが, ここではポテンシャル渦度 $\xi(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$ の時間発展を調べた.

3.2 NS 乱流から CHM 乱流へのクロスオーバー

時間発展の過程において外力を加えた直後, エネルギーは k_f の周りの狭い波数バンド領域に局在しているが, やがて低波数側にカスケードしていく. 乱流揺らぎの発達過程は二つの時間領域に分けられる. エネルギー注入の過程ではエネルギー Spektral はシングルピーク構造を持ち, そのピークの位置は低波数領域に移動していく. もしピーク位置が λ に到達した時の時間を t_λ と定義すれば, 2 次元 NS 方程式に特徴的な渦は $t < t_\lambda$ の間に形成される. $t < t_\lambda$ では渦の空間分布はランダムであるが, $t > t_\lambda$ では準結晶的な構造を形成し, エネルギーの低波数側への輸送が非常に緩やかになる [10]. 今時刻 t におけるエネルギー Spektral のピークの位置を $k_m(t)$ と定義すると, $k_m(t)$ は時間発展と共に減少していく. $\lambda \ll k_m(t) < k_f$ の時間領域では系は 2 次元 NS 方程式に似た振舞いを示す. この時 2 節で行なった議論を $\lambda \rightarrow 0$ の場合に行なうと, $k_m(t) \sim \epsilon^{-1/2} t^{-3/2}$ となる. $\lambda \sim k_m(t_\lambda)$ で定義される時間

$$t_\lambda \sim \epsilon^{-1/3} \lambda^{-2/3} \quad (3.2)$$

は 2 次元 NS 乱流の振舞いから CHM 乱流に特徴的な振舞いに移行する特徴的な時間を示していると考えられる.⁴

3.3 計算結果

ポテンシャル渦度場 ξ の時間発展の様子を図 2 に示す. 小さなスケールの渦が相互移流と合併を通して大きな渦へと発展していく様子がわかる. 十分な時間が経過した後は, 渦の移流はほとんど起こらず, 格子状の構造が形成される. これは $t \gg t_\lambda$ で観測される CHM 乱流の渦の大きな特徴である. この時間発展に対応するエネルギー Spektral の変化の様子を図 3 に示す. 始めは k_f に局在していた Spektral のピークは幅が広くなりながら, 低波数側に移動していることがわかる. これはコヒーレントな渦の形成と渦の合体による特徴的なスケールの増大に対応していると考えられる. さらに $k < \lambda$ の定常な Spektral の領域はエネルギーの逆カスケード過程に対応しており, Spektral $k^{-11/3}$ が形成されていることがわかる. 本研究の数値シミュレーションはシステムサイズが小さいため, ポテンシャルエンストロフィーのカスケード領域が狭く, $k > k_f$ での Spektral はシミュレーションの結果からは議論できない.

⁴ 本研究のシミュレーションは解像度が小さいため, 広い波数領域に渡ってエネルギーをカスケードさせることができない. そのため実際にクロスオーバーが置いているのをこの計算結果からは議論できない.

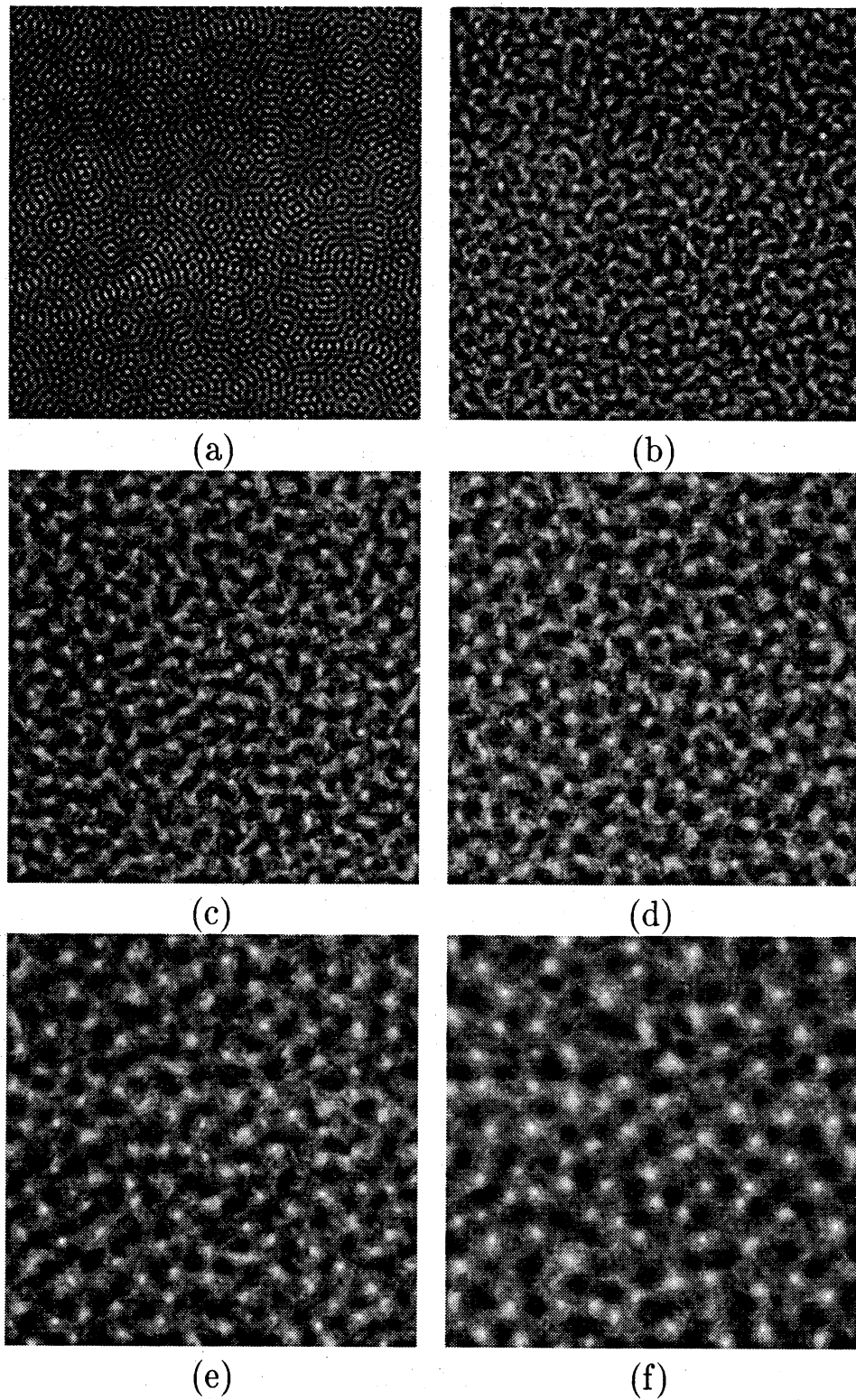


図 2: ポテンシャル渦度場 $\xi = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$ の時間発展の様子. 初期条件は $\phi(\mathbf{r}, 0) \simeq 0$ とした. (a) $t=2$, (b) 20, (c) 40, (d) 60, (e) 100, (f) 200 の時刻に対するものである. 白 (黒) の領域は $\xi > 0 (< 0)$ を表す.

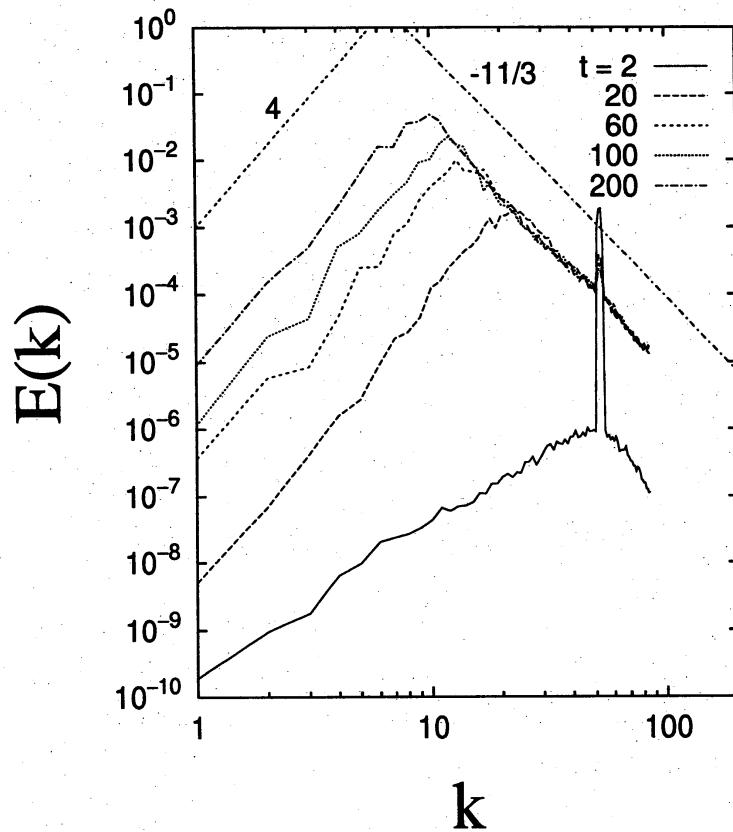


図 3: エネルギースペクトルの時間発展の様子. 定常なスペクトル領域で $k^{-11/3}$ のスペクトルが形成されていることがわかる.

4 構造関数の動的スケーリング則

4.1 構造関数の計算

直接数値シミュレーションの結果, ポテンシャル渦度場での渦の準結晶的な構造の形成過程を見てきたが, ここではその過程における系の特徴的な空間スケールである同符号の渦間の距離 l に注目する. l の時間依存性を詳しく調べるために, ポテンシャル渦度場 ξ の構造関数 $S(k, t)$ をそれぞれの時間 t において計算する.

$$S(k, t) = \left\langle \left| \int \xi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle. \quad (4.1)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ は波数空間における角度方向の平均を表す. 構造関数 $S(k, t)$ はシングルピークを持ち, 特徴的な波数 $\bar{k}(t)$ が存在することが分かる. そこでこの $\bar{k}(t)$ の時間発展を調べることで, ポテンシャル渦度場における特徴的なスケール $l = 2\pi/\bar{k}(t)$ の動的性質を調

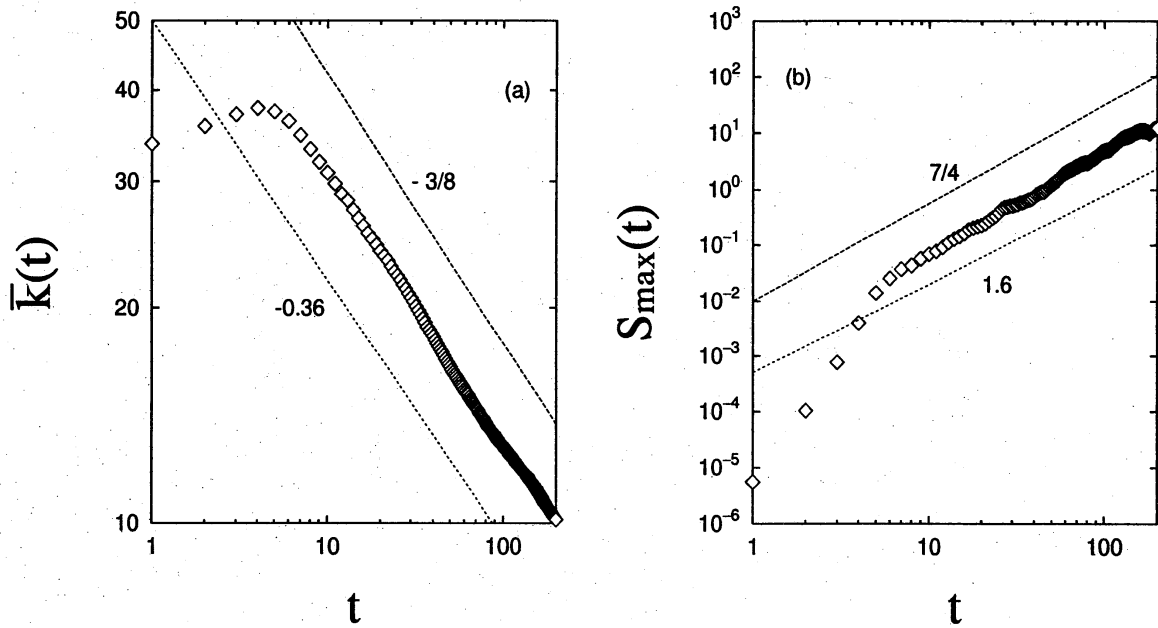


図 4: 時刻 t における構造関数のピーク的位置 $S_{max}(t)$ とスペクトルの特徴的な波数 $\bar{k}(t)$ の時間発展 (a) と $S_{max}(t)$ の時間発展 (b). 数値 $-3/8, 7/4$ はエネルギー輸送率 ϵ を一定としたときの理論値である.

べることができる. $\bar{k}(t)$ は構造関数を用いて次の様に定義する.

$$\bar{k}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\lambda} k S(k, t)}{\sum_{k=0}^{\lambda} S(k, t)}. \quad (4.2)$$

$S(k, t)$ は $k < \lambda$ で鋭いシングルピークを持つので, ピーク位置は (4.2) 式で定義される $\bar{k}(t)$ で非常によく近似される. さらに構造関数のピークの高さを $S_{max}(t)$ と置き, $S_{max}(t)$ の時間発展も調べる.

図 4 に $\bar{k}(t)$ と $S_{max}(t)$ の時間発展の様子を示す. 予想される通り $\bar{k}(t)$ は時間発展と共に減少していくことがわかる. これはエネルギーの逆カスケード過程と密接につながっていると考えられる. 一方で $S_{max}(t)$ は時間発展と共に増大していく. 図からそれぞれは時間 t のべき則に従って時間発展すると考えられ,

$$\bar{k}(t) \sim t^{-0.37}, \quad S_{max}(t) \sim t^{1.8} \quad (4.3)$$

程度であると見積もられる.

4.2 動的スケーリング則の導出

系の特徴的なスケール l の時間発展による増大は, 渦の移流と合併によるものであり, この準結晶への自己組織化過程はフーリエ空間におけるエネルギー逆カスケード過程と密接

につながっていると考えられる。ここではエネルギー逆カスケードとの対応から、先に議論した Kolmogorov 型の次元解析を用いて $\bar{k}(t)$ と $S_{max}(t)$ のべきの値を見積もる。2 節ではエネルギー輸送率の次元解析から eddy turnover time τ_E を求めた。この時間スケールはある波数 k に相当する eddy の life time とみなすことができる。一方、エネルギー注入が始まって時間 t が経過した後消散する eddy の特徴的な波数 k_t は $k \ll \lambda$ では

$$\epsilon \sim \lambda^6 k_t^{-8} t^{-3} \quad (4.4)$$

で与えられる。(4.4) 式から直ちに k_t の時間依存性は

$$k_t \sim \lambda^{3/4} \epsilon^{-1/8} t^{-3/8} \quad (4.5)$$

と求めることができる。

一方 $S_{max}(t)$ の時間 t に対するスケーリング指数は、構造関数とエネルギースペクトルの関係

$$E(k, t) = \frac{k S(k, t)}{k^2 + \lambda^2} \quad (4.6)$$

を考慮する。 $k \ll \lambda$ の時、 $S(k, t)$ は (2.12), (4.6) 式から

$$S(k, t) \sim \lambda^4 \epsilon^{2/3} k^{-14/3} \quad (4.7)$$

と $S(k, t)$ の漸近形が求まる。⁵ この漸近形は $\bar{k}(t) < k \ll \lambda$ で成立する。またこの領域のスペクトルは時間によらないので、揺らぎは定常状態にある。

さて、もし $k_t \sim \bar{k}(t)$ であると仮定し、 $S_{max}(t) \approx S(\bar{k}(t))$ とみなせば、(4.5) 式を (4.7) 式に代入して

$$S_{max}(t) \sim \lambda^{1/2} \epsilon^{5/4} t^{7/4} \quad (4.8)$$

が示される。 $\bar{k}(t) \sim t^{-3/8}$, $S_{max}(t) \sim t^{7/4}$ は図 4 の計算結果と非常に良く一致していることがわかる。

次に時間発展に伴う構造関数 $S(k, t)$ の変化を調べる。各時刻において $S(k, t)/S_{max}(t)$ を $k/\bar{k}(t)$ の関数として両対数プロットしたものを図 5 に示す。この図は明らかに次の様な動的スケーリング則が存在することを示している。

$$\frac{S(k, t)}{S_{max}(t)} = F\left(\frac{k}{\bar{k}(t)}\right). \quad (4.9)$$

このようなスケーリング則は CHM 方程式の減衰乱流において示唆されているが、乱れの発達過程においてこのようなスケーリング則を見出したのは本研究が最初である。ここで $F(x)$ はあるスケーリング関数で、図 5 から $F(x)$ の関数形を次のように決めることができる。

$$F(x) \sim x^{-\gamma} \cdots (x > 1) \quad , \quad F(x) \sim x^{\delta} \cdots (x < 1). \quad (4.10)$$

⁵ 十分時間が経つと、 $k = \lambda$ 周辺では乱れは定常になる。 $k = \lambda$ 周辺で構造関数がスケーリング則 $S(k, t) \sim \epsilon^{2/3} k^{-14/3} \lambda^4 h(k/\lambda)$ と書けるとする。 $x \ll 1$ で $h(x) \sim \text{finite}$ とすると (4.7) 式が得られる。また、 $x \gg 1$ で $h(x) \sim x^4$ とすると、 $S(k, t) \sim \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$ となり、これは NS 方程式のエネルギーカスケード領域のエネルギースペクトル $E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ とコンシステントである。

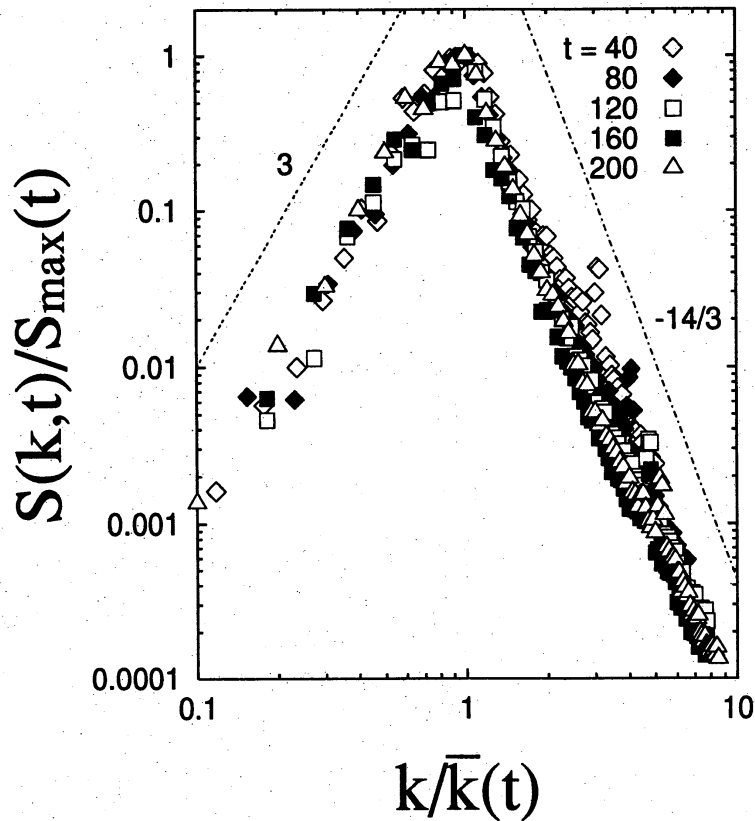


図 5: $t = 40, 80, 120, 160, 200$ における $S(k,t)/S_{max}(t)$ と $k/\bar{k}(t)$ の両対数スケールングプロット. 動的スケールング則が成立していることがわかる.

(4.7) 式から $\gamma = 14/3$ であり, これは図 5 と非常によく一致する. 一方 δ はエネルギーの逆カスケードとは関係のない領域における指数であるため, 現段階では δ の正しい値を理論的に見積もることは難しいが, だいたい $\delta \sim 3$ 程度であろうと思われる. これは [9] の減衰性乱流のエネルギースペクトルの低波数領域の結果, つまり $E(k) \sim k^4$ と一致する.

5 まとめ

本研究では, ドリフト波乱流の発達過程におけるポテンシャル渦度場の特徴的な空間スケールの時間発展に注目し, そのスケールング則を議論した. このスケールング則は従来行なわれてきた Kolmogorov 型の次元解析を基礎にしたものであり, その大きな特徴の一つはエネルギー逆カスケード領域において, エネルギー輸送率 ϵ が時間, 空間によらず一定であるという仮説に基づいている. 結果としてポテンシャル渦度場の構造関数の動的スケールング則を導出し, これが直接数値シミュレーションの結果と非常に良く一致することを示した.

最後にレイノルズ数の時間依存性を見積もる. 乱れの発達とともにレイノルズ数 R_e は

時間的に増加していく。レイノルズ数は (3.1) 式中の非線形項と散逸項の比で、次の様に見積もられる。

$$R_e \sim \frac{\lambda^{-1} \sqrt{E} l^2}{\nu} \sim t^{5/4}. \quad (5.1)$$

ここで $\phi \sim \lambda^{-1} \sqrt{E} \sim t^{1/2}$ と $l = 2\pi/\bar{k}(t) \sim t^{3/8}$ を用いた。(5.1) 式はレイノルズ数が時間発展と共に増大していくことを表している。

参考文献

- [1] A.N.Kolmogorov, Dokl.Akad.Nauk SSSR **30**,301(1941).
- [2] R.H.Kraichnan, Phys.Fluids **10**,1417(1967).
- [3] G.K.Batchelor, Phys.Fluids Suppl **12**,II-233(1969).
- [4] C.E.Leith, Phys.Fluids **11**,671(1968).
- [5] J.C.McWilliams, J.Fluid Mech. **146**,21(1984).
- [6] R.Benzi,S.Patarnello and P.Santangelo, J.Phys.A:Math.Gen. **21**,1221(1988).
- [7] J.C.McWilliams, Phys.Fluids A **2**,547(1990).
- [8] M.Ottaviani and J.Krommes,Phys.Rev.Lett.**69**,2923(1992).
- [9] V.D.Larichev and J.C.McWilliams, Phys.Fluids A **3**,938(1991).
- [10] N.Kukharkin, S.A.Orszag, and V.Yakhot, Phys.Rev.Lett.**75**,2486(1995).
- [11] A.Hasegawa and K.Mima, Phys.Fluids **21**,87(1978).
- [12] J.Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics* (Springer-Verlag, New York,1987).
- [13] S.A.Orszag, Stud.Appl.Math. **100**,293(1971).