

Differentiable vectors and analytic vectors in completions
of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra

愛媛 大理 須藤 清一 (Kiyokazu Suto)

§ 0. 序

まず、対称化可能な Cartan 行列を持つ Kac-Moody 環、 $\hat{K}$ を
その unitary 実形とする。また $L(\lambda)$ を integrable highest weight $\hat{K}$ -
module with highest weight λ とする。

ここでは、 $\hat{K}$ の $\hat{K}$ 及び $L(\lambda) \wedge$ の作用の exponentiability に
ついて論じる。まず、 $\hat{K}$ 及び $L(\lambda)$ の標準的な完備化 $H(ad)$ 及び
 $H(\lambda)$ における、 $\hat{K}$ の作用に関する C^m -vector ($m = 0, 1, 2, \dots, \infty$,
 ω) を定義し、その簡単な特徴付けを与える。この結果を用
いると、各 C^m -vectors の空間に自然に位相が入って完備位相
空間となるが、その位相に関する $\hat{K}$ の closure を K_m とする。
このとき、 K_2 の $H(ad)$ 及び $H(\lambda) \wedge$ の作用が exponentiable であ
り、さらに K_ω の exponentials は各 C^m -vectors の空間を不変にす
ることを示す。最後に、これらの exponentials の間に成り立つ
いくつかの交換関係を与える。

§ 1. 記号

以後の節では次の記号を断り無く用いる。

A : 対称化可能な一般型 Cartan 行列

$\mathfrak{g}_\mathbb{R}$: $A \in \text{Cartan 行列}$ に持つ実 Kac-Moody 環

$\mathfrak{h}_\mathbb{R}$: $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ の Cartan 部分環

$\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\mathbb{R}$: $A \in \text{Cartan 行列}$ に持つ複素 Kac-Moody 環

$\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{h}_\mathbb{R}$: $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環

Δ : $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系

$\mathfrak{g}^\alpha$: $\alpha \in \Delta$ に対応する root 空間, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$: simple root の全体

Δ_+ : positive root の全体

$$\mathfrak{n}_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$$

$\mathfrak{g} \ni x \mapsto x^* \in \mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}$ 上の antilinear antiautomorphism s.t.

$$h^* = h \text{ for } h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}, \quad (\mathfrak{g}^\alpha)^* = \mathfrak{g}^{-\alpha} \text{ for } \alpha \in \Delta.$$

$\mathcal{K} = \{x \in \mathfrak{g}; x^* + x = 0\}$: $\mathfrak{g}$ の unitary 実形.

$(\cdot | \cdot)$: $\mathfrak{g}$ 上の standard invariant form

ν : $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}^*$ の上への linear bijection s.t.

$$\nu(h)(h') = (h | h') \text{ for } h, h' \in \mathfrak{h}.$$

$$(\alpha | \beta) = (\nu^{-1}(\alpha) | \nu^{-1}(\beta)) \text{ for } \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$$

: $\mathfrak{h}^*$ 上の symmetric bilinear form

$(x | y)_0 = (x | y^*)$ for $x, y \in \mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}$ 上の Hermitian form s.t.

$$([x, y] | z)_0 = (y | [x^*, z])_0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

$\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$: dominant integral weight i.e.

$$2(\lambda | \alpha_i) / (\alpha_i | \alpha_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$L(\lambda)$: λ is highest weight に持つ既約 highest weight $\mathfrak{g}$ -module

$(\cdot | \cdot)_{\lambda}$: $L(\lambda)$ 上の inner product s.t.

$$(x u | v)_{\lambda} = (u | x^* v)_{\lambda} \quad \forall x \in \mathfrak{g}, u, v \in L(\lambda).$$

§ 2. $\mathfrak{g}$ 及び $L(\lambda)$ の完備化

$(\cdot | \cdot)_0$ は部分空間 $\mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+$ 上では正定値だが, $\mathfrak{h}$ 上では一般に正定値ではない。そこで $\mathfrak{g}$ 上の内積 $(\cdot | \cdot)_1$ を次のように定義する。

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底 $\{h_i\}$ を適当にとれば

$$(h_i | h_j)_0 = \pm \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

とできる。この基底を正規直交基底とする $\mathfrak{h}$ 上の内積を $(\cdot | \cdot)_1$ とし, それを

$$(x | y)_1 = (x_- | y_-)_0 + (x_0 | y_0)_1 + (x_+ | y_+)_0$$

$$\text{for } x = x_- + x_0 + x_+, y = y_- + y_0 + y_+, x_{\pm}, y_{\pm} \in \mathfrak{n}_{\pm}, x_0, y_0 \in \mathfrak{h}$$

によって $\mathfrak{g}$ 全体に拡張する。

以下, $\pi = \text{ad}$ (= $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現) or π_{λ} (= $L(\lambda)$ 上の表現) とし, その表現空間を V , V 上の内積 $(= (\cdot | \cdot)_1 \text{ or } (\cdot | \cdot)_{\lambda})$ を $(\cdot | \cdot)_{\pi}$, weights の全体を $P(\pi)$ とする。特に $P(\text{ad}) = \Delta \cup \{0\}$ 。

$$\underline{V} = \prod_{\mu \in P(\pi)} V_{\mu} \quad (V_{\mu} \text{ は weight } \mu \text{ の weight 空間})$$

とおく。\$\vartheta\$ は \$\underline{V}\$ に自然に作用する。また \$\underline{V}\$ の \$(\cdot|\cdot)_{\pi}\$ に関する完備化を \$H(\pi)\$ とすると、\$H(\pi) \subset \underline{V}\$ とみなせる:

$$H(\pi) = \{ (v_{\mu})_{\mu \in P(\pi)} \in \underline{V} \mid \sum_{\mu \in P(\pi)} \|v_{\mu}\|_{\pi}^2 < +\infty \}$$

§ 3. \$\vartheta\$ の作用の norm の評価

\$h_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\$ は strictly dominant i.e.

$$\alpha(h_0) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_+$$

なり元とする。すると \$\vartheta\$ の作用について次の評価を得る。

定理 1 (cf. Kac-Peterson [1]).

i) \$\exists C_1 > 0\$ s.t. \$\forall x, y \in \vartheta\$

$$\| [x, y] \|_1 \leq C_1 (\|x\|_1 \| [h_0, y] \|_1 + \| [h_0, x] \|_1 \|y\|_1)$$

ii) \$\exists C_{1,\lambda} > 0\$ s.t. \$\forall x \in \vartheta, v \in L(\lambda)\$

$$\| xv \|_{\lambda} \leq C_{1,\lambda} (\|x\|_1 \|v\|_{\lambda} + \|x\|_1 \|h_0 v\|_{\lambda} + \| [h_0, x] \|_1 \|v\|_{\lambda}).$$

この評価から帰納的に次を得る。

命題 2. 任意の \$x_1, \dots, x_m \in \vartheta\$ 及び \$v \in L(\lambda)\$ に対して

$$i) \quad \| [x_1, \dots, [x_{m-1}, x_m] \dots] \|_1$$

$$\leq (m-1)! C_1^{m-1} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{m-1} \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_{m-1} = m-1}} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{p_j!} \| (ad h_0)^{p_j} x_j \|_1$$

$$ii) \quad \| x_1 \dots x_m v \|_{\lambda}$$

$$\leq (m+1)! C_{1,\lambda}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m, q \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_m + q = m}} \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_j!} \| (ad h_0)^{p_j} x_j \|_1^2 \right\} \cdot \frac{1}{q!} \| h_0^q v \|_{\lambda}$$

§ 4. 可微分 vector と解析的 vector

π, V , etc は § 2 の通りとする。

$H(\pi)$ における C^m -vectors の空間 $H_m(\pi)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$) を次のように定義する。

定義 3

$$H_0(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} H(\pi), \quad H_m(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H_{m-1}(\pi) \mid \pi(x)v \in H_{m-1}(\pi) \quad \forall x \in \mathfrak{g}\} \quad (m > 0),$$

$$H_\infty(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m=0}^\infty H_m(\pi),$$

$$H_\omega(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H_\infty(\pi) \mid \forall x \in \mathfrak{g} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \varepsilon^m \|\pi(x)^m v\|_\pi < +\infty\}.$$

命題 2 によって, 各 $H_m(\pi)$ は, strictly dominant なただ 1 個の元 $h_0 \in \mathfrak{h}_{\text{PR}}$ によって特徴付けられることがわかった。すなわち次を得る。

定理 4. 上の記号の下で

$$H_m(\pi) = \{v \in V \mid \pi(h_0)^m v \in H(\pi)\} \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$H_\omega(\pi) = \{v \in H_\infty(\pi) \mid \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \delta^m \|\pi(h_0)^m v\|_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\pi, \omega, \delta} < +\infty\}.$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ に対して $H_m(\pi)$ 上の内積 $(\cdot | \cdot)_{\pi, m}$ を

$$(u | v)_{\pi, m} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^m (\pi(h_0)^i u | \pi(h_0)^i v)_\pi \quad \text{for } u, v \in H_m(\pi)$$

と定める。明らかに $(H_m(\pi), (\cdot | \cdot)_{\pi, m})$ は Hilbert 空間になった。また $H_\omega(\pi)$ には $H_m(\pi)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 達の射影極限としての位相を考える。定理 1 から明らかに,

命題 5 $m = 0, 1, 2, \dots$ とする。冪の $V \wedge$ の作用は bilinear map:

$$H_{m+1}(\text{ad}) \times H_{m+1}(\pi) \ni (x, v) \mapsto \pi(x)v \in H_m(\pi)$$

に連続に拡張される。従って $H_\infty(\text{ad})$ は位相 Lie 環になり、位相線型空間 $H_\infty(\Lambda)$ ($\varinjlim H_\infty(\pi_\Lambda)$) に連続に作用する。

次に $H_w(\pi)$ 上の位相を考える。 $0 < \varepsilon \leq +\infty$ に対して

$$H_w(\pi; \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H_w(\pi) \mid 0 < \delta < \varepsilon \quad \|v\|_{\pi, w, \delta} < +\infty\}$$

とおき、 $\|\cdot\|_{\pi, w, \delta}$, $0 < \delta < \varepsilon$ という norm の族による位相を考える。

$H_w(\pi)$ にはこれらの空間の帰納極限としての位相を考える。すると再び定理 1 によって

命題 6 $0 < \varepsilon \leq +\infty$ とする。 $H_w(\text{ad}; \varepsilon)$ は位相 Lie 環となり、
 $H_w(\Lambda; \varepsilon)$ ($\varinjlim H_w(\pi_\Lambda; \varepsilon)$) に連続に作用する。特に $H_w(\text{ad})$ は位相 Lie 環で $H_w(\Lambda)$ ($\varinjlim H_w(\pi_\Lambda)$) に連続に作用する。

§ 5 unitary form R の完備化とその exponentials の定義.

$m = 0, 1, 2, \dots, \infty, w$ とする。冪 $x \mapsto x^* \in$ 冪 は $(\cdot)_1$ に関して isometric であり、§ 4 の η_0 を不変にする。従って $H_m(\text{ad})$ 上にまで連続に拡張される。この拡張も $*$ と書く。

$$R_m = H_m^u(\text{ad}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H_m(\text{ad}) \mid x + x^* = 0\}$$

とおくと、 R_m は $H_m(\text{ad})$ の real form であり、 R の closure と一致する。また R_∞ , R_w はそれぞれ Lie 環 $\varinjlim H_\infty(\text{ad})$, $\varinjlim H_w(\text{ad})$

の, Lie 環としての real form である。

さて, 内積 $(\cdot|\cdot)_1$ の定義によって, 次のような $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ の上への linear bijection T が存在する。

(1) $(x|y)_0 = (x|Ty)_1 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$, 従って T は $(\cdot|\cdot)_1$ に関して自己共役。

(2) T は $(\cdot|\cdot)_1$ を不変にする。従って (1) と合わせて $T^2 = \text{Id}$ 。

(3) P_0 を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ の上への直交射影とすると $\text{Id} - T \leq 2P_0$ 。

すると, $x \in \mathfrak{g}_1$, $y \in H_1(\mathfrak{g})$ に対して

$$\begin{aligned} \|(1 - \text{ad } x)y\|_1^2 &= \|y\|_1^2 + \|[x, y]\|_1^2 - 2\text{Re}(y|[x, y])_1 \\ &= \|y\|_1^2 + \|[x, y]\|_1^2 - 2\text{Re}(y|(\text{Id} - T)([x, y]))_1 \\ &\quad - 2\text{Re}(y|T([x, y]))_1 \\ &= \|y\|_1^2 + \|[x, y]\|_1^2 - 2\text{Re}(y|(\text{Id} - T)([x, y]))_1 \\ &\quad - 2\text{Re}(y|[x, y])_0 \end{aligned}$$

$\text{ad } x$ は $(\cdot|\cdot)_0$ に関して反対称作用素だから $(y|[x, y])_0$ は純虚数。

$$\therefore \|(1 - \text{ad } x)y\|_1^2 = \|y\|_1^2 + \|[x, y]\|_1^2 - 2\text{Re}(y|(\text{Id} - T)([x, y]))_1$$

上の (3) によって

$$2\text{Re}(y|(\text{Id} - T)([x, y]))_1 \leq 4\|y\|_1 \|P_0([x, y])\|_1.$$

$x = \sum_{\alpha \in \Delta \cup \mathfrak{h}} x_\alpha$, $y = \sum_{\alpha \in \Delta \cup \mathfrak{h}} y_\alpha$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ とすると

$$[x_\alpha, y_{-\alpha}] = (x_\alpha|y_{-\alpha})\nu^{-1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in \Delta$$

だから,

$$\|P_0([x, y])\|_1 \leq \sqrt{\sum_{\alpha \in \Delta} \|\alpha\|_1^2 \|x_\alpha\|_1^2} \cdot \|y\|_1$$

ただし $(\lambda|\mu)_1 \neq (\lambda^{-1}(\lambda)|\lambda^{-1}(\mu))_1$ for $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ とした。

また $\pi_\lambda(x)$ が $(\cdot|\cdot)_\lambda$ に関して反対称作用素になることから、結局次を得る。

補題 7. $\forall x = \sum_{\alpha \in \Delta_{\text{pos}}} x_\alpha \in \mathbb{R}_1$, $x_\alpha \in \mathfrak{a}^\alpha$ に対して,

$$i) \quad \|(1 - \text{ad } x)y\|_1^2 \geq (1 - 4\sqrt{\sum_{\alpha \in \Delta} \|\alpha\|_2^2 \|x_\alpha\|_1^2}) \|y\|_1^2 \quad \forall y \in H_1(\text{ad})$$

$$ii) \quad \|(1 - \pi_\lambda(x))v\|_\lambda^2 \geq \|v\|_\lambda^2 \quad \forall v \in H_1(\lambda) (\neq H_1(\pi_\lambda)).$$

π, V etc. は § 2 の通りとする。 $x \in \mathbb{R}_2$ ならば、十分 0 に近い $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して $(1 - \varepsilon \pi(x))H_1(\pi)$ が $H(\pi)$ で dense になるので、Yosida [3, Chap IX] の結果が適用できて次の定理が成り立つ。

定理 8. $\forall x = \sum_{\alpha \in \Delta_{\text{pos}}} x_\alpha \in \mathbb{R}_2$, $x_\alpha \in \mathfrak{a}^\alpha$ に対して

i) $H(\text{ad})$ 上の可逆有界作用素から成る 1 径数群 $e^{t \text{ad } x} = \exp t \text{ad } x$ で、その無限小生成作用素が $\text{ad } x$ を含むものが一意に存在する。さらに作用素 norm を $\|\cdot\|_{\text{op}}$ と書くと、

$$\|e^{\text{ad } x}\|_{\text{op}} \leq \exp 2\sqrt{\sum_{\alpha \in \Delta} \|\alpha\|_2^2 \|x_\alpha\|_1^2}.$$

ii) $H(\lambda) (\neq H(\pi_\lambda))$ 上の unitary 作用素から成る 1 径数群 $e^{t \pi_\lambda(x)} = \exp t \pi_\lambda(x)$ でその無限小生成作用素が $\pi_\lambda(x)$ を含むものが一意に存在する。

明らかに $H_m(\pi)$ は、 $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{t \pi(x)} u \in H(\pi)$ が $\forall x \in \mathbb{R}_m$ に対して

C^m -写像となつてゐる $v \in H(\pi)$ の全体である。

§ 6. $\exp \pi(R_\omega)$ の性質

最後に $\exp \pi(R_\omega)$ の満たすいくつかの性質を示す。

$\mathfrak{g} \subset H_\omega(\text{ad})$ の元が, $\exp \text{ad } R_\omega$ に関する解析的 vector であることから次の補題が巾級数の計算によつて出た。

補題 9. $x \in R_\omega$, $y \in \mathfrak{g}$ とする。十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $e^{-\varepsilon \text{ad } x} y \in \mathfrak{g}_\omega$ であり,

$$\pi(y) e^{\varepsilon \pi(x)} v = e^{\varepsilon \pi(x)} \pi(e^{-\varepsilon \text{ad } x} y) v \quad \forall v \in H_1(\pi).$$

この補題により, $H_m(\pi)$ の $\exp \pi(R_\omega)$ による不変性が, $\exp \pi(R_\omega)$ の各元の $H(\pi)$ 上の作用素としての有界性に帰着される。従つて

定理 10. 記号は上記の通りとする。 $m = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$, $x \in R_\omega$ に対して, $e^{\pi(x)}$ は $H_m(\pi)$ を不変にし, $e^{\pi(x)}|_{H_m(\pi)}$ は連続である。

すると連続性によつて補題 9 は次のように拡張される。

命題 11. $\forall x \in R_\omega$, $y \in H_1(\text{ad})$, $v \in H_1(\pi)$ に対して

$$\pi(y) e^{\pi(x)} v = e^{\pi(x)} \pi(e^{-\text{ad } x} y) v.$$

この命題から exponentials が満たすべき最低限の交換関係が
(無限小生成作用素を比べることにより) 証明される。すな
わち,

命題 12. $\forall x \in \mathfrak{k}_0, y \in \mathfrak{p}_2$ について

$$e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} e^{-\pi(x)} = \exp \pi(e^{\operatorname{ad} x} y).$$

参考文献

- [1] V. G. Kac and D. H. Peterson, Unitary structure in representations of infinite dimensional groups and a convexity theorem, Invent. Math., 76 (1984), 1-14.
- [2] K. Suto, Differentiable vectors and analytic vectors in completions of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra, preprint.
- [3] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1980.