

# 弾性弦の非線型振動について

東京理大 理 細谷正憲

( Masanori HOSOYA )

次の方程式について考える。

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + |u|^{\alpha} u + \lambda u_t = f(x, t) \\ x \in \Omega, \quad 0 < t \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \\ 0 < t \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

ここに,  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の b.d.d. domain,  $\Gamma = \partial\Omega$  は smooth boundary,  $\alpha \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $T > 0$  である。  $M(\cdot)$  は弦の歪みを表わす。  
 $M$ ,  $\alpha$ ,  $f$  に関して, 次の仮定を設ける。

$$(A.1) \quad M(r) \in C^1[0, \infty), M(r) \geq m_0 > 0 \quad \text{for } r \geq 0.$$

$$(A.2) \quad M'(r) \geq 0 \quad \text{for } r \geq 0.$$

$$(A.3) \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{2}{n-2} \quad (n \geq 3), \quad 0 \leq \alpha < \infty \quad (n=1, 2).$$

$$(A.4) \quad f \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Theorem 1. (Existence). (A.1), (A.3), (A.4) を仮定する。

初期値は,  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$  にとる。もし, 初期エネルギー  $E(0)$  と  $\|f\|_{L^1(0, \infty; L^2(\Omega))}$  がある意味で十分小さくば, (1)-(3) の解が一意に存在し, (i)  $u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$   
(ii)  $u_t \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$  & (iii)  $u_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$  を満たす。

解の漸近挙動に関して, 次の結果が得られる。

Theorem 2. (Decay estimate I). (A.1) - (A.4) を仮定する。  
もし、 $\delta_0(t) \equiv (\int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds)^{1/2} \leq C_0 e^{-\theta_0 t}$ , ( $C_0, \theta_0 > 0$ ) ならば  
全エネルギーに対し、 $E(t) \leq C e^{-\theta t}$ , ( $C, \theta > 0$ ) が成り立つ。

Theorem 3. (Decay estimate II).  $f \equiv 0$  の場合、(A.1) - (A.3)  
を仮定する。もし、 $\lambda < 2\sqrt{m_0}$  ならば、次の評価が成り立つ。

$$E(0) e^{-2\lambda t} \leq E(t) \leq [(1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{m_0}}) / (1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{m_0}})] E(0) e^{-\lambda t}.$$

記号:  $E(t) = \frac{1}{2} \{ \|u_t(t)\|^2 + \overline{M}(\|\nabla u(t)\|^2) + \frac{2}{\alpha+2} \|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \}$

$$\overline{M}(s) = \int_0^s M(r) dr, \quad \|\cdot\| \text{ は } L^2\text{-ノルム}.$$

次に、

$$(A) \quad u_{tt} - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + g(u_t) = f(x, t) \\ x \in \Omega, \quad 0 < t$$

及び

$$(B) \quad u_{tt} - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + |u|^\alpha u - \Delta u_t = f(x, t) \\ x \in \Omega, \quad 0 < t$$

について考える。初期条件、境界条件は、同様に (3) 及び (2)  
とする。 $g(u_t)$  は nonlinear damping term の場合を考  
える。主目的は、local, global solvability として  
解の漸近的挙動を調べることである。紙面の余白も少なくな  
ってきたので、これらの結果は当日紹介することにする。

注1) Theorem 2 の仮定に出て来た条件に番号を付けて置く.

$$(A.5) \quad \delta_0(t) \equiv \left( \int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \leq C_0 e^{-\theta_0 t} \quad (C_0, \theta_0 > 0)$$

先に (5) について, すなわち次の方程式について考える.

$$\begin{aligned} (5) \quad & \begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + |u|^\alpha u - \Delta u_t = f(x, t) \\ \qquad \qquad \qquad x \in \Omega, \quad 0 < t \\ (2) \quad u(x, t)|_{\Gamma} = 0 \qquad \qquad \qquad 0 < t \\ (3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

$f$  に関して, 次の仮定を設ける.

$$(A.6) \quad f \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$$

注2) (A.4) との違いは,  $f \in L^2$  となること ((A.4) では  $f \in L^\infty$ )

Theorem 4 (Existence) (A.1), (A.3), (A.6) を仮定する.

初期値は,  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$  にとる. このとき, (5)(2)(3) の解が一意的に存在し, Theorem 1 における (i) — (iii) を満たす.

注3) Theorem 4 においては, 初期値は小さくなくてよい.

解の漸近挙動に関しては、次の結果が得られる。

Theorem 5 (Decay estimate III). (A.1), (A.3), (A.5), (A.6)

を仮定する。このとき 全エネルギー に対し、

$$E(t) \leq C_2 e^{-\theta_2 t}, \quad (C_2, \theta_2 > 0; m_0, \theta_0 \text{ に depend})$$

が成り立つ。

次に (4) について、すなわち 次の方程式について考える。

$$\begin{aligned} (4) \quad & \begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + g(u_t) = f(x, t) \\ \qquad \qquad \qquad x \in \Omega, \quad 0 < t \\ (2) \quad u(x, t)|_{\Gamma} = 0 \qquad \qquad \qquad 0 < t \\ (3) \quad \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

ここでは、 $g$  として 次の2つの場合を考える。

$$(a) \quad g(s) = |s|^\alpha s, \quad \alpha > 0$$

$$(b) \quad g(s) = |s|^\alpha s + \lambda s, \quad \alpha > 0, \lambda > 0$$

$f$  に関しては、次の仮定を設ける。

$$(A.7) \quad f \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$(A.8) \quad f \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$$

解の存在に関しては、次の結果が得られる。

Theorem 6 (Existence) (a)  $g(s) = |s|^\alpha s$  ( $\alpha > 0$ ) の場合.

(A.1), (A.3), (A.6) を仮定する. 初期値は  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\alpha+1)}(\Omega)$  にとる. このとき  $T_0 > 0$  が存在し.

$$(i) \quad u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

$$(ii) \quad u_t \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$$

$$(iii) \quad u_{tt} \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$$

$$(iv) \quad u_t \in L^{\alpha+2}(Q) \quad , \quad \text{ここで } Q = \Omega \times (0, T_0)$$

を満たす (4)(2)(3) の解が一意的に存在する.

注4) (i)(ii)(iii) は Theorem 1 における (i)(ii)(iii) で  $\infty$  を  $T_0$  にしたものである.

Theorem 7 (Existence) (b)  $g(s) = |s|^\alpha s + \lambda s$  ( $\alpha > 0, \lambda > 0$ ) の場合

(A.1), (A.3), (A.8) を仮定する. 初期値は  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\alpha+1)}(\Omega)$  にとる. もし初期エネルギー  $E(0)$  と  $\|f\|_{L^1(0, \infty; L^2(\Omega))}$  がある意味で十分小ならば, (4)(2)(3) の解が一意的に存在し, Theorem 1 における (i)(ii)(iii) を得る.

最後に Theorem 4 の略証を述べる.

Proof of Theorem 4 (方針のみ)

Galerkin 法を用いる.

$\{W_j\}$  を  $-\Delta W_j = \lambda_j W_j$  in  $\Omega$ ,  $W_j = 0$  on  $\Gamma$  ( $j=1,2,\dots$ )  
を満す  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  の basis とする.

$$\textcircled{1} \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) W_j$$

を

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} (u_m''(t), W) + M(a(u_m(t))a(u_m(t), W) \\ \quad + (|u_m(t)|^\alpha u_m(t), W) = f(t, W) \quad \forall W \in V_m \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} u_m(0) = u_{0m} \xrightarrow{S} u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} u_m'(0) = u_{1m} \xrightarrow{S} u_1 \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

の解とする.

記号:  $a(u, v) \equiv \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$ ,  $a(u) \equiv a(u, u)$

$(\cdot, \cdot) : L^2$  内積

$$V_m \equiv \text{linear hull of } \{W_1, \dots, W_m\}$$

$$\bar{M}(s) \equiv \int_0^s M(r) dr \geq m_0 s$$

$u_m$  に関する 12 次の Lemma が得られる.

Lemma 1

$$\textcircled{5} \quad \|u_m'(t)\| \leq C_1$$

$$\textcircled{6} \quad \|u_m(t)\|_{H_0^1} \leq C_2$$

$$\textcircled{7} \quad \int_0^t \|u_m'(s)\|_{H_0^1} ds \leq C_3$$

$$\textcircled{3} \quad \|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq C_4$$

$\textcircled{4}$   $\textcircled{2}$ 式に  $w = u'_m(t)$  を代入する.

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|^2 + M(a(u_m(t))) + \frac{2}{\alpha+2} \|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right\} \\ + \|u'_m(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \|f(t)\| \cdot \|u'_m(t)\|$$

この式の両辺を積分し.

$$\frac{1}{2} \left[ \|u'_m(t)\|^2 + m_0 \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 + \frac{\alpha}{\alpha+2} \|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right] \\ + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leq C(u_0, u_1) + \int_0^t \|f(s)\| \cdot \|u'_m(s)\| ds$$

あとは Granwall の不等式を利用する.

Lemma 2  $\textcircled{9} \quad \|\Delta u_m(t)\| \leq C_5$

$$\textcircled{10} \quad \int_0^\infty \|\Delta u_m(s)\|^2 ds \leq C_6$$

$\textcircled{4}$   $w = -\Delta u_m(t)$  in  $\textcircled{2}$  として同様に計算する.

Lemma 3  $\textcircled{11} \quad \|u'_m(t)\|_{H_0^1} \leq C_7$

$$\textcircled{12} \quad \int_0^\infty \|\Delta u'_m(s)\| ds \leq C_8$$

$\textcircled{4}$   $w = -\Delta u'_m(t)$  in  $\textcircled{2}$  として同様に計算する.

Lemma 4  $\textcircled{13} \quad \int_0^\infty \|u''_m(s)\|^2 ds \leq C_9$

$\textcircled{4}$   $w = u''_m(t)$  in  $\textcircled{2}$  として同様に計算し. Schwarz の不等式を用いる.

## 「註記」

細谷氏はこの講演の後、不幸にして病床に臥すこととなり、この記録の作成時点で原稿を書けない病状である。ここに載せたものは、御本人の講演予稿を古谷氏のノートによって補ったものである。細谷氏の速やかな御回復をお祈り申し上げます。　（高村）