

分割ゲームと Connex

阪大・理 山崎洋平

まえがき.

ここに挙げる二つの対象「分割ゲーム」と「Connex」は
 共に, Hex (又は Nash game) と Bridg-itt と呼ばれるゲームに
 起源をもっている. Hex は六角形を敷
 きつめた菱形の盤の上で, 白黒二名の
 競技者が交互に自分の石を六角形の中
 に置いていくゲームである. 盤の縁は

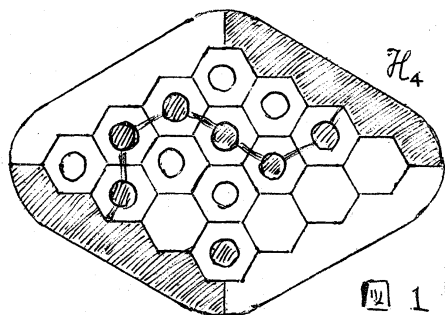


図 1

あらかじめ対辺同士が同色になるように白黒に塗り分けられ
 ている, 図 1 のように両端の黒い辺を結ぶ黒石の列ができれば
 黒の勝ち, 逆に白い辺を白石で結べば白の勝ちである.

Bridg-itt も同様のゲームであり, これは次の二つの特性をも
 つ.

(1). 片方が“勝った”状態から, 更にゲームを続けても
 相手は“勝った”状態に到達し得ない.

(2). すべての空白が埋められた状態では必ず“勝者”が存在する.

この二つの性質を抽象化したのが分割ゲームで, 前述した二つのゲーム及びその逆ゲーム (即ち, つないだら負けというゲーム) のゲーム理論はこの世界でまとめられる. Hex や Bridg-it には分割ゲームとしてのみならずグラフ理論的アプローチがあり, Shannon のゲームなるものが考案されているが, これを更に純粹にグラフとしてとらえたものが connex である.

§ 1. 分割空間 (division space).

二人の競技者 T と B からなる集合 Π を固定する. Π に, もう一つの元 θ (nobody) をつけ加えた集合 $\bar{\Pi}$ を考える.

X を有限集合とする. X から $\bar{\Pi}$, Π への写像の全体を, P_X, D_X と書きそれぞれの元を, δ を position, division という. 前者はゲームが進行している途中の盤の状態を, 後者は終了時の状態を表すと解釈する. $D_X \times \Pi$ から $\{-1, 1\}$ への写像 χ^* で $\sum_{\pi \in \Pi} \chi^*(\delta, \pi) = 0 \quad (\forall \delta \in D_X)$ をみたすものを judge という. 分割 δ が生じたとき競技者 π は $\chi^*(\delta, \pi)$ が 1 であるか -1 であるかによつて勝者, 敗者と解釈される. $\mathcal{D}^* = (X, \chi^*)$ は division space と呼ばれる.

$\mathcal{D}^* = (X, \chi^*)$ を division space とする. X の元 x は, 固定

された競技者 π について, $b_1^{-1}(\pi) = b_2^{-1}(\pi) \cup \{x\}$ であり x は任意の divisions の組 (b_1, b_2) に対して次の条件 (+), (-), (0) を満たすときそれぞれ regular, misère, negligible であるという:

$$(+) \quad \chi^*(b_1, \pi) \geq \chi^*(b_2, \pi)$$

$$(-) \quad \chi^*(b_1, \pi) \leq \chi^*(b_2, \pi)$$

$$(0) \quad \chi^*(b_1, \pi) = \chi^*(b_2, \pi).$$

division space $\mathcal{D}^*$ は, π への点の regular, misère, negligible のとき, それぞれ regular, misère, trivial であるという. この場合, 記号 $*$ は +, -, 0 で置きかえられ $\mathcal{D}^+ = (X, \chi^+)$ のように書かれるものとする. 古典的な π は π へ regular で, 別の π は misère である.

division spaces $\mathcal{D}_i^* = (X_i, \chi_i^*)$ $i=1, 2$ に対して, X_1 から X_2 への写像 f^X と Π の置換 $\text{sgn } f$ の組 f が $\mathcal{D}_1^*$ から $\mathcal{D}_2^*$ への pseudo-homomorphism であるとは

$$\begin{array}{ccc} f^{\mathcal{D}} \times \text{sgn } f : \mathcal{D}_1 \times \Pi & \longleftarrow & \mathcal{D}_2 \times \Pi \\ & \searrow \chi_1^* & \swarrow \chi_2^* \\ & \{-1, 1\} & \end{array}$$

なる図式が可換なることをいう. ここに $f^{\mathcal{D}}$ は $f^{\mathcal{D}}(b_2) = \text{sgn } f \cdot b_2 \circ f^X$ により与えられる. - immersion, - isomorphism, - automorphism

なとも同様に定義される。特に $\text{sgn } f = \text{id}_\Pi$ のとき *pseudo-* は略され、 $\text{sgn } f = \wedge$ (Π の involution) のときは *anti-* でおさかえられる。division space $\mathcal{D}^*$ に対し、pseudo-automorphism の全体 $\text{Aut } \mathcal{D}^*$ は自然に群をなし、automorphism の全体 $\text{Aut}_\Pi \mathcal{D}^*$ は指数 1 または 2 の正規部分群をなす。この指数が 2 のとき $\mathcal{D}^*$ は impartial (公平) であるといわれ、特に $(\text{id}_X, \wedge)$ が $\text{Aut } \mathcal{D}^*$ の元であるとき perfect であるといわれる。

§ 2. 分割ゲーム

$\mathcal{D}^* = (X, \chi^*)$ を division space とする。 $\{1, 2, \dots, |X|\}$ から $\Pi \wedge$ の写像 $\alpha \in \mathcal{D}^*$ 上の assignment という。 $\Gamma = (\mathcal{D}^*, \alpha)$ を分割ゲームという。分割ゲーム Γ は次のように競技される。競技は $|X|$ 回の move によつて進められ、各 i 回目に競技者 $\alpha(i)$ が、これまで以上に占領されてゐない点を一つ占領し、その結果競技者 π の占領した区域が $\mathcal{D}(\pi)$ となれば $\chi^*(\mathcal{D}, \pi)$ の値によつて勝敗を定める。

このゲームは有限ゲームの一般論から、必勝な競技者ともし。従つて次の関数 ω^+ , ω^- が定義される：

$$\omega^+(\Gamma, \pi) = -\omega^-(\Gamma, \pi) = \begin{cases} 1 & \text{--- 必勝} \\ -1 & \text{--- 必敗.} \end{cases}$$

分割ゲームのゲーム理論はこの関数の値と種々のゲームの間で比較することによつて得られるが、ここでは、これらの結合によつて得られる二三の命題を挙げるにとどめる。次の定理はこれの中で主となるものである。

定理. $\mathcal{D}^\pm$ を regular (又は mixed) 且つ impartial な division space とし, a をある自然数 p によつて $2 \cdot p^\pm$ -周期的な $\mathcal{D}^\pm$ 上の assignment とする. このとき

$$\omega^\pm(\mathcal{D}^\pm, a, \pi_\pm(a)) = 1$$

である. ここに複号は一方に同じものをとるものとし, " $2p^\pm$ -周期的, $\pi_\pm(a)$ " は次のように定義される:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \begin{cases} a(i) = a(i') & \text{iff } \left[\frac{i-1}{p} \right] \equiv \left[\frac{i'-1}{p} \right] \pmod{2} \\ \pi_+(a) = a(1) \end{cases} \\ (-) \quad & \begin{cases} a(i) = a(i') & \text{iff } \left[\frac{N-i}{p} \right] \equiv \left[\frac{N-i'}{p} \right] \pmod{2} \\ \pi_-(a) = a(1 \times 1) \end{cases} \end{aligned}$$

この定理は次の例にみるように, ある意味で best possible である.

例. Hex は regular 且つ impartial である. 特に長さ n の場合 (六角形が 16 個), 次のような assignment は各 n によつて $\#\{i \leq n \mid a(i) = \perp\} \geq \#\{i \leq n \mid a(i) = \top\}$ であるが $\omega^+(\Gamma, \perp) = -1$ である. これは, よく碁で先手の有利さを説明するのに用いられる ^{ある} 論法が実は当を得ていないことを示している.

$$a(i) = \perp \quad \text{iff} \quad i = 1, 2, 3; 7, 9, 11, 13, 15.$$

この例では $|X|$ は 16 である。 $|X|$ が最小であるのは $\mathcal{G}$ のときで、本質的には唯一つの例をもつ。この事実が何を意味するかを考えるのが本稿のテーマである。

補題. $\mathcal{D}^* = (X, X^*) \in \text{division space}$, $a, a' \in \mathcal{D}^*$ 上の assignments とする。今自然数 $n (\leq |X|)$ が存在して

$$a'(i) = \begin{cases} a(i) & i < n \\ a(|X|) & i = n \\ a(i-1) & i \geq n \end{cases}$$

が成立しているとする。このとき次の不等式が成立する:

$$\omega^+(\mathcal{D}^*, a, \pi_-(a)) \leq \omega^+(\mathcal{D}^*, a', \pi_-(a)).$$

次の定理は、特殊な場合の証明を組織化した方法で改良できることを永尾先生から示唆され、一般的に成立する: とを確信し証明したものである。

定理. a_0 を $\{1, \dots, 2l\}$ (l は整数) から Π への写像で $|a_0^{-1}(\pi)| = l$ をみたすものとする。このとき自然数 N が存在して、 N より大きい n に対して次のような写像 a を作るとき、 $|X| = 2l + n$ なる (regular) impartial division space $\mathcal{D}^* = (X, X^*)$ に対し

$$\omega^+(\mathcal{D}^*, a, \perp) = 1$$

である。ここに a は次の式で与えられるものである：

$$a(i) = \begin{cases} \perp & i \leq n \\ a_0(i-n) & n < i \leq n+2l \\ \top & n+2l < i \end{cases}$$

特に $l=2$, $a_0(i) = \perp \iff i=1, 4$ のとき, $N=2$ とおくと上の式をみたしている。 $n=1$ の場合, $|X|=6$ なる impartial division space $\mathcal{D}^*=(X, X^*)$ で $\omega^+(\mathcal{D}^*, a, \perp) = -1$ となるものに対しては次にあげる χ_0^* と X の置換 σ によって

$$\chi^*(b, \pi) = \chi_0^*(b \circ \sigma, \pi) \quad \forall b \in \mathcal{D}_X \text{ s.t. } |b^-(\pi)|=3$$

となる。また, この χ_0^* に対し $\mathcal{B}_\perp = \{B \subset X \mid |B|=3, \chi_0^*(B, \perp)=1, b^-(\perp)=B\}$ とおくと $(X, \mathcal{B})$ は 2-design を与える。

X : 正 20 面体の 10 対の, 対頂点の組

$\chi_0^*(b, \pi) = -1 \iff b^-(\pi)$ が, 向かい合った三角形の対の中におさまる。

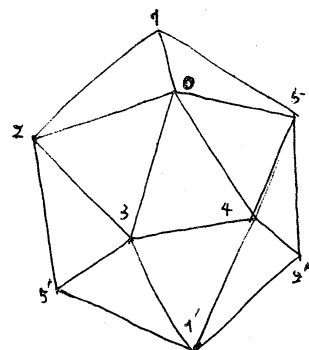


図 2

これが与えた最小の反例である。

§ 3. Nonsingular G -connex

1.4 で G は有限群 G と固定する。 $\tilde{X}$ は有限集合とし、 G は $\tilde{X}$ の上に作用して、単位元以外は不動点をたてないものとする。 orbit space $G \backslash \tilde{X}$ は簡単の爲 X と書くことにする。
 $\tilde{\Psi}: \tilde{X} \times \tilde{X} \times \Pi \longrightarrow \{0, 1\}$, $\chi^+: X$ 上の regular judge により、 $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{X}, \tilde{\Psi}, \chi^+)$ は nonsingular G -connex であるとは、次の 5 つの条件をみたすことである。

$$i) \quad \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{x}, \pi) = 1$$

$$ii) \quad \tilde{\Psi}(\tilde{y}, \tilde{x}, \pi) = \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \pi)$$

$$iii) \quad \tilde{\Psi}(g(\tilde{x}), g(\tilde{y}), \pi) = \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \pi)$$

$$iv) \quad \chi^+(b, \pi) = 1 \iff \chi^+|_{\mathcal{D}_X \times \{\pi\}} = 1 \quad \text{又は}$$

$\tilde{\Psi}|_{\tilde{X} \times \tilde{X} \times \{\pi\}}$ に関する $(b \circ G \backslash)^{-1}(\pi)$ の連結成分 A の

$$\text{存在して} \quad g(A) = A \quad \forall g \in G$$

$$v) \quad \chi^+(b, \pi) = -1 \iff \chi^+|_{\mathcal{D}_X \times \{\pi\}} = 1 \quad \text{ではないとき、}$$

$\tilde{\Psi}|_{\tilde{X} \times \tilde{X} \times \{\pi\}}$ に関する $(b \circ G \backslash)^{-1}(\pi)$ の連結成分 A には

$$\text{対しては} \quad g(A) \cap A = \emptyset \quad \forall g \neq e.$$

nonsingular G -connex については pseudo-homomorphism 等が定義され、impartial, perfect など概念も自然に導入される。
 nonsingular G -connex $\tilde{\mathcal{C}}$ は自然に regular division space $\tilde{\mathcal{C}}^+$ と導くが、上記の概念はすべて $\tilde{\mathcal{C}}$ の $\tilde{\mathcal{C}}^+ \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ へ遺位する。 $\tilde{\mathcal{C}}$ は、

$\text{Aut } \tilde{C}$ から $\text{Aut } \tilde{C}^+$ への自然な群準同型写像が onto であるとき faithfull であるという。

前節の最後: 挙げた例は一つの nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -connex を与えているが, Hex もその一例と考えられることだ, のちに明らかになる. 一般に nonsingular G -connex が与えられたとき $|G|$ の素因子 p に対し, 同じ division space を生じるような $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -connex が自然に構成されるが, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の場合 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ connex で表せないような division space が生じるようなものも存在するかどうか不明である. 蛇足ながら nonsingular $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ connex (p : prime) の定義には (v) の条件は不要である. また, 巡回群 G となる G に対しては次の定理が成立する.

定理. G が巡回群となるとする. このとき nonsingular G -connex $\tilde{C} = (\tilde{X}, \tilde{\Phi}, X^+)$ に対し次の評価式が成立する.

$$|X - X^0| \leq 4,$$

ここに X^0 は $\tilde{C}^+ = (X, X^+)$ の negligible points の集合である.

§ 4. Spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -connex

この節では nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -connex の例を多く作る手段を考える. これは, 2 節の末尾の例の拡張である. S^2 と $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$ のことを意味するものとし, α を S^2 の antipodal map とし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $\langle \alpha \rangle$ と同一視する. このとき:

定理. $\mathcal{R} = (K^0, K^1, K^2) \in \mathcal{P}^2$ a simplicial decomposition of

$\alpha(K^i) = K^i \quad K^i \in \pi, \pi \neq \emptyset$ とする. このとき次の $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{X}, \tilde{\Psi}, \chi^+)$ は nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex である.

$$\tilde{X} = K^0$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \pi) = 1 \iff \exists k' \in K^1, \tilde{x}, \tilde{y} \in k'$$

$$\chi^+(b, \pi) = 1 \iff \exists A: \tilde{\Psi}\text{-connected component of } (b, G)(\pi)$$

$$\text{s.t. } \alpha(A) = A.$$

この方法で得られる $\pi \in \mathcal{R}$ から導かれる initial spherical
 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex という. $\tilde{\mathcal{C}}$ は X 上の position であるとき上の nonsingular
 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex から自然に得られる nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex $\tilde{\mathcal{C}}_2$ を
考える. この種の $\pi \in \mathcal{R}$ は spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex という.

H_{2X} は下の図に描くように spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex として実現できる.

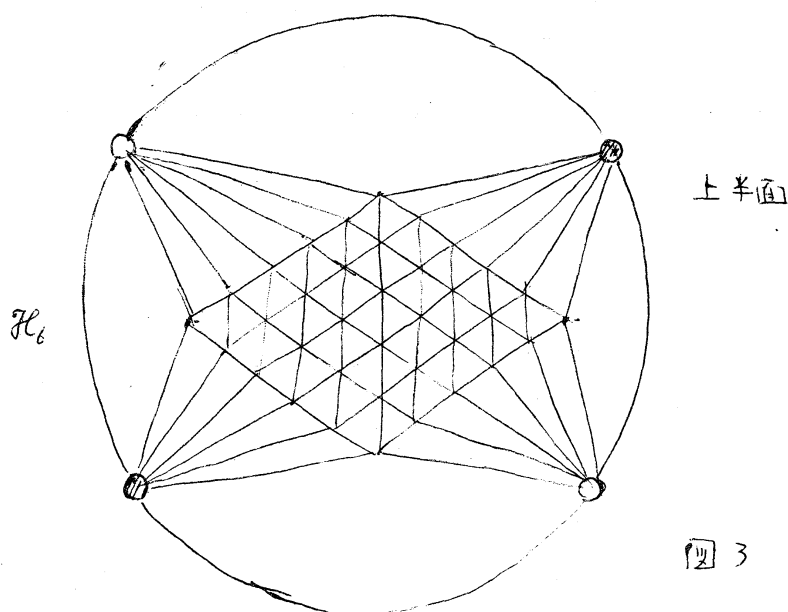


図 3

§ 5. ま と め

今までは, division space, spherical $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex, nonsingular G -convex を定義したから, 本から加少しづつ広げる異, 1. 範囲を σ の π と π の例で示そう. $\mathcal{D}_{2n+1}^+$ は π は次のように定義する:

$$|X_{2n+1}| = 2n+1$$

$$\chi^+(b, \pi) = 1 \iff |\delta^-(\pi)| \geq n+1.$$

$2n+1 = 1, 3$ のときは spherical であり, 5 のときは nonsingular $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex であるが, spherical ではない. 7 のときは nonsingular G 表現ではある.

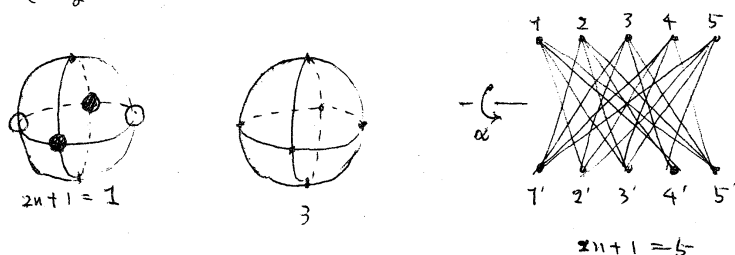


図 4

(注) convex が spherical であるというとは必ずしも $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -convex が平面 G の π であるとは意味しない.

参考文献

- [1] 山崎洋平 Hex (= Nash game) の一般化 —— その理論と実例
数理解析研究所講究録 263
- [2] “ n 人 G (ナッシュゲーム) の存在 ” 数理科学
1976. 1. 5 月号
- [3] Y. Yamasaki Theory of division games J. of Combinatorial Theory

投稿中