

Transfer theorem for SG at odd prime

広島大学理学部 南範彦 (Norihiko Minami)

§ 0. 主定理の statement 及びその周辺.

Kahn-Priddy theorem の有効性は、西田 nilpotency の proof 等により、今や専門家なら誰の目にも明らかであろう。この Kahn-Priddy theorem は、 $Q_0 S^0 (\subset \coprod_{i \in \mathbb{Z}} Q_i S^0 = Q S^0)$ の infinite loop structure に関するものであった:

Kahn-Priddy theorem ([KP] 1972)

任意の素数 p に対し、次の合成写像

$$QB\Sigma_p \xrightarrow{Q(B-K-P)} QQ_p S^0 \xrightarrow{Q(*[-p])} QQ_0 S^0 \xrightarrow{\text{str.}} Q_0 S^0$$

は、 p で局所化した時、右 homotopy 逆元を持つ。ここで、

$B-K-P: B\Sigma_n \rightarrow Q_n S^0$ は、Barratt-Kahn-Priddy map ([KP]).

$*[-n]$ は $Q_{-n} S^0$ の基点 $[-n]$ との loop 積、str. は、 $Q_0 S^0$ の infinite loop structure による巻き戻し、(§.1 も参照して下さい。)

一方、 $Q S^0 (= \coprod_i Q_i S^0)$ には、 $Q_0 S^0$ よりも rich な情報

を含んでいると思われて来た(?)別の infinite loop space SG ($=Q, S^0$) が含まれているが、これに対し、Priddy は次のような、 SG の infinite loop structure に関する transfer theorem を得た。

Priddy の theorem ([P]1977)

$$QB\Sigma_2\Sigma_2 \rightarrow QB\Sigma_4 \xrightarrow{Q(B-K-P)} QQ_4S^0 \xrightarrow{Q(*[-3])} QSG \xrightarrow{Str.} SG$$

は、2 で局所化した時、右ホモトピー逆元を持つ。ここで $Str.$ は、 SG の infinite loop structure による巻き戻し。

このことから次の★が成り立つと予想することは、自然であろう。

★ p を任意の奇素数とする時、次の合成写像

$$QB\Sigma_p\Sigma_p \rightarrow QB\Sigma_{p^2} \xrightarrow{Q(B-K-P)} QQ_{p^2}S^0 \xrightarrow{Q(*[1-p^2])} QSG \xrightarrow{Str.} SG$$

は、 p で局所化した時、右 homotopy 逆元を持つか？ ここで $Str.$ は SG の infinite loop structure による巻き戻し。

実際、我々の主定理は、

主定理 ★は正しい。

今年が1985年であるから、Priddyの結果から意外と月日が経ったものである。☆に関して、J.P. May が L.N.M. 74/1, p.633において「 $H_*(SG)$ の Dyer-Lashof operation についての土屋の結果には、計算の gap があるので、Priddy がやったように homology の計算で☆を解くのは、更に一層の困難があるだろう。」と述べているが、我々はこの困難な(というより面倒くさい)計算の方法で解くのである。 $p=2$ の場合と比べて $p: \text{odd}$ の場合は状況がより一層複雑になるので、土屋の結果をより sharp にした結果が必要となる(§3を見て下さい)。土屋の結果に関しては、土屋先生に会って実際に窺った所、当時、土屋先生の頭の中には、確かに完全な証明が存在していたという事なので、以後、土屋の定理と呼ぶこととする。

§ 1. QS^0 の topology (復習)

QS^0 は $\varinjlim_n \Omega^n S^n$ として定義されたから、(sphere から sphere への写像としての) degree i -component を $Q_i S^0$ と置けば $QS^0 = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} Q_i S^0$ が成立する。一方、 QS^0 には標準的な積が2つ存在する: 即ち loop product $*: QS^0 \times QS^0 \rightarrow QS^0$ と composition product $\circ: QS^0 \times QS^0 \rightarrow QS^0$ とである。各々は、

$$*: Q_i S^0 \times Q_j S^0 \rightarrow Q_{i+j} S^0, \quad \circ: Q_i S^0 \times Q_j S^0 \rightarrow Q_{ij} S^0.$$

を満たし、 $Q_0 S^0$, $SG (= Q_1 S^0)$ は各々、 $*$ と $\circ$ を積とする H 空間となる。

ここで、有限群 G の Burnside ring $A(G)$ を思い起こそう。 $A(G)$ は finite G -set の圏から構成した Grothendieck ring で、和は disjoint union により、そして積は Cartesian product により誘導された。 $A(G)$ は Segal map を通して、 $Q S^0$ と関係を持つのである： S を finite G -set とすると、群の準同型 $G \rightarrow \Sigma_{|S|}$ が与えられるので、これと Barratt-Kahn-Priddy map を用いて、写像 $\alpha(S): BG \rightarrow B\Sigma_{|S|} \xrightarrow{B-k-P} Q_{|S|} S^0 \hookrightarrow Q S^0$ を得る。この構成を $A(G)$ 全体に拡張した写像 $\alpha: A(G) \rightarrow [BG, Q S^0]$ が Segal-map である。（ α は同型写像 $\hat{\alpha}: \varprojlim_n A(G)/I(G)^n \rightarrow [BG, Q S^0]$ を誘導するか？というのが Segal 予想であって、Carlsson 等により解かれたが、我々はこの結果は用いない。）重要なのは、次の可換図式が存在することである：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(図 I)} & & \text{(図 II)} \\
 \begin{array}{ccc}
 BG & \xrightarrow{\Delta} & BG \times BG \\
 \alpha(S+T) \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha(S) \times \alpha(T) \\
 QS^0 & \xleftarrow{*} & QS^0 \times QS^0
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccc}
 BG & \xrightarrow{\Delta} & BG \times BG \\
 \alpha(S \times T) \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha(S) \times \alpha(T) \\
 QS^0 & \xleftarrow{\circ} & QS^0 \times QS^0
 \end{array}
 \end{array}$$

ここで、 Δ は diagonal, S, T は $A(G)^\wedge (= \varprojlim_n A(G)/I(G)^n, I(G)$ は $A(G)$ の augmentation ideal) の任意の元であり、 $S+T$ と $S \times T$ は各々、

$A(G)^\wedge$ の和と積を表わす.

さて、§.0 で述べたように、我々の証明は homology calculation を用いるものであるから、関連する homology について述べよう(すべての homology は $\mathbb{Z}_p$ coefficient とする).

$e_i: H_i(B\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ の生成元.

$x_0=1, x_1, x_2, \dots: H_*(X)$ の basis

とすると、 $H_*(E_{\mathbb{Z}_p} X^p)$ の $\mathbb{Z}_p$ basis は.

$$e_i \int x_j = e_i \otimes x_j \otimes \dots \otimes x_j = e_i \otimes x_j^p \quad (i, j \geq 0).$$

$$x_{i_1} | \dots | x_{i_p} = e_0 \otimes x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \quad (i_k \neq i_\ell \text{ for some } k, \ell)$$

$(i_1, \dots, i_p)$ は巡回置換による各代表類を走る.

によって与えられる. 特に、 $X=BH$ とすると、 $E_{\mathbb{Z}_p} X^p (BH)^p = B(\mathbb{Z}_p \wr H)$ となることに注意し、群 $S(p^k, p) = \underbrace{\mathbb{Z}_p \int \dots \int \mathbb{Z}_p}_{k \text{ 個}}$ のホモロジーの元を次のように与える:

非負整数列 $I=(i_1, \dots, i_k)$ に対し.

$$\hat{e}_I := e_{i_1} \int e_{i_2} \int \dots \int e_{i_k} \in H_*(BS(p^k, p))$$

ここで、 $S(p^k, p)$ は Σ_{p^k} の p -Sylow 部分群であり、 $i: BS(p^k, p) \rightarrow B\Sigma_{p^k}$ をそれから誘導される写像とし.

$$e_I := i_*(\hat{e}_I) \in H_*(B\Sigma_{p^k})$$

とおく.

今度は Dyer-Lashof operation について、復習しよう.
 X を infinite loop space とする時、Dyer-Lashof は適当な条

件を満たした写像たち $\theta_n: E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X^n \rightarrow X$ を構成し.

$$Q_i(x) = \theta_{p_n}(e_i x) \in H_*(X)$$

を考察した. この作用素 Q_i は Dyer-Lashof operation と呼ばれ, $p=2$ の場合の Kudo-Araki operation の p : odd case への拡張となっている. 勿論, 我々は $Q_0 S^0$ や SG に関する Dyer-Lashof (各々 $Q_i, \widehat{Q}_i$ と書く) を知りたいのであるが, これらを考える時には全体の $Q S^0$ で考えた方がよい [11]) 即ち, Dyer-Lashof map を拡張する写像たち

$$\begin{array}{ccc} \theta_n: E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (Q S^0)^n & \rightarrow & Q S^0 \\ \cup & & \cup \\ E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (Q_i S^0)^n & \rightarrow & Q_i S^0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \widehat{\theta}_n: E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (Q S^0)^n & \rightarrow & Q S^0 \\ \cup & & \cup \\ E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (\widehat{Q}_i S^0)^n & \rightarrow & \widehat{Q}_i S^0 \end{array}$$

が存在し, これによって, Dyer-Lashof operation の定義域も $H_*(Q S^0)$ 全体へと拡張される.

定義 非負整数列 $I=(i_1, \dots, i_k)$ が次の (i)(ii)(iii) を満たす時 admissible, (ii)(iii) を満たす時 weakly admissible と呼ぶ:

$$(i) \ i_j > 0 \ (j=1, 2, \dots, k)$$

$$(ii) \ i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$$

$$(iii) \ (a) \ i_k \equiv 0 \text{ or } -1 \pmod{2(p-1)} \text{ if the dimension of } \ell_{i_{k+1}} \int \dots \int \ell_{i_k} \text{ is even,}$$

$$(b) \ i_k \equiv p-1 \text{ or } p-2 \pmod{2(p-1)} \text{ if the dimension of } \ell_{i_{k+1}} \int \dots \int \ell_{i_k} \text{ is odd.}$$

定義 各元が次数を持った集合 X に對し, X で生成される free commutative $\binom{\mathbb{Z}_p}{p}$ algebra AX とは, $p=2$ の時, $P[X]$:

多項式環. $p > 2$ の時, $E[X] \otimes P[X^+]$, X^+, X^- は各々, X の次数が偶数の部分と, 奇数の部分とであり, $E[X]$ は外積代数.

$I = (i_1, \dots, i_k)$ の長さ $\ell(I)$ を k と置く. すると我々は, $H_*(Q_0 S^0)$ と, $H_*(SG)$ の Pontryagin ring structure を書き下せる.

Dyer-Lashof [M] $I = (i_1, \dots, i_k)$ に対し,

$e_I = Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_k} [1] * [-p^{\ell(I)}] \in H_*(Q_0 S^0)$ と置けば,

$$H_*(Q_0 S^0) \cong A\{e_I \mid I: \text{admissible}\}$$

土屋 [1], May [M] p : 奇素数とする. $I = (i_1, \dots, i_k)$ に対し,

$x_I = Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_k} [1] * [1 - p^{\ell(I)}] \in H_*(SG)$ と置けば,

$$H_*(SG) \cong A\{x_I \mid I: \text{admissible}\}$$

§19 終りに, 対称群とその部分群の homology に関するいくつかの結果を並べておく. これらは例えば [KP] にある.

Adm [] $\iota: S(p^k, p) \rightarrow \Sigma_{p^k}$ を inclusion とする

と, 任意の非負整数列 J に対し,

$$\iota_* e_J = \sum \lambda_I e_I,$$

ここで $\lambda_I \in \mathbb{Z}_p$ で, I は $\ell(I) = \ell(J)$ なる weakly admissible sequence を取る.

補題 [KP] (これは, well-known でまた, 難かしくない!)

i) $j: (\mathbb{Z}_p)^k \rightarrow S(p^k, p)$ を (標準的な) inclusion とすると, 任意の非負整数列 I に対し, $j_*(x_I) = \hat{e}_I$ なる $x_I \in H_*(B(\mathbb{Z}_p)^k)$ が存在する.

ii) 任意の $x \in H_*(B(\mathbb{Z}_p)^k)$ に対し, $j_*(x)$ は $\hat{e}_I$, $\ell(I) = k$ 達の線形結合で書ける.

Kahn-Priddy [KP2] 自然な写像 $\Sigma_m \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{m+n}$ から誘導される homology の pairing を $*$ で表わす。(これは Barratt-Kahn-Priddy map を通して QS^0 における loop 積 $*$ と両立する). すると、任意の $x = \ell_{i_1} * \dots * \ell_{i_u} * \ell_{I_1} * \dots * \ell_{I_v} \in H_* \Sigma_n$, $i_j \geq 0$, $\ell(I_j) \geq 2$ に対し、

$$(i) \tau_{\Sigma_n \rightarrow S(n,p)}(x) = \hat{\ell}_{i_1} | - | \hat{\ell}_{i_u} | \hat{\ell}_{I_1} | - | \hat{\ell}_{I_v} + \hat{\ell}_x$$

ここで $\hat{\ell}_x = \sum \hat{\ell}_{i_1} | - | \hat{\ell}_{i_u} | \hat{\ell}_{I_1} | - | \hat{\ell}_{I_v}$ の summation は、 $\ell(I_j')$ $= \ell(I_j)$ となる示されている type の元及び、それらの置換 (III) に関するものを走る。

$$(ii) \lambda_{S(n,p) \rightarrow \Sigma_n}(\hat{\ell}_x) = (\lambda - 1)x \quad \text{ここで } \lambda = [\Sigma_n : S(n,p)]$$

ただし、 $S(n,p)$ は Σ_n の p -Sylow で、 $\tau_{\Sigma_n \rightarrow S(n,p)}$, $\lambda_{S(n,p) \rightarrow \Sigma_n}$ は、各々 transfer と、“包含”写像である。

§.2 主定理の証明の方針及び、若干の homology calculation.

我々が、homology calculation で何を示せば良いかと言うと、それは次の目標を示すことである。

目標 stable map の合成写像 $\Sigma^\infty B\Sigma_{p^k} \xrightarrow{\tau} \Sigma^\infty B\mathbb{F}_p(\Sigma_p)$
 $\xrightarrow{d} \Sigma^\infty SG$ は homology において、 k と共に増加するある range で “surjective” となっていることを示せ! ただし、 $\tau = \Sigma^\infty \mathcal{B}_* \circ \Sigma^\infty \mathcal{U}_* \circ \tau'$,
 $d = \Sigma^\infty (\text{str-} Q(\mathbb{W}_p) \circ B(k-p))$ (つまり主定理の合成写像を stable にしたもの). τ' ,
 $\tau': \Sigma^\infty B\Sigma_{p^k} \rightarrow \Sigma^\infty BS(p^k, p)$ は transfer, $\mathcal{U}: BS(p^k, p) \rightarrow B\Sigma_{p^k-2} \int \Sigma_p \int \Sigma_p$

は inclusion. $\beta: B\Sigma_{p^{k-2}} \int \Sigma_p \int \Sigma_p = E\Sigma_{p^{k-2}} \times_{\Sigma_{p^{k-2}}} (B\Sigma_p / \Sigma_p)^{p^{k-2}}$
 $\rightarrow Q B\Sigma_p \int \Sigma_p$ は $Q B\Sigma_p \int \Sigma_p$ の Dyer-Lashof map の制限.

何故目標が達成されたか主定理が証明されるかについて
 では、(可成り standard な議論となつて来たが). $p=2$ の時の Bridg
 の論文 [P] でも参照して下さい. さて、 $I \subset H_*(SG)$ を
 $H_*(SG)$ の positive dimension の元全体、 $B \subset H_*(SG) \triangleq A/\{x_I | I:$
 $\text{admissible}\}$ と $\{x_I | I: \text{admissible}, l(I) \geq 2\}$ で生成される ideal.
 $\mathfrak{F}: H_*(SG) \rightarrow H_*(SG)$, $\mathfrak{F}(x) = x^p$ を Frobenius 写像とする.

補題 A (i) $2 \leq a \leq p$ の時.

$$x_{i_1} * x_{i_2} * \dots * x_{i_a} * [1-a] \equiv x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_a} + \sum_{\substack{l(I)=a \\ I \neq \{i_1, \dots, i_a\}}} x_I \pmod{I \cdot B \cup I^{a+1}}$$

$$(ii) \underbrace{x_{i_1} * \dots * x_{i_p}}_{p \text{ 個}} * [1-p] \equiv x_{i_1}^p \pmod{\mathfrak{F}(B)}$$

$$(iii) ((i) \text{ の拡張である}) x_{(\underbrace{i_1, \dots, i_p}_{p \text{ 個}}, i_{p+1}, \dots, i_n)} \equiv x_{(i_1, \dots, i_n)}^{p^n} \pmod{\mathfrak{F}(B)}$$

補題 B (refined ± 1 theorem) $l(I) \geq 2$ とすると.

$$\tilde{Q}_r(x_I) \equiv x_{(r, I)} + \sum_{l(J)=l(I)} a_J x_J \pmod{\mathfrak{F}(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B}$$

ここで、 $a_J \in \mathbb{Z}_p$.

系 $I=(J, K)$ $l(K)=2$ とすると.

$$\tilde{Q}_J(x_K) \equiv x_I + \sum_{2 \leq l(I') < l(I)} b_{I'} x_{I'} \pmod{\mathfrak{F}(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B}$$

ここで、 $b_{I'} \in \mathbb{Z}_p$

注意 元来の土屋の定理[2]では, indeterminacy が I^2 となっていた. 我々の目的には不十分であるが, 土屋先生の本来的な目的は, $H_*(SG) \triangleq A[\{x_I \mid I: \text{admissible}, l(I) \leq 2\} \cup \{\tilde{Q}_J(x_K) \mid (J, K): \text{admissible}, l(J) \geq 1, l(K) = 2\}]$ 及び, $H_n(BSG) \triangleq A[\{\sigma(x_I) \mid I: \text{admissible}, l(I) \leq 2\} \cup \{\tilde{Q}_J(\sigma x_K) \mid (J, K): \text{admissible}, l(J) \geq 1, l(K) = 2\}]$ を示すことであつたので, それには全く十分であつた[2]. 特にこの最後の $H_*(BSG)$ に関する結果は, BSG の (homology) 特性類を, BSG の infinite loop structure に関する Dyer-Lashof operation $\tilde{Q}_i$ を用いて表示してあるということで, 大変意義深く, $p=2$ の場合の Madsen の定理[]に等価するものである.

補題 A. 補題 B を仮定して目的標達成へのあら筋.

最初に $H_*(SG)$ に filtration を入れよう, $i_1, \dots, i_n, I_1, \dots, I_n$ がすべて admissible であるような单项式 $x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{I_1} \dots x_{I_n}$ に対し, $f(x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{I_1} \dots x_{I_n}) = a + pn$ と置き, $x = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j x_{j, i_j} \dots x_{j, I_j}$ $x_{I_{j,1}} \dots x_{I_{j,n_j}}$ に対しては, $f(x) = \min_j f(x_{j, i_j} \dots x_{j, I_j} x_{I_{j,1}} \dots x_{I_{j,n_j}})$ として weight を入れ, この weight に関して, filtration $\{F_\ell\}$, $F_\ell = \{u \in H_*(SG) \mid f(u) \geq \ell\}$ を考える, $H_*(SG) = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_\infty$ であり, $\forall n, \exists \ell_n$ s.t., $H_n(SG) \cap F_{\ell_n} = 0$ だから, 群の準同型 $f: G \rightarrow H_n(SG)$ が全射であることを言うには, $\forall x \in H_n(SG), \exists g \in G$, s.t., $x \equiv f(g)$ modulo $F_{f(g)+1}$ を言えばよい. この filtration

に関して補題A, Bを見直すと、次のようになる。

$$(1) 2 \leq a \leq p \text{ の時, } x_{i_1} * x_{i_2} * \dots * x_{i_a} * [1-a] \equiv x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_a} + \sum_{l(i)=a} x_i \text{ modulo } F_{f(x_{i_1} - x_{i_a})+1}. \text{ 従って } f(x_{i_1} - x_{i_a}) = a \leq p = f(x_i)$$

$$(2) \overbrace{x_{i_1} * \dots * x_{i_p}}^p * [1-p] \equiv x_{i_1}^p \text{ modulo } F_{p^2}, \text{ 従って } f(x_{i_1}^p) = p$$

$$(3) x_{(0, \dots, 0, i_1, \dots, i_k)} \equiv x_{(i_1, \dots, i_k)}^{p^n} \text{ modulo } F_{p^2}$$

$$(4) I = (J, K), \ell(K) = 2 \text{ に対して}$$

$$\tilde{Q}_J(x_K) \equiv x_i + \sum_{2 \leq l(I'K) \leq l(I)} c_{I'} x_{I'} + \sum c_{i_2} x_{i_2}^p \text{ modulo } F_{p+1},$$

$$\text{従って } c_{i_2} \in \mathbb{Z}_p, f(x_i) = f(x_{I'}) = f(x_{i_2}^p) = p.$$

$$\text{さて、例えば } x = x_{i_1} \dots x_{i_{k+p}} x_{i_1} \dots x_{i_\ell} x_{i_{\ell+1}} \dots x_{i_{\ell+m}} \text{ の}$$

場合に、どうすればよいかわかりかた。従って、 $\ell(I_j) = 2$ for $1 \leq j \leq \ell$

$\ell(I_j) > 2$ for $\ell+1 \leq j \leq \ell+m$ である。すると §1 の最後の Kahn-Priddy
($I_{\ell+m} = (J_2, K_2), \ell(K_2) = 2$ とおく)
の結果を用いることにより、

$$\begin{aligned} d_* \tau_*(e) &= (d_* \sum^{\infty} \beta \cdot \sum^{\infty} u)_* \tau'_*(e) \\ &= (d_* \sum^{\infty} \beta \cdot \sum^{\infty} u)_* (\hat{e}_{i_1} | \dots | \hat{e}_{i_{k+p}} | \hat{e}_{i_1} | \dots | \hat{e}_{i_\ell} | \hat{e}_{i_{\ell+1}} | \dots | \hat{e}_{i_{\ell+m}}) \\ &\quad \sum \hat{e}_{i_1} | \dots | \hat{e}_{i_{k+p}} | \hat{e}_{i_1} | \dots | \hat{e}_{i_\ell} | \hat{e}_{i_{\ell+1}} | \dots | \hat{e}_{i_{\ell+m}} \\ &= (Q_{i_1}[\square] * \dots * Q_{i_p}[\square] * [1-p^2]) (Q_{i_{p+1}}[\square] * \dots * Q_{i_{2p}}[\square] * [1-p^2]) \\ &\quad \dots (Q_{i_{(k-1)p+1}}[\square] * \dots * Q_{i_{kp}}[\square] * [1-p^2]) x_{i_1} \dots x_{i_\ell} \tilde{Q}_{J_1}(x_{K_1}) - \tilde{Q}_{J_m}(x_{K_m}) \\ &\quad + \sum (Q_{i_1}[\square] * \dots * Q_{i_p}[\square] * [1-p^2]) - (Q_{i_{(k-1)p+1}}[\square] * \dots * Q_{i_{kp}}[\square] * [1-p^2]) \\ &\quad x_{i_1} \dots x_{i_\ell} \tilde{Q}_{J_1}(x_{K_1}) - \tilde{Q}_{J_m}(x_{K_m}) \end{aligned}$$

を得るが、上の (1)(2)(3) を用いれば、

$$d_* \tau_*(e) \equiv x + \sum x_{i_1} \dots x_{i_{k+p}} x_{i_1} \dots x_{i_\ell} x_{i_{\ell+1}} \dots x_{i_{\ell+m}} + \alpha \text{ modulo } F_{f(x)+1}. \text{ 従って } f(x) = f(x)$$

我々は、 $\sum x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{kp}} x_{I'_1} \cdots x_{I'_2} x_{I'_{2+1}} \cdots x_{I'_{2+m}}$ が $F_{f(n)+1}$ に入る事を最初に言いたい。そのために、 $k: \text{even}$ と仮定する。この仮定のもとに、 $[\sum_{p \in k} S(p^k, p)] \equiv 1 \pmod{p}$ となり、§1の終りのKahn-Priddyの(ii)により、 $\sum e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_{kp}} e_{I'_1} \cdots e_{I'_2} e_{I'_{2+1}} \cdots e_{I'_{2+m}} = 0$ となる。§1より $H_*(Q_0 S^0)$ と $H_*(SG)$ とは algebra として同型だったから $F_{f(n)+1}$ に入るところか、0になることが言えそうであるが、 I'_j が admissible になる保証はないのでそう上手くはいかない。それで、§1のAdemにより、weakly admissible の level へ持っていく。 (ii)(i) を用いて $F_{f(n)+1}$ に入ることを示す。後は、 α の形を $\psi(\alpha) (=)$ を通してよく眺めて、(ほんの少し複雑な) 帰納法により、 α が $\text{mod } F_{f(n)+1}$ で $d_{\alpha} \tau_{\alpha}$ の像に含まれることが示される。他の形の α についても同様である。

§3. 補題B (reformed Ito theorem) の proof の outline

土屋の argument において、Prop. 4.5 [] が first step であつたが、証明を見ると実際次を示していることがわかる。

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad \widetilde{Q}_r(\chi_I) &\equiv \widetilde{Q}_r Q_I[1] * [1 - p^{p \ell(I)}] + \chi(r, I) \\ &\pmod{\mathfrak{S}(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B.} \end{aligned}$$

それ故、我々は $\widetilde{Q}_r Q_I[1] * [1 - p^{p \ell(I)}]$ を調べる = となるのだが、 $\widetilde{Q}_r Q_I[1]$ については、general distributive law [12] による次の可換図式が有用である。

$$\begin{array}{ccc}
 E \sum_p \times \left(E \sum_{p^{(I)}} \times (Q, S^0)^{p^{(I)}} \right)^p & \xrightarrow{E \sum_p \times (\theta_{p^{(I)}})^p} & E \sum_p \times (Q_{p^{(I)}} S^0)^p \\
 \parallel & & \downarrow \hat{\theta}_p \\
 E \sum_p \sum_{p^{(I)}} \times (Q, S^0)^{p^{(I)}} & & \\
 \searrow & \xrightarrow{\hat{\theta}_{p^{(I)}}} & Q_{p^{(I)}} S^0
 \end{array}$$

$j: B \sum_p \sum_{p^{(I)}} \rightarrow B \sum_{p^{(I)}} \rightarrow Q_{p^{(I)}} S^0$ を、この図式から得られる写像とすれば、 $j_*(e_r e_I) = \hat{Q}_r Q_I [1]$ となる。ところが、ここで §1 の補題 (i) を繰り返し使えば、次の重要な結果が得られる。

命題 $H = (\mathbb{Z}_p)^{2(I)}$ とし、 $\underbrace{H \times H \times \cdots \times H}_{p \text{ 個}}$ を、 $\mathbb{Z}_p \times H$ -set と思う。ただし、 $\mathbb{Z}_p$ は巡回置換として $\underbrace{H \times \cdots \times H}_{p \text{ 個}}$ に作用し、 H は diagonal で作用させる。これを $A(\mathbb{Z}_p \times H)$ の元として $[H^p]$ と書けば、
 $\exists \chi \in H_*(B \mathbb{Z}_p \times H)$ s.t. $\alpha([H^p] + 1 - p^{2(I)})_* \chi = \hat{Q}_r Q_I [1] * [1 - p^{2(I)}]$

これより、~~非~~ $[H^p] + 1 - p^{2(I)} \in A(\mathbb{Z}_p \times H)$ がどういうものか興味を持たれるが、それに関しては次の結果がわかる。

命題 $1 + I(\mathbb{Z}_p \times H)^\wedge$ ($A(\mathbb{Z}_p \times H)^\wedge$ の unit group) において
 $[H^p] + 1 - p^{2(I)} = \coprod_{\substack{|K|=p \\ K \text{ は } H \text{ の部分群}}} (\mathbb{Z}_p \times H_K + 1 - p^{2(I)}) \times \mathbb{Z}^p$,
 ここで $\mathbb{Z} \in 1 + I(\mathbb{Z}_p \times H)^\wedge$

§1 の $A(G)$ と QS^0 の関係、特に (図 4) を思いおせば、
 我々の証明は完了する。

homology が diagonal map でどうなるか注意して、§1の補題(ii)を使えばよい。

References

- [P] S. Priddy *Comment Math. Helv.* 53 (1978) 470~484
- [KP1] Kahn-Priddy *Bull. Amer. Math. Soc.* 78 (1972) 981~987
- [KP2] " *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 83 (1978) 91~101
- [M] Cohen-Lada-May *L.N.M.* 533
- [±1] 土屋昭博 *Nagoya Math. J.* 43 (1971) 1~39
- [±2] " *J. Math. Soc. Japan* 25 (1973) 277~316