

Randomization Design 再論

竹 内 啓

Randomization design については20年も前に、田口玄一氏の確率対応法にヒントを得て、一連の論文を発表したことがある。更にその後10年ほど前「数理統計学の方法的基礎」なる論文集をまとめた際に若干の再検討を加えた。

20年ほど前にはちょうどアメリカでも Satterthwaite により田口氏のアイデアとよく似た提案があり、それに関連して randomized design についてのいくつかの論文が発表されたが、あまり一般の関心をひくことなく終わったようである。

日本でも外国でも、この問題はほとんど忘れられてしまっている。しかしながら、私はなおこの問題については、いくつかの理論的問題が残っており、またそれは応用上にも重要な意味を持っているので、改めて注意を喚起するの価値があると思つた。そこで基本的な問題点を説明したい。

J. Kiefer は1958年に基本的な論文: Non-randomized optimality and randomized non-optimality of orthogonal designs (AMS) において、仮説検定の局所検出力を基準にするとき、最も極端に unbalanced の配置をランダム化による最適とさせるのが最適であることを示した。ところがこの論文のタイトルの前半に因りてその後数多くの論

文の書かしたにもかかわらず、後手についてはその後には
 んど何もたてなくていい。そこでこの点を解説しよう。

いま最も簡単な場合として、 k 個の母平均 μ_i ($i=1, \dots, k$)
 がすべて等しいか否かを検定する問題と考える。このために
 以下のようにして N_i 個の観測値 X_{ij} ($i=1, \dots, k, j=1, \dots, N_i$)
 を得ることを考える。問題は制限条件 $\sum N_i = n$ の
 下で、最適な N_i を定めることである。ただし N_i はランダムに
 定めなくてもいいとする。ここで X_{ij} は互いに独立に分散 σ^2 の正
 規分布に従うものとする。簡単のために σ^2 は既知としておく。

いま N_i の中で 0 でないものの数を g ($\leq k$) とする。仮説
 $\mu_i \equiv \mu$ を最もふつうの検定方式である χ^2 検定によって検定
 するとして

$$\chi^2 = \sum N_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 / \sigma^2$$

となり、 g の自由度は $g-1$ である。対応仮説の下では χ^2 の
 非心度 $\lambda = \sum N_i (\mu_i - \bar{\mu}^*)^2 / \sigma^2$: $\bar{\mu}^* = \sum N_i \mu_i / n$ とな
 る。従って N_i が與えられたときの検出力は

$$\beta(\lambda) = P\{\chi^2(g-1, \lambda) > \chi^2_{\alpha}(g-1)\}$$

となる。そうしてこれをすくなくして求める。

$$\beta(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} P\{\chi^2(g-1+2k) > \chi^2_{\alpha}(g-1)\}$$

と表される。これは

$$\beta'(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}} (\lambda/2)^{k-1}}{k!} P\{\chi^2(g-1+2k) > \chi^2_{\alpha}(g-1)\}$$

とあるから、 $\lambda \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \alpha + \beta'(0)\lambda + o(\lambda) \\ &= \alpha + [P\{\chi^2(g+1) > \chi^2_{\alpha}(g-1)\} - \alpha](\lambda/2) + o(\lambda) \\ &= \alpha + \frac{\lambda}{2\Gamma(\frac{g+1}{2})} \left(\frac{\chi^2_{\alpha}}{2} \right)^{\frac{g-1}{2}} e^{-\frac{\chi^2_{\alpha}}{2}} + o(\lambda) \\ &= \alpha + c_1(g)\lambda + o(\lambda) \end{aligned}$$

とある。この中の N_i の分布を考慮すると、平均検出力は

$$E(\beta(\lambda)) = \alpha + E(c_1(g)\lambda) + o(\lambda)$$

とある。ここで $c_1(g)$ は一定であるとするとき、

$$E(c_1(g)\lambda) = c_1(g)E(\lambda)$$

とある。更に

$$\sigma^2 E(\lambda) = \sum E(N_i) \mu_i^2 - E(\sum N_i \mu_i)^2 / n$$

を得る。ここで分布が $\bar{c}$ に関して対称的であるとするとき、

$$E(N_i) = n/k$$

$$\begin{aligned} E(N_i N_j) &= E((\sum N_i)^2 - \sum N_i^2) / k(k-1) \\ &= n^2 / k(k-1) - E(N_i^2) / (k-1) \end{aligned}$$

とあるから、

$$\begin{aligned} E(\sum N_i \mu_i)^2 / n &= \frac{1}{n(k-1)} \{ (k-1) \sum \mu_i^2 - \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j \} E(N_i^2) \\ &\quad + \frac{1}{k-1} \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{n(k-1)} \sum (\mu_i - \bar{\mu})^2 E(N_i^2) + \frac{1}{k-1} \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j$$

したがって

$$\sigma^2 E(\lambda) = \frac{n}{k} \sum (\mu_i - \bar{\mu})^2 \left\{ 1 - \frac{k^2}{n^2(k-1)} V(N) \right\}$$

$$\text{ただし } V(N) = E(N_i)^2 - \frac{n^2}{k^2}$$

となる。このゆえに δ が一定のとき、検出力を大きくするには $V(N)$ を小さくすることが必要らしい。このためには

$$P\{N_i = n/\delta\} = \delta/k$$

$$P\{N_i = 0\} = 1 - \delta/k$$

とすればよい。(n/δ が整数にたるとして仮定しておく)

$$\text{このとき } V(N) = n^2(k-\delta)/k\delta \quad \text{となるから}$$

$$\sigma^2 E(\lambda) = \frac{n(\delta-1)}{\delta(k-1)} \sum (\mu_i - \bar{\mu})^2$$

を得る。したがって局所検出力は

$$(1 - 1/\delta) C_1(\delta) = k_1(\delta)$$

の線形関数として表されることになる

この値は次のようにになる

δ	1	2	3	4	5
$k_1(\delta)$	0	0.0573	0.0499	0.0438	0.0392

すなわち $\delta = 2$ のとき最大となる。すなわち k 個の平均の

より2つだけランダムに選んで、その2種について $n/2$ 回ずつ観測する方が最もよいということになる。

しかし λ が大きくなるにしたがってこの方法は適当でなくなる。 $\sum (\mu_i - \bar{\mu})^2$ が大きいときには λ が大きい方が検出力が大きくなる。どのような値で順序を入れ替えるかは数値的にしるべきほかはないが、今は具体的に検討は行われていない。

もう一つの問題は、検定統計量を変えることである。

$$\bar{X}^2 = \sum n(\bar{X}_i - \bar{X})^2 / k\sigma^2$$

$$\text{ただし } \bar{X} = \sum \bar{X}_i / k$$

よくよく $\bar{X}^2$ の仮説の下での分布は χ^2 分布には似ていない。 N_i の変えられたとき、仮説の下での $\bar{X}^2$ のモーメントは比較的容易に計算できる。とくに

$$E(\bar{X}^2 | N_i) = \{n(k-1)/k^2\} \sum (1/N_i)$$

$$V(\bar{X}^2 | N_i) = \{2n^2(k-2)/k^3\} \sum (1/N_i^2) + \{n^2/k^4\} (\sum 1/N_i)^2$$

となるから、 $c\bar{X}^2$ の条件付分布を自由度 ϕ の χ^2 分布で近似することはできる。ただし

$$\phi = 2\{E(\bar{X}^2 | N_i)\}^2 / V(\bar{X}^2 | N_i)$$

$$c = \phi / E(\bar{X}^2 | N_i)$$

である。一般に $\phi \leq k-1$, $c \leq 1$ であることを注意せよ。

或いは更に

$$E(\bar{X}^2) = \{n(k-1)/k\} E(N_i)$$

$$\begin{aligned}
 V(\bar{X}^2) &= E\{V(\bar{X}^2|N_0)\} + V\{E\{\bar{X}^2|N_0\}\} \\
 &= \{2n^2(k-1)/k^2\} E\{1/N_0^2\} + (n^2/k^2) E\{\sum 1/N_{0i}\}^2 \\
 &\quad + \{n^2(k-1)^2/k^4\} V\{\sum 1/N_{0i}\}
 \end{aligned}$$

として $\bar{X}^2$ の (無条件) 分布を χ^2 分布で近似することもできる。ここで N_{0i} のとり値の組が 集合として一定であって、ただ番号の入れかちのみにより定まりあうような場合であれば、条件付分布は N_0 には無関係にあるから、無条件分布に一致することになる。

$\bar{X}^2$ による検定の局所検出力は、近似的には、

$$\beta(\bar{\lambda}) \doteq \alpha + [P\{\chi^2(\phi+2) > \chi^2_\alpha(\phi)\} - \alpha] (\bar{\lambda}/\sqrt{2}) + o(\bar{\lambda})$$

と表すことができる。ただしここで

$$\bar{\lambda} = E\{\bar{X}^2/c - \phi\} = (n/c^2k) \sum (\mu_i - \bar{\mu})^2 / \sigma^2$$

である。よって $\bar{X}^2$ による検定は、 χ^2 分布で、非心度と自由度がともに小さくたっていることがわかる。

しかし n/k の程数である場合には、若干の数値的検討によると $\bar{X}^2$ を用いる検定の方が χ^2 による検定よりも局所検出力が高くなるようである。

$\bar{X}^2$ の条件付分布を用いる検定においては、方法論上の難点はないから、実用上にも安心して応用可能である。

以上の議論は本質的には Random Balanced Incomplete Block Design の場合 (前掲書第10章) に適用できる。