

線形半群の弱混合性について

東理大理工 日合文雄

§0. 序論.

強混合性および弱混合性の概念は、保測変換の理論において重要な役割を果たしている. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を確率空間とし, τ を Ω 上の保測変換とする. $(Tf)(\omega) = f(\tau\omega)$ とおくと, T は $L_p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) 上の $\|T\| = 1$ なる正線形作用素となる. 任意の $F, G \in \mathcal{F}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F \cap \tau^{-n}G) = \mu(F)\mu(G)$ のとき, τ は強混合的であるといわれる. これは次の (a), (b) のいずれとも同値である. (b) との同値性は Blum-Hanson [3] の結果である.

(a) 任意の $f \in L_p$ に対して, $T^n f \xrightarrow{w} \langle f, 1 \rangle 1$,

(b) 任意の $f \in L_p$ と任意の $k_1 < k_2 < \dots$ に対して,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} f \xrightarrow{s} \langle f, 1 \rangle 1.$$

他方, 任意の $F, G \in \mathcal{F}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mu(F \cap \tau^k G) - \mu(F)\mu(G)| = 0$ のとき, τ は弱混合的であるといわれる. これは次の (A), (B) のいずれとも同値である.

(A) 任意の $f \in L_p$ と $F \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\langle T^k f - \langle f, 1 \rangle 1, 1_F \rangle| = 0,$$

(B) 任意の $f \in L_p$ に対して, density 1 なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ が存在して, $n \in J, n \rightarrow \infty$ のとき, $T^n f \xrightarrow{w} \langle f, 1 \rangle 1$.

混合性の概念は, 上の (a), (b) および (A), (B) などを手がかりにして線形作用素へと一般化される. 強混合性をエルゴード定理と関連付けたものとして, [3] の他に [4, 6] などがある. [12] では無限測度空間における変換に対して強混合性が考察された. L_1 -空間上の線形作用素に対する強混合性は [13, 1, 2, 15, 5] などで考察された. とくに Akcoglu-Sucheston [1] の結果は [16, pp. 343-349] でも与えられている. 他方, 弱混合性を一般の Banach 空間上の線形作用素に拡張したものとして, [8, 9, 10, 14, 11] などがある.

この報告では, Banach 空間上の線形作用素からなる離散半群 および 1 径数半群に対して, 弱混合性に対応する種々の性質を導入する. これらには [8, 10, 14, 11] で与えられた性質の大部分が含まれており, またいくつかの新しい性質も含まれている. そしてこれらの性質の間の相互関係を統一的に考察する. この報告をまとめるにあたり, 梅垣寿春教授にお世話になりました. ここに感謝いたします.

§1. 準備.

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ とし, J を $\mathbb{Z}^+$ の部分集合とする. J の元の個

数を $|J|$ であらわす. upper density $ud(J)$ および lower density $ld(J)$ を次で定義する:

$$ud(J) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |J \cap \{1, \dots, n\}|,$$

$$ld(J) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |J \cap \{1, \dots, n\}|.$$

$ud(J) = ld(J)$ のとき, density $d(J)$ をその共通の極限で定義する. 更に, uniform upper density $ud_*(J)$ および uniform lower density $ld_*(J)$ を次で定義する:

$$ud_*(J) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{j \geq 0} \frac{1}{n} |J \cap \{j+1, \dots, j+n\}| \right],$$

$$ld_*(J) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_{j \geq 0} \frac{1}{n} |J \cap \{j+1, \dots, j+n\}| \right].$$

$ud_*(J) = ld_*(J)$ のとき, uniform density $d_*(J)$ をその共通の極限で定義する.

次に, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ とし, A を $\mathbb{R}^+$ の Lebesgue 可測な部分集合とする. A の Lebesgue 測度を $|A|$ であらわす. upper density $UD(A)$, lower density $LD(A)$, uniform upper density $UD_*(A)$, uniform lower density $LD_*(A)$ を次で定義する:

$$UD(A) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |A \cap (0, t]|,$$

$$LD(A) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |A \cap (0, t]|,$$

$$UD_*(A) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left[\sup_{r \geq 0} \frac{1}{t} |A \cap (r, r+t]| \right],$$

$$LD_*(A) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\inf_{r \geq 0} \frac{1}{t} |A \cap (r, r+t]| \right].$$

$UD(A) = LD(A)$ のとき, density $D(A)$ をその共通の極限で定義する.

また, $UD_*(A) = LD_*(A)$ のとき, uniform density $D_*(A)$ をその共通の極限で定義する. 以下では, $\mathbb{R}^+$ の部分集合は $\rightarrow$ かに Lebesgue 可測とする.

公式 $0 \leq ld_*(J) \leq ld(J) \leq ud(J) \leq ud_*(J) \leq 1$, $ld(J) = 1 - ud(\mathbb{Z}^+ \setminus J)$, $ld_*(J) = 1 - ud_*(\mathbb{Z}^+ \setminus J)$ など は 明らかである. また $ud(J) = 0$ であるが $ud_*(J) = 1$ となる $J \subset \mathbb{Z}^+$ が存在する. これらのことは $\mathbb{R}^+$ の densities に対しても同様である.

次の補題はよく知られており, 証明は容易である:

補題 1.1. (1) $\{J_k\}$ を $d(J_k) = 1$ なる $\mathbb{Z}^+$ の部分集合の列とする. このとき, すべての k に対して $J \setminus J_k$ が有限である $d(J) = 1$ なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ が存在する.

(2) (α_n) を有界実数列とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 0$ であるための必要十分条件は, $d(J) = 1$ なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ が存在して, $n \in J$, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\alpha_n \rightarrow 0$ となることである.

同様に 2 次の補題を得る:

補題 1.2. (1) $\{A_k\}$ を $D(A_k) = 1$ なる $\mathbb{R}^+$ の部分集合の列とする. このとき, すべての k に対して $A \setminus A_k$ が有界である $D(A) = 1$ なる $A \subset \mathbb{R}^+$ が存在する.

(2) φ を $\mathbb{R}^+$ 上の Lebesgue 可測で有界な実函数とするとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(s)| ds = 0$ であるための必要十分条件は, $D(A) = 1$ なる $A \subset \mathbb{R}^+$ が存在して, $t \in A$, $t \rightarrow \infty$ のとき, $\varphi(t) \rightarrow 0$ となることである.

次の補題は簡単である:

補題 1.3. $A \subset \mathbb{R}^+$ と $\delta > 0$ に対して,

$$J = \{n \in \mathbb{Z}^+ : |A \cap ((n-1)\delta, n\delta]| > 0\}$$

とおくとき, $ud(J) \geq UD(A)$, $ld(J) \geq LD(A)$, $ud_*(J) \geq UD_*(A)$, $ld_*(J) \geq LD_*(A)$ が成立する.

次の補題は [8, Lemma 3] を少し拡張したものである. 証明は [8] の証明において upper density を uniform upper density におきかえて得られる:

補題 1.4. $J, K \subset \mathbb{Z}^+$ で, $ud(J) = 1$, $ud_*(K) > 0$ とする. このとき, J の無限部分集合 $\{p_i\}$ で次の性質 (*) をもつものが存在する:

(*) 任意の n に対して, $\{p_1 + k, \dots, p_n + k\} \subset K$ を満たす $k \in \mathbb{Z}^+$ が無限個存在する.

実行列 $(\alpha_{nk})_{n,k \geq 1}$ に対して, 次の条件をおく:

$$(1.1) \quad \sup_n \sum_k |\alpha_{nk}| < \infty,$$

$$(1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \alpha_{nk} = 1,$$

$$(1.3) \quad d(K) = 0 \text{ なる任意の } K \subset \mathbb{Z}^+ \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} |\alpha_{nk}| = 0,$$

$$(1.4) \quad d_*(K) = 0 \text{ なる任意の } K \subset \mathbb{Z}^+ \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} |\alpha_{nk}| = 0.$$

また, $\mathbb{R}^+$ 上の Lebesgue 可測な実函数列 $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ に対して, 次の条件をおく:

$$(1.5) \quad \sup_n \int_0^\infty |\varphi_n(t)| dt < \infty,$$

$$(1.6) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi_n(t) dt = 1,$$

$$(1.7) D(B) = 0 \text{ なる任意の } B \subset \mathbb{R}^+ \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |\varphi_n(t)| dt = 0,$$

$$(1.8) D_*(B) = 0 \text{ なる任意の } B \subset \mathbb{R}^+ \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |\varphi_n(t)| dt = 0.$$

§2. Banach 空間上の半群の弱混合性 (その1).

E を実または複素 Banach 空間とし, E^* をその双対空間とする.
 E 上の有界線形作用素の全体を $\mathcal{L}(E)$ であらわす. はじめに
 離散半群の場合を扱う. $T \in \mathcal{L}(E)$ とし, $x \in E$ に対して 次の条件を
 考える:

$$(i)_1 \quad d(J) = 1 \text{ なる } J \subset \mathbb{Z}^+ \text{ が存在して, } n \in J, n \rightarrow \infty \text{ のとき,}$$

$$T^n x \xrightarrow{w} 0;$$

$$(ii)_1 \quad (1.1), (1.4) \text{ を満たす任意の } (\alpha_{nk}) \text{ に対して, } n \rightarrow \infty \text{ のとき,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} T^k x \xrightarrow{s} 0;$$

$$(iii)_1 \quad (1.1), (1.3) \text{ を満たす任意の } (\alpha_{nk}) \text{ に対して, } n \rightarrow \infty \text{ のとき,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} T^k x \xrightarrow{s} 0;$$

$$(iv)_1 \quad ld_*(K) > 0 \text{ なる任意の } K \subset \mathbb{Z}^+ \text{ に対して,}$$

$$\frac{1}{|K \cap \{j+1, \dots, j+n\}|} \sum_{k \in K \cap \{j+1, \dots, j+n\}} T^k x$$

が $n \rightarrow \infty$ のとき, $j \geq 0$ に関わらずに 0 に強収束する;

$$(v)_1 \quad ld(K) > 0 \text{ なる任意の } K \subset \mathbb{Z}^+ \text{ に対して,}$$

$$\frac{1}{|K \cap \{1, \dots, n\}|} \sum_{k \in K \cap \{1, \dots, n\}} T^k x$$

が $n \rightarrow \infty$ のとき, 0 に強収束する;

$$(vi)_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ j \geq 0}} \frac{1}{n} \sum_{k=j+1}^{j+n} |\langle T^k x, x^* \rangle| = 0;$$

(vii)₁ 任意の $x^* \in E^*$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\langle T^k x, x^* \rangle| = 0;$$

(viii)₁ $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ の弱閉包が 0 を含む.

これらの条件に関して次の定理が成立する:

定理 2.1. $T \in \mathcal{L}(E)$ とし, $\sup \{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$ とする
とす, $x \in E$ に対して:

$$(1^\circ) \quad (i)_1 \Rightarrow (ii)_1 \Rightarrow (iii)_1 \Rightarrow (iv)_1 \Leftrightarrow (v)_1 \Leftrightarrow (vi)_1 \\ \Leftrightarrow (vii)_1 \Rightarrow (viii)_1.$$

(2^o) $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ の弱閉包が弱位相に関して距離付け可能ならば (とくに, $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ が弱列的コンパクトならば), すべての $(i)_1 - (viii)_1$ は同値である.

定理 2.1 の証明は, 次に述べる定理 2.2 と同様でありかつより容易であるので, 省略する.

次に 1 径数半群の場合を扱う. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測な半群とし, $x \in E$ に対して次の条件を考える:

$$(i)_2 \quad D(A) = 1 \text{ なる } A \subset \mathbb{R}^+ \text{ が存在して, } t \in A, t \rightarrow \infty \text{ のとき, } \\ T(t)x \xrightarrow{w} 0;$$

$$(ii)_2 \quad (1.5), (1.8) \text{ を満たす任意の } \{\varphi_n\} \text{ に対して, } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \\ \int_0^\infty \varphi_n(s) T(s)x \, ds \xrightarrow{s} 0;$$

(iii)₂ (1.5), (1.7) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s) ds \xrightarrow{s} 0;$$

(iv)₂ $LD_*(B) > 0$ なる任意の $B \subset \mathbb{R}^+$ に対して,

$$\frac{1}{|B \cap (r, r+t]|} \int_{B \cap (r, r+t]} T(s) x ds$$

が $t \rightarrow \infty$ のとき, $r \geq 0$ に関して一様に 0 に強収束する;

(v)₂ $LD(B) > 0$ なる任意の $B \subset \mathbb{R}^+$ に対して,

$$\frac{1}{|B \cap (0, t]|} \int_{B \cap (0, t]} T(s) x ds$$

が $t \rightarrow \infty$ のとき, 0 に強収束する;

$$(vi)_2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ r \geq 0}} \frac{1}{t} \int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^* \rangle| ds = 0;$$

(vii)₂ 任意の $x^* \in E^*$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\langle T(s)x, x^* \rangle| ds = 0;$$

(viii)₂ $\{T(t)x : t \in \mathbb{R}^+\}$ の弱閉包が 0 を含む.

これらの条件に関して次の定理が成立する:

定理 2.2. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とし, $x \in E$ とするとき:

$$(1^\circ) \quad (i)_2 \Rightarrow (ii)_2 \Rightarrow (iii)_2 \Rightarrow (iv)_2 \Leftrightarrow (v)_2 \Leftrightarrow (vi)_2 \\ \Leftrightarrow (vii)_2 \Rightarrow (viii)_2.$$

(2°) ある $r > 0$ で $\{T(t)x : t \geq r\}$ の弱閉包が弱位相で距離付け可能ならば (とくに, ある $r > 0$ で $\{T(t)x : t \geq r\}$ が弱列的コンパクトならば), すべての $(i)_2 - (viii)_2$ は同値である.

定理 2.2 の証明の前に次の補題を与える:

補題 2.3. $X \subset E$ が弱コンパクトかつ強可分ならば、弱位相に関して距離付け可能である。

証明. $X-X = \{x-y: x, y \in X\}$ の中で稠密な点列 $\{y_n\}$ をとる. 各 n に対して $\|y_n^*\| = 1$ かつ $\langle y_n, y_n^* \rangle = \|y_n\|$ を満たす $y_n^* \in E^*$ をとり, 次のように定義する:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x-y, y_n^* \rangle|, \quad x, y \in X.$$

すると, d は X 上の距離であり, それによる位相は弱位相より弱い, 従って一致する. ▀

定理 2.2 の証明. (i)₂ $\Rightarrow$ (ii)₂. (ii)₂ を否定すると, (1.5), (1.8) を満たす $\{\varphi_n\}$ ですべての n に対して $\|\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s) x ds\| \geq \varepsilon > 0$ となるものが存在する. φ_n のかわりに $\max(\varphi_n, 0)$ または $\max(-\varphi_n, 0)$ をとることができるから, すべての φ_n が非負であるとしてよい. $M = \sup\{\|T(t)\|: t \in \mathbb{R}^+\}$ とする. (1.8) を用いると, $\{\varphi_n\}$ の部分列 $\{\psi_n\}$ と数列 $0 < r_1 < t_1 < r_2 < t_2 < \dots$ で次の 2 条件を満たすものがとれる:

$$(3.1) \quad \int_0^{r_n} \psi_n(s) ds + \int_{t_n}^\infty \psi_n(s) ds < \frac{\varepsilon}{2M\|x\|},$$

$$(3.2) \quad r_{n+1} > t_n + n.$$

すると, (3.1) により, すべての n に対して $\|\int_{r_n}^{t_n} \psi_n(s) T(s) x ds\| \geq \varepsilon/2$. 各 n に対して $\|x_n^*\| = 1$ で

$$\int_{r_n}^{t_n} \psi_n(s) \operatorname{Re} \langle T(s)x, x_n^* \rangle ds \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $x_n^* \in E^*$ をとり,

$$B_n = \{s : s \in (r_n, t_n], \operatorname{Re} \langle T(s)x, x_n^* \rangle \geq \beta\}$$

とおく. ただし $0 < \beta < \varepsilon / (4 \sup_{n \geq 1} \int_0^\infty \psi_n(s) ds)$. すると,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &\leq \int_{B_n} \psi_n(s) \operatorname{Re} \langle T(s)x, x_n^* \rangle ds \\ &\quad + \int_{(r_n, t_n] \setminus B_n} \psi_n(s) \operatorname{Re} \langle T(s)x, x_n^* \rangle ds \\ &\leq M \|x\| \int_{B_n} \psi_n(s) ds + \beta \int_0^\infty \psi_n(s) ds. \end{aligned}$$

よってすべての n に対して $\int_{B_n} \psi_n(s) ds \geq \varepsilon / 4M \|x\|$. かくて,

$B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ とおくと, (1.8) により, $UD_*(B) > 0$ を得る. さて,

$A \subset \mathbb{R}^+$ を (i)₂ の中でとられたものとする. $T(t)x$ は $\mathbb{R}^+$ で強連続であり, 故に $t \geq 1$ で一様強連続であるから, $\delta > 0$ が存在し, 任意の $u, v \geq 1$, $|u-v| < \delta$ に対して $\|T(u)x - T(v)x\| < \beta/2M$ となる. そこで次のように定義する:

$$J = \{n : |A \cap ((n-1)\delta, n\delta]| > 0\},$$

$$K = \{n : |B \cap ((n-1)\delta, n\delta]| > 0\}.$$

すると補題 1.3 から, $d(J) = D(A) = 1$ かつ $ud_*(K) \geq UD_*(B)$

> 0 . この J, K に対して, 補題 1.4 により, $1 + \delta^{-1} < p_1 < p_2 < \dots$

なる $\{p_i\} \subset J$ で補題 1.4 の (*) を満たすものかとれる.

$u_i = p_i \delta - s_i \in A$ (ただし $0 \leq s_i < \delta$) をとると, $T(u_i) \xrightarrow{w} 0$ だから, ある $\alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ で, $\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(u_i)x\|$

$< \beta/2M$ となる. (3.2) から, $\{p_1+k, \dots, p_N+k\} \subset K$ なる

十分大きな k をとると, ある一つの n_0 に対して, $(p_i+k)\delta - t_i \in B_{n_0}$

(ただし $0 \leq t_i < \delta$), $i=1, \dots, N$ とすることが出来る. かくて,
 $v_i = t_i \delta - t_i$ とおけば, B_{n_0} の定義から, $\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(v_i + k\delta)x\|$
 $\geq \beta$ を得る. 他方, $u_i, v_i \geq 1$ から $|u_i - v_i| < \delta$ だから,

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(v_i + k\delta)x\| &\leq M \|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(v_i)x\| \\ &\leq M \left\{ \|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(u_i)x\| + \|\sum_{i=1}^N \alpha_i (T(u_i) - T(v_i))x\| \right\} \\ &< \beta \end{aligned}$$

となり, 矛盾が生じる.

(ii)₂ $\Rightarrow$ (iii)₂. 明らか.

(iii)₂ $\Rightarrow$ (v)₂. $LD(B) > 0$ とし, $t_n \uparrow \infty$ とする. すべての
 n に対して $|B \cap (0, t_n]| > 0$ としよう. $\{\varphi_n\}$ を

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{|B \cap (0, t_n]|}, & s \in B \cap (0, t_n], \\ 0, & s \notin B \cap (0, t_n], \end{cases}$$

で定義すると, $\{\varphi_n\}$ は (1.5), (1.7) を満たす. よって (iii)₂ によ
 り,

$$\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s)x ds = \frac{1}{|B \cap (0, t_n]|} \int_{B \cap (0, t_n]} T(s)x ds$$

は 0 に 強収束する.

(v)₂ $\Rightarrow$ (vii)₂. (vii)₂ を否定すると, $\|x^*\| = 1$ なる $x^* \in E^*$
 と $\varepsilon > 0$ と $t_n \uparrow \infty$ が存在して,

$$\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} |\langle T(s)x, x^* \rangle| ds \geq \varepsilon, \quad n \geq 1.$$

そこで

$$B = \left\{ s : |\langle T(s)x, x^* \rangle| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

とおくと,

$$\frac{1}{t_n} |B \cap (0, t_n]| \geq \frac{\varepsilon}{2M\|x\|}, \quad n \geq 1.$$

故に $UD(B) > 0$. かくて, もし必要なら x^* を $-x^*$, $\pm i x^*$ ($i = \sqrt{-1}$) のいずれかととりかえることにより, $UD(B') > 0$ を得る. ただし

$$B' = \{s : \operatorname{Re} \langle T(s)x, x^* \rangle \geq \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

そこで, $0 < \beta < UD(B')$, $0 < \delta < \varepsilon\beta/4M\|x\|$ をとり, $C = B' \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (k, k+\delta]$ とおく. すると, $LD(C) > 0$ であり,

$\frac{1}{t} |B' \cap (0, t]| > \beta$ なる $t \in \mathbb{R}^+$ に對して,

$$\begin{aligned} & \int_{C \cap (0, t]} \operatorname{Re} \langle T(s)x, x^* \rangle ds \\ & \geq \int_{B' \cap (0, t]} \operatorname{Re} \langle T(s)x, x^* \rangle ds - \left| \int_{(C \setminus B') \cap (0, t]} \operatorname{Re} \langle T(s)x, x^* \rangle ds \right| \\ & \geq \frac{\varepsilon}{4} |B' \cap (0, t]| - M\|x\| \delta t \\ & \geq \left(\frac{\varepsilon\beta}{4} - M\|x\|\delta \right) t \geq \left(\frac{\varepsilon\beta}{4} - M\|x\|\delta \right) |C \cap (0, t]|. \end{aligned}$$

これは $(V)_2$ が成立していることを示す.

$(VII)_2 \Rightarrow (VI)_2$. はじめに $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)\| \leq 1$ の場合を証明する.

X^* を E^* の単位球とし, 弱*位相によるコンパクト Hausdorff 空間と考える. $T(t)^*$ は X^* 上に作用する連続写像であり,

$(\hat{T}(t)f)(x^*) = f(T(t)^*x^*)$, $x^* \in X^*$, $f \in C(X^*)$, と定義すると, $\{\hat{T}(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は $C(X^*)$ 上の Markov 作用素

からなる弱連続従, 2 強連続な半群となる. $f(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|$ とおくと, $\hat{T}(t)^* \mu = \mu$ ($t \in \mathbb{R}^+$) なる任意の $\mu \in C(X^*)^*$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle f, \mu \rangle &= \langle \hat{T}(s)f, \mu \rangle \\ &= \int_{X^*} |\langle T(s)x, x^* \rangle| d\mu(x^*), \quad s \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

よって Fubini の定理より,

$$\langle f, \mu \rangle = \int_{X^*} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\langle T(s)x, x^* \rangle| ds \right) d\mu(x^*).$$

従って (vii)₂ から $\langle f, \mu \rangle = 0$. これより, f は $\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathcal{R}(I - \hat{T}(t))$ で生成される閉部分空間に属する. ただし $\mathcal{R}(I - \hat{T}(t))$ は $I - \hat{T}(t)$ の値域である. 故にエルゴード定理を用いると,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \hat{T}(s)f ds \xrightarrow{s} 0. \quad \text{すると,}$$

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ r \geq 0}} \frac{1}{t} \int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^* \rangle| ds \\ &= \sup_{r \geq 0} \left\| \frac{1}{t} \int_r^{r+t} \hat{T}(s)f ds \right\| \\ &= \sup_{r \geq 0} \left\| \hat{T}(r) \left(\frac{1}{t} \int_0^t \hat{T}(s)f ds \right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t \hat{T}(s)f ds \right\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

一般の場合は,

$$\|x\| = \max \{ \|x\|, \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)x\| \}$$

とおくと, $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|$ と同値なノルムであり, $\|\cdot\|$ に関

して $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)\| \leq 1$ となる. よってはじめの場合に帰着する.

(vi)₂ $\Rightarrow$ (iv)₂. 次の不等式より明らか:

$$\begin{aligned} & \sup_{r \geq 0} \frac{1}{|B \cap (r, r+t]|} \left\| \int_{B \cap (r, r+t]} T(s)x \, ds \right\| \\ & \leq \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ r \geq 0}} \frac{t}{|B \cap (r, r+t]|} \frac{1}{t} \int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^* \rangle| \, ds \\ & \leq \left(\inf_{r \geq 0} \frac{1}{t} |B \cap (r, r+t]| \right)^{-1} \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ r \geq 0}} \frac{1}{t} \int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^* \rangle| \, ds. \end{aligned}$$

(iv)₂ $\Rightarrow$ (v)₂. (v)₂ を否定すると, $\beta = LD(B) > 0$ なる $B \subset \mathbb{R}^+$ と $\varepsilon > 0$ と $t_n \uparrow \infty$ が存在して,

$$\left\| \int_{B \cap (0, t_n]} T(s)x \, ds \right\| \geq \varepsilon |B \cap (0, t_n]|, \quad n \geq 1.$$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} |B \cap (0, t_n]| \geq \beta$ より, すべて n に対して,

$$\frac{1}{t_n} |B \cap (0, t_n]| \geq \beta/2 \text{ としてよい. } 0 < \delta < \varepsilon\beta/2M\|x\| \text{ と}$$

とり, $C = B \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (k, k+\delta]$ とおくと, $LD_*(C) > 0$ であり,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{C \cap (0, t_n]} T(s)x \, ds \right\| \\ & \geq \left\| \int_{B \cap (0, t_n]} T(s)x \, ds \right\| - \left\| \int_{(C \setminus B) \cap (0, t_n]} T(s)x \, ds \right\| \\ & \geq \varepsilon |B \cap (0, t_n]| - M\|x\|\delta t_n \\ & \geq \left(\frac{\varepsilon\beta}{2} - M\|x\|\delta \right) t_n \geq \left(\frac{\varepsilon\beta}{2} - M\|x\|\delta \right) |C \cap (0, t_n]|. \end{aligned}$$

これは (iv)₂ に反する.

$(vii)_2 \Rightarrow (viii)_2$. 任意の $x_1^*, \dots, x_n^* \in E^*$ と $\varepsilon > 0$ に対して,
 $(vii)_2$ より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n |\langle T(s)x, x_i^* \rangle| ds = 0.$$

従って $\sum_{i=1}^n |\langle T(s)x, x_i^* \rangle| < \varepsilon$ を満たす $s \in \mathbb{R}^+$ が存在する. これより $(viii)_2$ が成立する.

以上により (1°) がすべて証明された. 次に (2°) を証明する. $\{T(t)x : t \geq r\}$ の弱閉包 X が弱位相で距離付け可能とする. $(viii)_2$ が成立するならば, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ が存在して $T(t_n)x \xrightarrow{w} 0$ となる. すると, 上の $(vii)_2 \Rightarrow (vi)_2$ の証明のようにエルゴード定理を用いて $(vi)_2$ 従ってまた $(vii)_2$ を証明することができる. 仮定より, 任意の $\{x_j\} \subset X$ に対して, $x_j \xrightarrow{w} 0$ となるための必要十分条件がすべての k に対して $\langle x_j, x_k^* \rangle \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) となることであるような点列 $\{x_k^*\} \subset E^*$ が存在する. 各 k に対して $\frac{1}{t} \int_0^t |\langle T(s)x, x_k^* \rangle| ds \rightarrow 0$ だから, 補題 1.2 (2) より, $D(A_k) = 1$ なる $A_k \subset \mathbb{R}^+$ が存在して, $t \in A_k$, $t \rightarrow \infty$ のとき, $\langle T(s)x, x_k^* \rangle \rightarrow 0$. そこで補題 1.2 (1) を用いれば, $(i)_2$ が得られる. 最後に, (2°) のカッコの条件が成立する場合は, 補題 2.3 より明らかである. $\blacksquare$

§3. Banach 空間上の半群の弱混合性 (その2).

§2 と同じく, E を Banach 空間とする. $T \in \mathcal{L}(E)$ に対して, 次の条件を考える:

(I), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して, $d(J)=1$ なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ がとれて, $n \in J, n \rightarrow \infty$ のとき, $T^n x \xrightarrow{w} Qx$;

(II), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, (1.1), (1.2), (1.4) を満たす任意の (α_{nk}) に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} T^k \xrightarrow{SOT} Q$ (ただし SOT は strong operator topology をあらわす);

(III), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, (1.1), (1.2), (1.3) を満たす任意の (α_{nk}) に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} T^k \xrightarrow{SOT} Q$;

(IV), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $ld_x(K) > 0$ なる任意の $K \subset \mathbb{Z}^+$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $j \geq 0$ に関して一様に,

$$\frac{1}{|K \cap \{j+1, \dots, j+n\}|} \sum_{k \in K \cap \{j+1, \dots, j+n\}} T^k \xrightarrow{SOT} Q;$$

(V), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $ld(K) > 0$ なる任意の $K \subset \mathbb{Z}^+$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{1}{|K \cap \{1, \dots, n\}|} \sum_{k \in K \cap \{1, \dots, n\}} T^k \xrightarrow{SOT} Q;$$

(VI), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ j \geq 0}} \frac{1}{n} \sum_{k=j+1}^{j+n} |\langle (T^k - Q)x, x^* \rangle| = 0;$$

(VII), $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ と $x^* \in E^*$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\langle (T^k - Q)x, x^* \rangle| = 0;$$

(VIII), $TQ = Q$ を満たす Q が $\{T^n: n \in \mathbb{Z}^+\}$ の WOT (weak operator topology) による閉包の中に存在する.

$\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とする. $\mathbb{R}^+$ 上の Lebesgue 可積分な実函数 φ に対して, 積分 $\int_0^\infty \varphi(t) T(t) dt \in \mathcal{L}(E)$ を次により定義できる:

$$\left(\int_0^\infty \varphi(t) T(t) dt \right) x = \int_0^\infty \varphi(t) T(t) x dt, \quad x \in E.$$

とくに, 有界な $A \subset \mathbb{R}^+$ に対して, $\int_A T(t) dt \in \mathcal{L}(E)$ が定義される. そこで次の条件を考える:

(I)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して, $D(A)=1$ なる $A \subset \mathbb{R}^+$ がとれて, $t \in A, t \rightarrow \infty$ のとき, $T(t)x \xrightarrow{w} Qx$;

(II)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, (1.5), (1.6), (1.8) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s) ds \xrightarrow{soT} Q$;

(III)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, (1.5), (1.6), (1.7) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s) ds \xrightarrow{soT} Q$;

(IV)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $LD_*(B) > 0$ なる任意の $B \subset \mathbb{R}^+$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき, $r \geq 0$ に関して一様に,

$$\frac{1}{|B \cap (r, r+t]|} \int_{B \cap (r, r+t]} T(s) ds \xrightarrow{soT} Q;$$

(V)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $LD(B) > 0$ なる任意の $B \subset \mathbb{R}^+$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{1}{|B \cap (0, t]|} \int_{B \cap (0, t]} T(s) ds \xrightarrow{soT} Q;$$

(VI)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ r \geq 0}} \frac{1}{t} \int_r^{r+t} |\langle (T(s) - Q)x, x^* \rangle| ds = 0;$$

(VII)₂ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在し, 任意の $x \in E$ と $x^* \in E^*$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\langle (T(s) - Q)x, x^* \rangle| ds = 0;$$

(VIII)₂ すべての $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)Q = Q$ を満たす Q が $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ の WOT による閉包の中に存在する.

以上の条件に関して, 定理 2.1, 2.2 の結果を, 各 $x \in E$ で $x - Qx$ に対して適用すれば次の定理 3.1, 3.2 が得られる:

定理 3.1. $T \in \mathcal{L}(E)$ とし, $\sup \{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$ とすると:

(1°) $(I)_1 \Rightarrow (II)_1 \Rightarrow (III)_1 \Rightarrow (IV)_1 \Leftrightarrow (V)_1 \Leftrightarrow (VI)_1 \Leftrightarrow (VII)_1 \Rightarrow (VIII)_1$.

(2°) 任意の $x \in E$ に対して, $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ の弱閉包が弱位相に関して距離付け可能ならば (とくに, $\{T^n\}$ が weakly almost periodic, すなわち, WOT で 相対コンパクトならば), すべての $(I)_1 - (VIII)_1$ は同値である.

定理 3.2. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とすると:

(1°) $(I)_2 \Rightarrow (II)_2 \Rightarrow (III)_2 \Rightarrow (IV)_2 \Leftrightarrow (V)_2 \Leftrightarrow (VI)_2 \Leftrightarrow (VII)_2 \Rightarrow (VIII)_2$.

(2°) 任意の $x \in E$ に対して, ある $r > 0$ で, $\{T(t)x : t \geq r\}$ の弱閉包が弱位相で距離付け可能ならば (とくに, ある $r > 0$ で $\{T(t) : t \geq r\}$ が weakly almost periodic ならば), すべての $(I)_2 - (VIII)_2$ は同値である.

注意. (1) E が可分のときは上の $(I)_1, (I)_2$ はそれぞれ次の条件におきかえることができる:

$(I')_1$ $d(J)=1$ なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ と $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $n \in J$, $n \rightarrow \infty$ のとき, $T^n \xrightarrow{WOT} Q$;

$(I')_2$ $D(A)=1$ なる $A \subset \mathbb{R}^+$ と $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $t \in A$, $t \rightarrow \infty$ のとき, $T(t) \xrightarrow{WOT} Q$.

(2) Stegall [17] によれば, E^* が Radon-Nikodym property をもつための必要十分条件は, E の任意の可分な部分空間が可分な双対空間をもつことである. 従ってこれを仮定した場合, 定理 3.1, 3.2 の (2°) の仮定が成立する. とくに E が回帰的な場合は, (2°) のカッコの仮定が成立する.

次の2つの定理の証明は容易であるので省略する:

定理 3.3. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は定理 3.2 と同様であるとし, $r \in \mathbb{R}^+$ とする. このとき $(VII)_2$ が成立するための必要十分条件は次の2つが成立することである:

(1) $T(r)x = x$ ならば, 任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)x = x$,

(2) $T(r)$ に対して $(VII)_1$ が成立する, すなわち, $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ と $x^* \in E^*$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle (T(ir) - Q)x, x^* \rangle| = 0.$$

定理 3.4. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な群とする. このとき, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ に対して $(VII)_2$ が

成立すること, $\{T(-t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ に対して $(\text{VII})_2$ が成立することは同値である.

離散的な場合にも, 定理 3.3, 3.4 と同様な結果が成立する.

§4. AL -空間上の半群の弱混合性.

この節では, E を AL -空間とする, すなわち, 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ がとれて $E = L_1(\Omega, \mu)$. $\mathcal{L}_+(E)$ を E 上の正線形作用素の全体とする. 次の定理 4.1, 4.2 は, σ -有限な測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $E = L_1(\Omega, \mu)$ の場合に, [7] で与えられた $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が一般の測度空間の場合, 任意の $x \in L_1(\Omega, \mu)$ に対して, 次の 2 条件を満たす $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ が存在する: (1) μ は Ω_0 上で σ -有限, (2) $T L_1(\Omega_0, \mu) \subset L_1(\Omega_0, \mu)$ [または, 任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して, $T(t) L_1(\Omega_0, \mu) \subset L_1(\Omega_0, \mu)$]. 従って, σ -有限の場合に帰着する.

定理 4.1. $T \in \mathcal{L}_+(E)$ とし, $\sup \{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$ のとき, 次の条件は同値である:

(a) 任意の $x \in E$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i x$ は強収束する;

(b) 任意の $x \in E$ に対して, $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ の凸閉包の中に, $T x_0 = x_0$ なる x_0 が存在する;

(c) 任意の $x \in E$ に対して, $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ は弱列的コンパクトである.

定理 4.2. $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}_+(E)$ の中の 強可測かつ一様有界な半群とするとき, 次の条件は同値である:

(a) 任意の $x \in E$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds$ は強収束する;

(b) 任意の $x \in E$ に対して, $\{T(t)x: t \in \mathbb{R}^+\}$ の凸閉包の中に, すべての $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)x_0 = x_0$ となる x_0 が存在する;

(c) 任意の $x \in E$ と $r > 0$ に対して, $\{T(t)x: t \geq r\}$ は弱列的コンパクトである.

定理 3.1, 3.2 と 定理 4.1, 4.2 とを合わせれば, 次は明らかである:

定理 4.3. 定理 4.1 におけるような $T \in \mathcal{L}_+(E)$ に対して, §3 の (I)₁ - (VIII)₁ はすべて同値である.

定理 4.4. 定理 4.2 におけるような $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{L}_+(E)$ に対して, §3 の (I)₂ - (VIII)₂ はすべて同値である.

文 献

- [1] M. Akcoglu and L. Sucheston, On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space, Periodica Math. Hungarica 2 (1972), 235 - 244.
- [2] M. Akcoglu and L. Sucheston, On convergence of iterates of positive contractions in L_p spaces, J. Approximation Theory 13 (1975), 348 - 362.

- [3] J. R. Blum and D. L. Hanson, On the mean ergodic theorem for subsequences, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 308 - 311.
- [4] A. Brunel and M. Keane, Ergodic theorems for operator sequences, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 12 (1969), 231 - 240.
- [5] H. Fong and L. Sucheston, On a mixing property of operators in L_p spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 28 (1974), 165 - 171.
- [6] D. L. Hanson and G. Pledger, On the mean ergodic theorem for weighted averages, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 13 (1969), 141 - 149.
- [7] F. Hiai and R. Sato, Mean ergodic theorems for semigroups of positive linear operators, J. Math. Soc. Japan 29 - 1 (1977).
- [8] L. K. Jones, A mean ergodic theorem for weakly mixing operators, Advances in Math. 7 (1971), 211 - 216.
- [9] L. K. Jones, An elementary lemma on sequences of integers and its applications to functional analysis, Math. Z. 126 (1972), 299 - 307.
- [10] L. K. Jones, A generalization of the mean ergodic theorem in Banach spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 27 (1973), 105 - 107.
- [11] L. K. Jones and M. Lin, Ergodic theorems of weak mixing type, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 50 - 52.
- [12] U. Krengel and L. Sucheston, On mixing in infinite measure spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 13 (1969), 150 - 164.
- [13] M. Lin, Mixing for Markov operators, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 19 (1971), 231 - 242.
- [14] R. J. Nagel, Ergodic and mixing properties of linear operators, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 74 (1974), 245 - 261.
- [15] R. Sato, On Akcoglu and Sucheston's operator convergence theorem in Lebesgue space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 513 - 516.
- [16] H. H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer, Berlin, 1974.
- [17] C. Stegall, The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 213 - 223.