

一般化された超幾何関数について

近畿大理工 長岡昇勇 (Shōyū Nagaoka)

Introduction. tube 領域上の, 一般化された超幾何関数については, G. Shimura [2] において研究がなされている. その結果は, それに続く論文 [3] において, 非解析的 Eisenstein 級数の性質を調べるために使われている. 大筋を述べると, Eisenstein 級数の Fourier 係数を, ある adèle 空間上の積分として表示したとき, その archimedean part に上述べた一般化された超幾何関数が現われ, non archimedean part に, ある singular 級数が現われる. このノートの目的は, [2] の結果を, Jordan 環の言葉を使い, 記述することにある.

1. まず, Jordan 環について, 後で必要となる基本的事項をまとめる (定義, 及び, その基本的性質については, [1] 参照). V を実数体 $\mathbb{R}$ 上の Jordan 環とする. さらに,

$\dim_{\mathbb{R}} V = n$ とする. $a, b, c, x \in V$ に対し, 次の記号

を使う.

$$\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc) - b(ac),$$

$$T_a(x) = ax, \quad (a \square b)x = \{a, b, x\} = (T_{ab} + [T_a, T_b])x.$$

以下, V は, 形式的に実 (formally real), かつ 単純 である
と仮定する. すると, V は単位元 1 をもつ, そこで, 1 の原
始的中等元 $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ による分解

$$\sum_{i=1}^r e_i = 1, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \quad (\delta_{ij}: \text{Kronecker の } \delta)$$

を考える. すると, 個数 r は一定であり, これを V の階数 (rank) と呼ぶ. $\text{rank } V = r$. 以下 $\{e_1, \dots, e_r\}$ を固定して考える. V の一次変換 T_{e_i} の固有値は, $0, \frac{1}{2}, 1$ である. そこで

$$V_{ii} = \{v \in V \mid T_{e_i}(v) = v\},$$

$$V_{ij} = \{v \in V \mid T_{e_i}(v) = T_{e_j}(v) = \frac{1}{2}v\}, \quad (i \neq j)$$

より部分空間を考える. すると, V が被約的 (reduced) であることより, $V_{ii} = \{e_i\}_{\mathbb{R}}$ であり, さらに, $\dim_{\mathbb{R}} V_{ij} = d$ (一定), となることもわかる.

V は 直和分解

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij} \quad (\text{Peirce 分解})$$

をもち, V の次元 n , 階数 r , そして d の間に次の式が成立する.

$$n = r + \frac{d}{2} r(r-1).$$

V 上の内積 $\langle, \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = \frac{r}{n} \operatorname{tr}(T_{xy}) \quad , \quad x, y \in V$$

を定義する. すると, V が形式的に実であることより, この内積は正定値となることかわかる.

次に V の構造群 $G = \operatorname{Str} V$ と, 自己同型群 $K = \operatorname{Aut} V$ を次の様に定義する.

$$G = \operatorname{Str} V = \{ g \in \operatorname{GL}(V) \mid g(x \circ y) g^{-1} = (gx) \circ ({}^t g^{-1} y) \text{ for all } x, y \in V \},$$

$$K = \operatorname{Aut} V = \{ g \in \operatorname{GL}(V) \mid g(xy) = g(x)g(y) \text{ for all } x, y \in V \}.$$

ここで t は内積 $\langle, \rangle$ に関する adjoint を表わす.

すると, G は reductive な代数群になることかわかる.

注意. i) G の定義の条件は

$$g\{x, y, z\} = \{gx, g^{-1}y, gz\}$$

とも書ける.

ii) K は, V の単位元 1 を固定する元のなす群としても定義される.

G^0, K^0 を, それぞれ, G と K の identity connected component とする. すると, K^0 は G^0 の極大 compact 部分群となる.

V 上の極約 norm を N で表わすことにする. これは, V 上の次数 r の, irreducible, homogeneous な多項式関数で次の性質で特徴付けられるものである:

$$N(1)=1, \quad N(gx) = \det(g)^{\frac{r}{n}} N(x) \quad (g \in G^0, x \in V).$$

以下, 自己同型群 K の性質を, いくつか挙げる.

命題 1.1 (1) K の元は 内積を不変にする. すなわち,

$$g \in K \text{ なら, } \langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle \text{ for all } x, y \in V$$

(2) K^0 の元は, 極約 norm を不変にする. すなわち,

$$g \in K^0 \text{ なら, } N(gx) = N(x) \text{ for all } x \in V$$

(3) (対角化の原理) 任意の V の元 x に対して, K^0 の元 g と $\mathbb{R}$ の元 d_i ($i=1, 2, \dots, r$) が存在して

$$g x = \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r.$$

と表わされる。さらに、上の表現の実数達 α_i は、 x によって一意に決まる。

上記命題 (3) の実数達 α_i を、 V の元 x の 固有値 と呼ぶことにする。さらに、後の必要の為に、 V の部分集合 $V(p, q, s)$, $(p+q+s=r)$ を、 V の元で、 p 個の正固有値、 q 個の負固有値、 s 個の零固有値をもつもの全体からなるものとして定義しておく。

2. tube 領域上の超幾何関数。まず、Jordan 環 V 内の錐 Ω を、 V の単位元 1 の G^0 -軌道として定義する。すると、 Ω は、自己共役な homogeneous cone となる。 Ω に付随するガンマ関数 $\Gamma_{\Omega}(s)$ を

$$\Gamma_{\Omega}(s) = \int_{\Omega} e^{-\langle u, 1 \rangle} N(u) s^{-\frac{n}{r}} d(u)$$

で定義する。ここで、 $d(u)$ は、内積 $\langle, \rangle$ に関する Euclidean volume element。すると、右辺の積分は、 $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{r} - 1$ で収束し、

$$\Gamma_{\Omega}(s) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-r)} \prod_{i=1}^r \Gamma(s - \frac{d}{2}(i-1))$$

と書ける. ここで $\Gamma(s)$ は通常のガンマ関数.

そこで tube 領域 $H = V + i\Omega$ を考える. さらに, V 内の lattice (i.e. max. rank をもつ V の discrete 部分群) L に対して, 次の無限級数 S_Ω を考える.

$$S_\Omega(z, L; \alpha, \beta) = \sum_{a \in L} N(z+a)^{-\alpha} N(\bar{z}+a)^{-\beta},$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad z \in H.$$

すると, S_Ω は, $H \times \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > \frac{2n}{r} - 1\}$ 上で,

locally uniformly に収束することになる.

そこで, S_Ω の Fourier 展開を簡単に表現するために, 次の関数を定義する.

$$g \in \Omega, \quad h \in V, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ に対して.}$$

$$\xi_\Omega(g, h; \alpha, \beta) = \int_V e^{-2\pi i \langle h, x \rangle} N(x+ig)^{-\alpha} N(x-ig)^{-\beta} d(x),$$

$$\eta_\Omega(g, h; \alpha, \beta) = \int_{x \pm h \in \Omega} e^{-\langle g, x \rangle} N(x+h)^{\alpha - \frac{n}{r}} N(x-h)^{\beta - \frac{n}{r}} d(x),$$

とおく. すると, ξ_Ω は, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > \frac{2n}{r} - 1$ で収束し,

(α, β) に関する正則関数となる. さらに, $\operatorname{Re}(\alpha) > \frac{n}{r} - 1$,

$\operatorname{Re}(\beta) > \frac{2n}{r} - 1$ なら η_Ω は収束し,

$$\zeta_{\Omega}(g, h; \alpha, \beta) = i^{r(\beta-\alpha)} (2\pi)^n \Gamma_{\Omega}(\alpha)^{-1} \Gamma_{\Omega}(\beta)^{-1} \eta_{\Omega}(2g, \pi h; \alpha, \beta)$$

が成立する.

すると, 無限級数 S_{Ω} は

$$\operatorname{Re}(\alpha) > \frac{n}{r} - \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}(\beta) > \frac{n}{r} - \frac{1}{2} \quad \text{のとき}$$

$$\mu(V/L) S_{\Omega}(x+iy, L; \alpha, \beta) = \sum_{h \in L'} e^{2\pi i \langle h, x \rangle} \zeta_{\Omega}(y, h; \alpha, \beta)$$

と Fourier 展開されることわかる. ここで, $\mu(V/L)$ は V/L の measure, $L' = \{h \in V \mid \langle h, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}$ である.

前注意した様に, ζ_{Ω} は η_{Ω} を使って表現できるが, η_{Ω} は, 一般化された超幾何関数 S_{Ω} で表わせる. 以下, それを説明する. まず, 拡張された右半空間 $H' = \Omega + iV$ を考える. そこで

$$\zeta_{\Omega}(z; \alpha, \beta) = \int_{\Omega} e^{-\langle z, x \rangle} N(x+1)^{\alpha - \frac{n}{r}} N(x)^{\beta - \frac{n}{r}} d(x), \quad z \in H',$$

と置く. これは, 一般化された超幾何関数である. 特に, $n=1$ の場合を考えると

$$\zeta_{\Omega}(g; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-gt} (t+1)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt, \quad (0 < g \in \mathbb{R})$$

であり, これは, 古典的な超幾何関数である. 関数 η_{Ω} と

ζ_Ω の関係は次の通り.

$$\eta_\Omega(g, 1; \alpha, \beta) = e^{-\langle g, 1 \rangle} 2^{\alpha + \beta - \frac{n}{r}} \zeta_\Omega(2g; \alpha, \beta), \quad g \in \Omega.$$

最初の定理は、次の様に述べられる.

定理 2.1. (1) 関数 ζ_Ω は、 $z \in \mathbb{H}'$, $\operatorname{Re}(\beta) > \frac{n}{r} - 1$ z 収束し、 (z, α, β) について正則関数となる.

(2). $\omega_\Omega(z; \alpha, \beta) = \Gamma_\Omega(\beta)^{-1} N(z)^\beta \zeta_\Omega(z; \alpha, \beta)$ とおく. すると関数 ω_Ω は $\mathbb{H}' \times \mathbb{C}^2$ 全体に正則関数として解析接続され

$$\omega_\Omega(z; \frac{n}{r} - \beta, \frac{n}{r} - \alpha) = \omega_\Omega(z; \alpha, \beta)$$

なる関数等式を満たす.

(3). $\mathbb{C}^2$ 内の任意の compact 集合 T に対して、 T のみに依存して決まる定数 $A, B > 0$ が存在して

$$|\omega_\Omega(g; \alpha, \beta)| \leq A(1 + \mu(g)^{-B}), \quad g \in \Omega, (\alpha, \beta) \in T.$$

ここで $\mu(g)$ は、 $g \in \Omega$ の minimum な固有値.

この定理は、 S_Ω の Fourier 展開の係数 $\zeta_\Omega(y, h; \alpha, \beta)$ のうち $h \in L' \cap \Omega$ なるものについては、その性質や評価が与えられたことを示している. そこで、一般の $h \in L'$ に

対する Fourier 係数を調べてみる. まず, 初めに, $h \in V$

$g \in \Omega$ について, V の単位元 1 を g にうつす G^0 の 1 つの元を a としたとき, $ah \in V$ の固有値を, g に相対する h の固有値 と呼ぶことにする ([2]). §1 で述べた自己同型群 K の性質より, g に相対する h の固有値は, G^0 の元 a のとり方によらないことがわかる. そこで, 次の様におく.

$\delta_+(hg) = g$ に相対する h の固有値の中で正のものの全体の積

$$\delta_-(hg) = \delta_+((-h)g)$$

$\tau_+(hg) = g$ に相対する h の固有値の中で正のものの全体の和

$$\tau_-(hg) = \tau_+((-h)g)$$

$$\tau(hg) = \tau_+(hg) + \tau_-(hg)$$

$\mu(hg) = g$ に相対する h の固有値の中で非零で, 絶対値最小のもの; したがって, $h = 0$ のときは $\mu(hg) = 1$.

V の単純 Jordan 部分環 $V^{(k)}$ を

$$V^{(k)} = \bigoplus_{i,j \leq k} V_{ij}$$

を定義し, 前と同様に定義した $V^{(k)}$ 内の錐を $\Omega^{(k)}$ とおく.
 錐 $\Omega^{(k)}$ に付随するガンマ関数 $\Gamma_{\Omega^{(k)}}(s)$ を, 簡単のために
 $\Gamma_k(s)$ で表わす. そこで

$g \in \Omega$, $h \in V(p, q, s)$ に対して

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega}(g, h; \alpha, \beta) &= 2^{-p\alpha - q\beta} \Gamma_p\left(\beta - \frac{d}{2}(m-p)\right)^{-1} \Gamma_q\left(\alpha - \frac{d}{2}(m-q)\right)^{-1} \\ &\quad \times \Gamma_s\left(\alpha + \beta - \frac{n}{r}\right)^{-1} \delta_+(hg)^{\frac{n}{r} - \alpha - \frac{qd}{4}} \delta_-(hg)^{\frac{n}{r} - \beta - \frac{pd}{4}} \\ &\quad \times N(g)^{\alpha + \beta - \frac{n}{r}} \eta_{\Omega}(g, h; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

とおく. 定理 2.1 の拡張である主定理は, 次のものである.

定理 2.2. 上で定義した関数 ω_{Ω} は, (α, β) の正則関数として
 $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続され, 次の関数等式を満たす.

$$\omega_{\Omega}(g, h; \alpha, \beta) = \omega_{\Omega}(g, h; \frac{n}{r} + \frac{ds}{2} - \beta, \frac{n}{r} + \frac{ds}{2} - \alpha).$$

さらに, $\mathbb{C}^2$ 内の任意の compact 集合 T に対して, T のみに
 依存して決まる正定数 A, B が存在して, 次の評価式が成立
 する

$$\begin{aligned} |\omega_{\Omega}(g, h; \alpha, \beta)| &\leq A e^{-\frac{\tau(hg)}{2}} (1 + \mu(hg)^{-B}) \\ \text{for } \forall (g, h) &\in \Omega \times V, \quad \forall (\alpha, \beta) \in T. \end{aligned}$$

以上の結果を応用して, S_{Ω} の性質が調べられる.

一般に, $\mathbb{R}^m$ 内の lattice L が algebraic であるとは, L の各元が, 代数的数からなる成分をもつときをいうものとする. V の $\mathbb{Q}$ -構造を固定したとき, V の algebraic lattice の概念が定義できる. 定理 2.2 を使って Fourier 係数を調べることにより, 次の結果が得られる.

定理 2.3. L を V 内の algebraic lattice とする. すると

$$\Gamma_{\Omega}(\alpha + \beta - \frac{n}{r})^{-1} S_{\Omega}(z, L; \alpha, \beta)$$

は, (α, β) の正則関数として $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続される.

最後に, 上記定理の応用として得られる, いくつかの結果を述べる. L を必ずしも algebraic とは限らない V 内の lattice とする. そして, 無限級数 $S_{\Omega}(z, L; \alpha)$, $S^*(z, L; \alpha)$ を

$$S_{\Omega}(z, L; \alpha) = \sum_{a \in L} N(z+a)^{-\alpha}$$

$$S_{\Omega}^*(z, L; \alpha) = \lim_{s \rightarrow 0} S_{\Omega}(z, L; \alpha+s, s)$$

で定義する. すると, $\operatorname{Re}(\alpha) > \frac{2n}{r} - 1$ である限り S_{Ω} は収束し, そこで S_{Ω}^* と一致する. さらに, 次の言える.

定理 2.4. $L \in V$ 内の algebraic lattice とし, さらに $\operatorname{Re}(\alpha) > \frac{n}{r}$ と仮定する. すると, 次の場合を除外して, S_Ω と S_Ω^* は一致する.

1) $d=1$ のときの $\alpha = \frac{n}{2} + 1 \quad (= \frac{n}{r} + \frac{1}{2})$

2) $r=2, n \geq 2: \text{odd}$ のときの $\frac{n}{2} < \alpha \leq n-1, \alpha \in \mathbb{Z}$.

注意: 1), 2) の場合のそれぞれに対応する上半空間は,

Siegel 上半空間, IV 型領域と呼ばれるものである.

文献

- [1] I. Satake: Algebraic Structures of Symmetric Domains,
Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980
- [2] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube
domains, Math. Ann. 260 (1982)
- [3] G. Shimura: On Eisenstein series, Duke Math. J.
50 (1983).