

複素力学系の双加群が 生成する $\mathbb{C}$ -環 — 多項式の場合 —

Okayama Univ.

岡山大学環境理工

九州大学数理

Kyushu Univ.

Kajiwara, Tsyoshi

梶原毅

綿谷安男

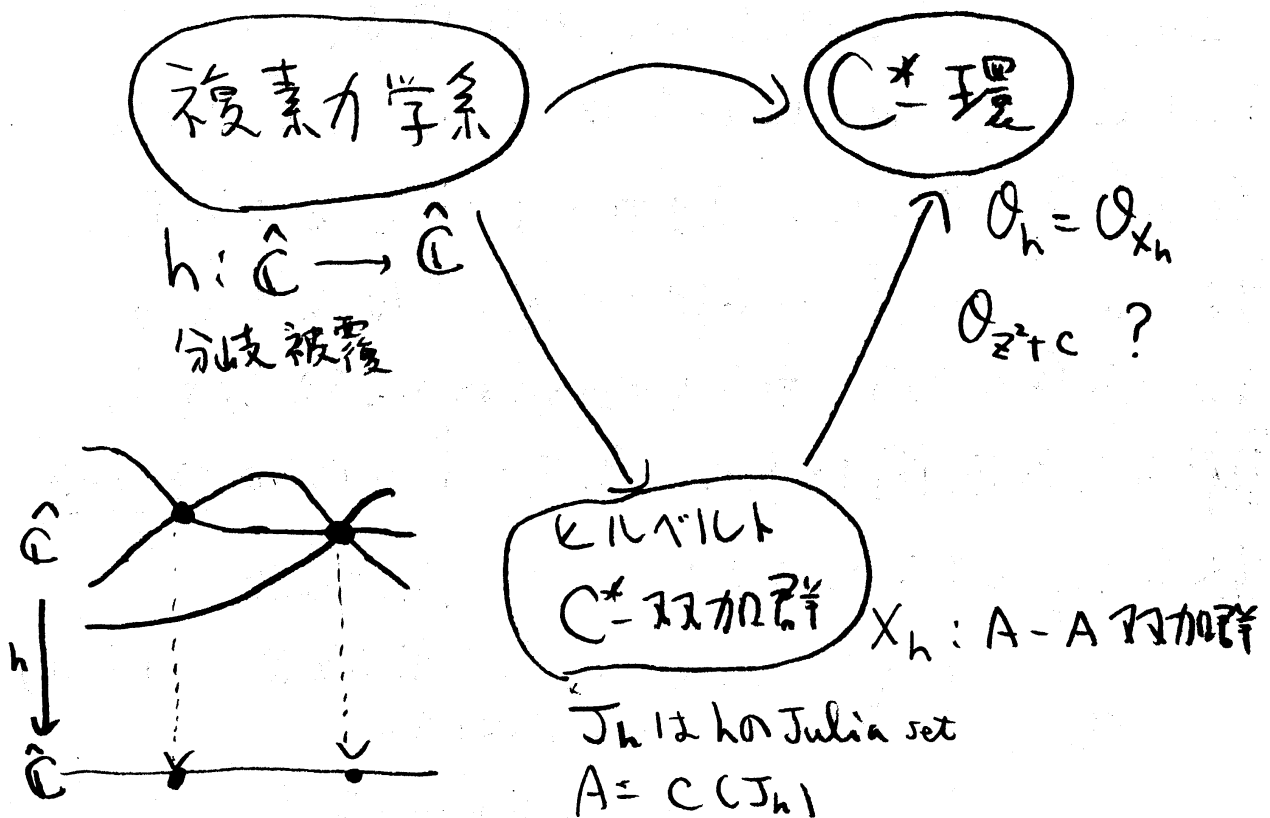
Watatani, Yasuo

Ⅰ はじめに

複素力学系の世界と作用素環の世界を結ぶ
何らかの ^架橋 ^{はし} もつくりたいと願ってきたが、
ここではそれへの一つのささやかな試みを提案する。
もちろん本当にこれでうまくゆくかは、しばらくはこの
方向でやってみないとわからない。

多項式や有理関数 h を複素平面 $\mathbb{C}$ やリーマン
球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の複素力学系とみるとそれは
非常に深く興味ある対象である。その反復合成
の点列 $(h^n)_n$ の挙動を反映するような $\mathbb{C}$ -環
 $\mathcal{O}_h$ をうまく構成できないかを考えてみる。

全体を図式化してみよう。



点列 $(h^n(z))_n$ の挙動は大きくわけると、安定になる点と不安定でカオス的な点との2つになり、前者の点の集まりが Fatou set F_h 、後者の点の集まりが Julia set J_h とよばれている。ここでは構成した C^* -環 O_h が単純になるように意図するので、最初から Julia set J_h に力学系を制限する。有理関数 $h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は分岐被覆になるので、 $A = C(J_h)$ 上のヒルベルト双加群 X_h を経由して特異点の困難に向かう。

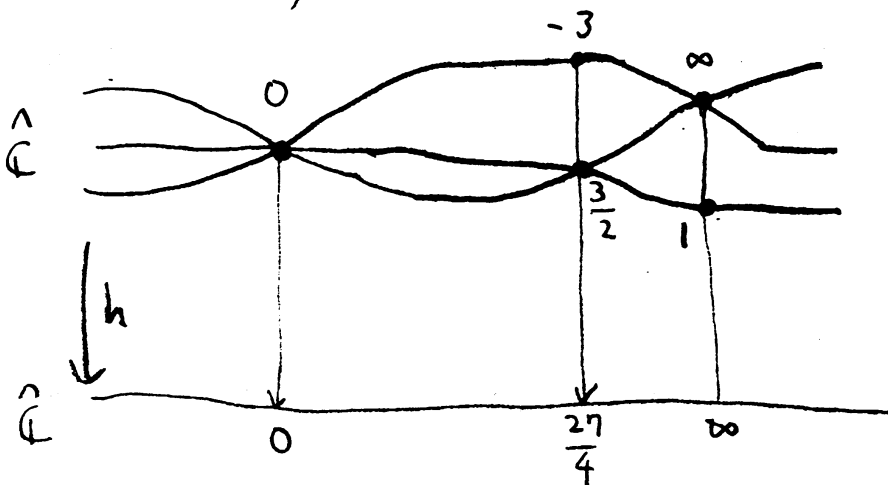
② 複素力学系

2次以上の多項式もしくは有理関数 h をリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の変換 $h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ とみなし、その反復合成からなる複素力学系 $(h)_n$ を考えよう。すると $h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は有限個の点で分岐をもつ分岐被覆となる。記号をきめるとき少し復習をする

[Def] h を有理関数とし、点 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ での h の 分岐指数 を e_{z_0} とかく。つまり

$$e_{z_0} = \begin{cases} 1 & (z_0 \text{ が } h \text{ の分岐点ではない}) \\ & \text{ie. } h'(z_0) \neq 0 \\ k & (z_0 \text{ が } h \text{ の分岐点であり} \\ & z_0 \text{ のある近傍 } U_{z_0} \setminus \{z_0\} \text{ で } h \text{ は } k:1) \end{cases}$$

[例] $h(z) = \frac{z^3}{z-1}$ の時の分岐分布図を「次を落して」かいてみると、



$$\begin{aligned} e_0 &= 3 \\ e_{-3} &= 1 \\ e_{\frac{3}{2}} &= 2 \\ e_{\infty} &= 2 \\ e_1 &= 1 \end{aligned}$$

[例] h が多項式なら $h'(z_0) = 0 \Rightarrow h(z) - h(z_0) = (z - z_0)^k g(z)$ と $(z - z_0)$ をちょうど k 個因子にむくとき $e_{z_0} = k$, $g(z_0) \neq 0$

今回は簡単のため以下 h を 2 次以上の多項式の場合のみを考えよう。すると ∞ はジュリア集合には入らないし、ジュリア集合の定義も正規族ない

Def $I_h := \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |h^n(z)| = \infty\}$

を h の発散点集合

$K_h := \mathbb{C} \setminus I_h$ を h の充填ジュリア集合

$J_h := \partial K_h$ を h のジュリア集合

① I_h は開かつ連結

② K_h はコンパクト

③ J_h はコンパクト

④ $E = I_h$ も K_h も J_h も完全不変集合
つまり $h(E) = h^{-1}(E) = E$

そこで h をジュリア集合上に制限した力学系

$$h|_{J_h}: J_h \rightarrow J_h$$

を考えることが出来る。

例 $h(z) = z^n$ とすると

$$I_h = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}, \quad K_h = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$J_h = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ となる}$$

$$h|_{J_h}(z) = z^n \text{ は } T(\theta) = n\theta \pmod{1} \text{ on } T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

例 $h(z) = z^2 - 2$ とする

$$I_h = \mathbb{C} \setminus [-2, 2], \quad K_h = [-2, 2]$$

$$J_h = [-2, 2] \text{ なの?}$$

h をジョリア集合 J_h に制限した $h|_{J_h}$ は テント写像
と位相共役になる。

③ リーバルト双加群の構成

h を 2 次以上の有理関数 とすると 分岐点は
有限個で それらの 分岐指数も $\text{degree } h$ に おさえられ

$$\text{す: } \forall w \in \hat{\mathbb{C}} \quad \sum_{z \in h^{-1}(w)} e_z = \text{degree } h$$

これは、次の「Riemann-Hurwitz の関係」

$$\sum_z (e_z - 1) = 2 \text{degree } h - 2$$

が成立している。そこで h が 有理関数 なら

分岐が有限で抑さえられるので うまく $A = C(J_h)$
値内積を定義できる。これ以外の超越関数の
場合は困難であり、将来の課題である。

ジョリア集合 J_h 上の連続関数のつくる可換 C^* -
環を $A = C(J_h)$ とする。 h の グラフ を 考えよう。

$$g := \text{graph}(h|_{J_h})$$

$$= \{ (x, y) \in J_h \times J_h \mid y = h(x) \}$$

$X_0 := C(\mathcal{G})$ を次で A - A 双加群とす
 $a, b \in A = C(J_h)$, $f \in X_0$ に対し

$$(a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y)$$

X_0 上に次で A 値右内積 $(\cdot)_A$ とす:
 $f, g \in X_0 = C(\mathcal{G})$ に対し, $y \in J_h$

$$(f(g))_A(y) := \sum_{x \in h^{-1}(y)} e_x \overline{f(x, y)} g(x, y)$$

Lemma $J_h \longrightarrow \mathbb{C}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $y \longmapsto (f(g))_A(y)$ は連続になる

つまり $(f(g))_A$ は $A = C(J_h)$ となり well-defined

Def X_0 を $\|f\| = \|(f)_A\|^{1/2}$ で完備したもの
 X_h はヒルベルト双加群になる。これを h に
 付随するヒルベルト双加群とよぶ。

⑤ X_h は full で左 $\mathcal{K}$ の作用 $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(X_h)$
 は $\phi: 1 \rightarrow 1$ になる。

⑥ h の分岐点が Julia 集合に含まれない場合は
 なる X_h は有限生成だが、そうでないとき可算生成である。

例) $h(z) = z^2 \Rightarrow X_h$ は有限生成

例) $h(z) = z^2 - 2 \Rightarrow X_h$ は有限生成にはならない.

4) C^* 環 $\mathcal{O}_h$ の構成

Def) h を 2 次以上の多項式とする。 X_h を h に付随するヒルベルト双加群とする。 $\mathcal{O}_h$ を X_h から生成される Cuntz-Pimsner 環 $[P]$ とする。 $\mathcal{O}_h \cong \mathcal{O}_{X_h}$.

つまり $\mathcal{O}_h$ は $\{S_f \mid f \in X\}$ と A から生成され、次の関係も満たす universal な C^* 環である

$$\bullet S_f \cdot a = S_f a \quad f, g \in X$$

$$\bullet a \cdot S_f = S_a f \quad a \in A$$

$$\bullet S_f^* S_g = (f(g))_A$$

$$\bullet \text{もし } a \in \phi^{-1}(K(X_A)) \text{ ならば } \phi(\phi(a)) = a$$

$$\text{つまり } \phi: K(X_A) \longrightarrow \mathcal{O}_X \text{ *homomorphism}$$

$$\phi(\theta_{f,g}) = S_f S_g^* \text{ としたものの}$$

注) $\theta_{f,g}(r) = f(g(r))_A$: "rank one" 作用素

つまり $\{\theta_{f,g} \mid f, g \in X\}$ の span の閉包が $K(X_A)$

② 実際の構成は X 上の full Fock space

$F(X) = A \oplus X \oplus X \otimes X \oplus X \otimes X \otimes X \oplus \dots \otimes X \otimes X \otimes X \otimes A$ の creation 作用素全体 J_X の商空間といつて可.

(注) Deaconu - Muhly [DM] も分岐被覆に C^* 環を対応させていて大変興味深い。しかし、私たちの構成とは少し異なるし、できた C^* 環も一般的には同型ではない。

Theorem h を 2 次以上の多項式とする

$\Rightarrow \mathcal{O}_h$ はいつでも 半純環である。

さらに h の分岐点が一々ノ分散点であれば $n = \text{degree}(h)$ として $\mathcal{O}_h \cong \mathcal{O}_n$ と n の生成元をもつ Cuntz 環に同型になる。

(注) J. Schweizer [5] の定理も適用する。
[KPW] で扱った時もあるが。

例 $h_c(z) = z^2 + c$ と 2 次式の時を考える
Mandelbrot 集合を M で表わそう。

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid (h_c^n(z))_n \text{ は 有界列}\}$$

$$\textcircled{1} c \notin M \Rightarrow \mathcal{O}_{h_c} \cong \mathcal{O}_2 \text{ (Cuntz 環)}$$

$$K_0(\mathcal{O}_{h_c}) = 0, \quad K_1(\mathcal{O}_{h_c}) = 0$$

$$\textcircled{2} c \text{ が } M \text{ の主カージオイド } \{c \in \mathbb{C} \mid c = \alpha - \alpha^2, |\alpha| < \frac{1}{2}\} \text{ の内部}$$

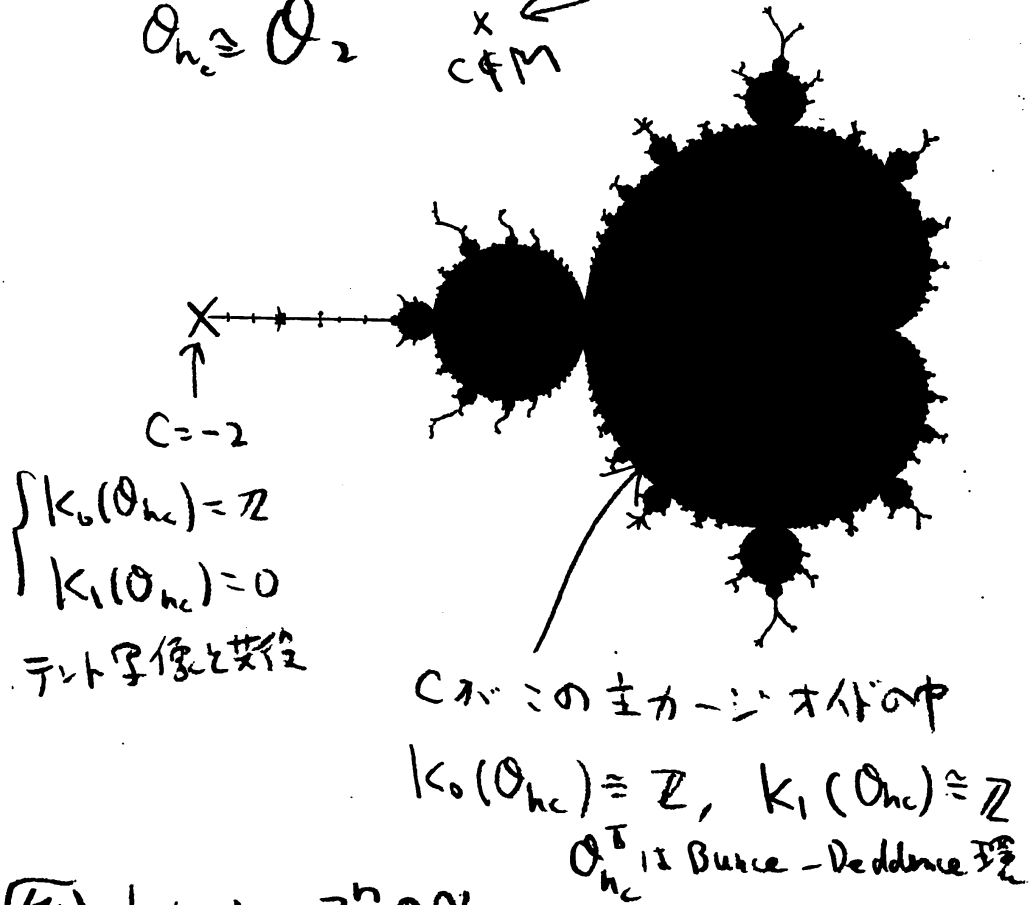
$$\Rightarrow \mathcal{O}_{h_c} \text{ は } K_0(\mathcal{O}_{h_c}) = \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{O}_{h_c}) = \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{3} c = -2 \Rightarrow h|_{\mathbb{T}_h} \text{ は テイト 写像 と 等価で}$$

$$K_0(\mathcal{O}_{h_c}) = \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{O}_{h_c}) = 0$$

$\langle h_c(z) = z^2 + c \text{ の時の } \square \text{ 示} \rangle$

Mandelbrot 集合 M の
外には Cantor 環
 $\mathcal{O}_{h_c} \cong \mathcal{O}_2$ $\begin{matrix} \times \\ \nwarrow \\ c \notin M \end{matrix}$ $\begin{cases} k_0(\mathcal{O}_{h_c}) = 0 \\ k_1(\mathcal{O}_{h_c}) = 0 \end{cases}$



$\square$ 例 $h(z) = z^n$ の時

$$k_0(\mathcal{O}_h) \cong \mathbb{Z}$$

$$k_1(\mathcal{O}_h) \cong \mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{(n-1)\mathbb{Z}}$$

gauge action による fixed point algebra

$$\mathcal{O}_h^T \text{ は } n^\infty \mathbb{Z} \text{ の Burce - Deddence } \mathbb{Z}_n^{\otimes \infty}$$

<< References >>

- [DM] V. Deaconu and P. S. Muhly, C^* -algebras associated with branched coverings, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000), 1077-1086
- [KPW] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^* -algebras generated by Hilbert bimodules, J. Funct. Anal. 159 (1998), 295-322
- [P] M. V. Pimsner, A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, Field Institute Communications 12 (1997), 189-212
- [S] I. Schweizer, Dilations of C^* -correspondences and the simplicity of Cuntz-Krieger algebras, J. Funct. Anal. 180 (2001), 404-425.