

Einstein-Kähler metric に関する最近の話題

阪大教養 満洲 俊樹 (Toshiki Mabuchi)

X を n 次元コンパクト連結ケーラー多様体とし、

$$\omega = \sqrt{-1} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

を、その Kähler form を holomorphic local coordinates $(z^1, z^2, \dots, z^n)$ でもって書いたものとする。対応する Ricci form

$$\text{Ric}(\omega) = \sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})$$

が De Rham コホモロジイ類 $2\pi c_1(X)_\mathbb{R}$ の代表元になっていることに注意する。さて、次の定義を思い起こせ。

定義: ω が Einstein-Kähler $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $\text{Ric}(\omega) = \lambda \omega$

ここで、 ω を (正の) 定数倍しても、 $\text{Ric}(\omega)$ は変化しないので、 ω を最初から適当に、正定数倍して normalize することによって、 λ の可能性は次の3種類の値に限られるとしてよい。

$$\lambda = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1.$$

そこで、 ω を Einstein-Kähler として、上の3種類の λ の値が X のどういう定性的性質を導くか、調べてみよう。

Case 1: $\lambda = -1$ (このとき ω represents $-2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$)

$$\Rightarrow \text{Ric}(\omega) = -\omega \Rightarrow c_1(X) < 0, \text{ i.e., } K_X \text{ is ample.}$$

Case 2: $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \text{Ric}(\omega) = 0 \Rightarrow c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0, \text{ i.e., } \exists m \in \mathbb{Z}_+ \text{ s.t. } mK_X = \mathbb{I}$$

Case 3: $\lambda = 1$ (このとき ω represents $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$)

$$\Rightarrow \text{Ric}(\omega) = \omega \Rightarrow c_1(X) > 0, \text{ i.e., } X \text{ is a Fano manifold.}$$

この逆問題が Calabi 予想と言われている。即ち、

予想A: (1) $K_X : \text{ample} \Rightarrow \exists$ Einstein-Kähler metric ω s.t. $\text{Ric} \omega = -\omega$.

(2) $c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \forall$ Kähler class $\mathcal{K}$, $\exists 1$ Ricci flat metric ω in $\mathcal{K}$.

(3) $c_1(X) > 0, h^0(X, \mathcal{O}(TX)) = 0 \Rightarrow \exists$ Einstein-Kähler metric ω s.t. $\text{Ric} \omega = \omega$.

この予想は、

(1) : Affirmative に Aubin によって解決された。

(2) : Affirmative に Yau によって解決された。

(3) は今もって open problem である。

そこで、以下 $c_1(X) > 0$ 即ち X : Fano manifold を仮定し、更に、

$$\mathcal{K} := \{ \text{all Kähler forms in the class } 2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}} \}$$

$$\mathcal{E}_X := \{ \omega \in \mathcal{K} \mid \text{Ric}(\omega) = \omega \}$$

とおく。このとき、上の予想 A の (3) に対しては、次の問題を考えればよい。

問題: $\mathcal{E}_X \neq \emptyset$ のための良い十分 (又は必要十分) 条件を求めよ。

上の予想 A の (3) では $h^0(X, \mathcal{O}(TX)) = 0$ が $\mathcal{E}_X \neq \emptyset$ のための十分条件ではないかと予想しているわけである。

さて、 $\mathcal{E}_X \neq \emptyset$ のための必要条件に関しては次のことが知られている。

定理 (松島): $\mathcal{E}_X \neq \emptyset \Rightarrow X$ の正則変換群 $\text{Aut}(X)$ は reductive algebraic group である。

定理 (三木): $\mathcal{E}_X \neq \emptyset \Rightarrow X$ の Futaki's obstruction が消える。

定理(小林): $E_X \neq \emptyset \Rightarrow TX$ は stable vector bundle.

よって上の Calabi の予想 A の (3) は次の形の予想が適当かも知れない。

予想 B: $\text{Aut}(X)$ が reductive algebraic, かつ X の Futaki's obstruction が消え、更に、 TX が stable vector bundle であったとする (もちろん X は $c_1(X) > 0$ をみたすとする)。このとき
 $\Rightarrow E_X \neq \emptyset$.

もちろん、予想 A の (3) も予想 B も解けてはいないが、Einstein-Kähler metric に関する一意性は知られている。

定理(板東-満洲): $E_X \neq \emptyset$ と仮定する。このとき、
 $\forall \omega_1, \forall \omega_2 \in E_X$ に対し、 $\exists g \in \text{Aut}^0(X)$ s.t. $\omega_2 = g^* \omega_1$.

但し、 $\text{Aut}^0(X)$ は $\text{Aut}(X)$ の identity component を意味するものとする。また、Einstein-Kähler metric の存在に関して、最近、坂根-小磯, Siu, Tian-Yau らの研究によって、かなりのことがわかってきた。特に、最新の Tian-Yau

の研究は著しいので、ここにその結果だけだが紹介する。

$S \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする。かつ、 S を Delpezzo surface (即ち $c_1(S) > 0$ を満たす compact 連結複素曲面) だとする。このとき S は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の r 個 (但し $1 \leq r \leq 8$) の点 $P_1, P_2, \dots, P_r$ (no three of them lie on a line, and no six of them lie on a conic) の blowing-up になっている事に注意する。更に簡単な計算から

$r=1, 2$ の時、 $\text{Aut}(X)$: not reductive

$r=3$ の時、 $\text{Aut}(X)$: reductive

$4 \leq r \leq 8$ の時、 $\text{Aut}(X)$: finite group.

更に $r \geq 3$ なら、Futaki's obstruction of X vanishes かつ TX が stable vector bundle になるので、予想 B の $n=2$ の場合は次のような形となる。

予想 C: S を Delpezzo surface with $r \geq 3$ とする。このとき $E_S \neq \emptyset$ である。

Tian-Yau はこの予想をかなりの場合に解決した。即ち、

(1) $r=3, 4$ のとき $E_S \neq \emptyset$,

(2) $5 \leq r \leq 8$ をみたす各 r に対し、general な S に対して、

$E_S \neq \emptyset$,

を示した。($r=3$ のときは Siu と $E_S \neq \emptyset$ を示した。)

更に、 Siu 及び $Tian$ は X が Fermat hypersurface of degree m or $m+1$ in $\mathbb{P}^{m+1}(\mathbb{C})$ であるときに、 $E_X \neq \emptyset$ を示している。

さて、予想 B を別の立場から考え直そう。そこで、 X が Fano manifold であつ X が Kähler class $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ に属するような Kähler form 全体を意味することを再確認して、次の定義をする。

定義: $C_{\omega} := \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Ric}(\omega) - \lambda \omega \gg 0 \} \quad (\omega \in \mathcal{K})$
 $C_X := \sup \{ C_{\omega} \mid \omega \in \mathcal{K} \}.$

但し、 X 上の real $(1,1)$ -form θ に対し、 $\theta \gg 0$ であるとは、 θ が X 上致る所で positive definite であることを示す。この C_X に関し、定義から次の性質が容易に出てくる。

- (1) $0 < C_X \leq 1.$
- (2) C_X : biholomorphic invariant of X .
- (3) $E_X \neq \emptyset \Rightarrow C_X = 1.$

更に、Tian-Yau の定理の 1 つを次の様にとらえる事ができ

る。即ち、

定理 (Tian-Yau): The following are equivalent:

- (a) $\exists$ positive constant $\varepsilon = \varepsilon(n)$ depending only on n (and independent of the choice of X) s.t. $c_X \geq \varepsilon$.
- (b) $\exists$ positive constant $K = K(n)$ depending only on n (and independent of the choice of X) s.t. $c_1(X)^n [X] \leq K$.

さて代数幾何 (たとえば松阪-Yános Kollár) の結果により上の (b) は Fano manifold X of dimension n の deformation type (故に特に diffeomorphism type) の有限性を示している。そこで、Siu や Tian-Yau の注意した如く、次の予想は重要である。

予想 D: $\exists$ positive constant $\varepsilon = \varepsilon(n)$ depending only on n s.t. $c_X \geq \varepsilon$ for all Fano manifolds X with $\dim X = n$.

もちろん、この予想が正しければ、Fano manifold X of dimension n の deformation type (故に特に diffeomorphism type) の有限性が導かれる。最後に、次の問題をあげておく。

問題: $\varepsilon_X \neq \phi$ と $c_X = 1$ は同値か?

この他、Futaki's obstruction についても最新の結果があるのだが、それについては他の機会で論じることにする。

References

1. S. Bando and T. Mabuchi : Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo Connected Group Actions, in Algebraic Geometry Sendai 1985, Advanced Studies in Pure Mathematics 10, 1987 Kinokuniya, pp. 11-40.
2. Y. Sakane: Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor, Osaka J. Math. 23 (1986), 585-616.
3. Y. T. Siu: The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group, to appear.
4. G. Tian and S. T. Yau: Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $c_1 > 0$, Commun. Math. Phys. 112 (1987), 175-203.