

塑性振動論における存在定理について

熊本大学 理学部 三好哲彦

Duvaut-Lions [1] は変分不等式の理論の (いわば) 応用問題として弾-塑性問題を扱っているが, 筆者のみとするとこれは解の存在性を示す上ではこの方法は有効であっても, 諸々の定性的な問題の取扱いや, また数値解析上の諸問題を考える上では不便にみえる。それは塑性解を物理的に性質の異なる他の解の極限としてとらえようとするときに一層の大きな原因がある。塑性論の枠組の中に話を進めるため, ここでは [2] で提案された方法が一般の塑性振動にたいしても有効であるということを示したい。

1. 塑性振動の増分的定式化

文献 [3], [4] にもとづいて, 以下のような問題を考える。

Ω を (x_1, x_2) -平面上の有界領域, T を時間区間 $(0, T)$ とする。未知関数は変位 $u = (u_1, u_2)(t, x)$ であり, これは, ひずみ,

応力, 硬化パラメータと呼ばれる $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$, $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$
 $(\sigma_{21} = \sigma_{12})$, $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12})$ と以下に述べる関係を満たさなければならぬ。慣性に従って x_j に対する偏導関数を $u_{,j}$ 及び $\dot{u}$ で表わす。又 a^*b は vector の内積を表わす。ととし, 関数の L^2 ノルムは $(L^2)^k$ (k : 整数) における内積及びノルムは (α, β) , $\|\alpha\|$ で表わす。

Mises の降伏条件及び von Mises の硬化則に従う塑性振動の方程式は次のように表わされる。

$$(1.1) \quad \rho \ddot{u}_i - \sum_j \sigma_{ij,j} = b_i \quad T \times \Omega$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad \text{if } f(\sigma - \alpha) < \bar{\sigma}$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = (D - D') \dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} = (\sigma - \alpha) \partial f^* \dot{\sigma} / f \end{cases} \quad \text{if } f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma} \quad \& \partial f^* \dot{\sigma} \geq 0$$

ただし, ρ : 正定数, $\{b_i\}$: 与えられた関数, $\bar{\sigma}$: 正定数

$$f^2(\sigma) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \quad (1 > \nu > 0)$$

$$D' = \frac{D \partial f \partial f^* D}{2 + \partial f^* D \partial f} \quad (2 > 0)$$

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \right)$$

ひずみは小さくと仮定する。i.e., $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) =$

$(u_{1,1}, u_{2,2}, u_{1,2} + u_{2,1})$. 又初期変位は 0, 境界の一部 Γ_0 は固定その他は自由, $\sum_j \sigma_{ij} \cos(n, x_j) = 0$ だとす。以下。議論のためには u の初速度には若干の条件を仮定する必要がある。 (1.2) の条件を満たす u の集合は elastic であると呼ばれ, (1.3) の条件が成立して u の集合は plastic であると呼ばれる。以下、同的は (1.1) ~ (1.3) の (弱) 解が一意的に存在するということを示すことである。

2. Semi-discrete system.

(1.2) 及び (1.3) における状態の区別 (elastic, plastic) は各点ごとに於ける区別を要求 (2) である。これは可能であるのは滑らかな解が得られて後のことである。一方、この区別を数学的に厳密な走式化の出来^鼻終^鼻に置くのは困難である (この意味で (1.3) ~ (1.1) は '物理的' な走式化である)。しかし、この区別が各点ではなく、小領域上での平均的な意味でなら可能であると考えるのは自然である。ここに有限要素法の発想が可能となる根拠がある。この節では数学的な走式化とは一応離れて、(1.1) ~ (1.3) の問題にたいする最も普通の構造力学的な接近を取り上げ、それにたいする数学的な解釈を与えることにより、我々の (数学的な) 解を構成

するたりの出発点としたい。

こゝでは Ω を閉多角形領域と仮定する。これは後述の極限とするために、繁雑さを避けるためであり、以下の議論は実用上十分一般の場合にも有効である。 $\hat{\Omega}$ を Ω の三角形分割とする。分割にあたり、 Ω は、有限要素法において通常仮定される多少の条件をこゝでも仮定する。 $\{y_p\}$ を節点 p での 1 をとる正交的な一次の通常有限要素 basis とする。変位 u_i の時刻 t における値を次の形で近似する。

$$(2.1) \quad u_i(t) = \sum_{p \in P} u_{i,p}(t) y_p$$

ただし P は $\hat{\Omega}$ - P_0 の節点の集合を表わす。未知関数 $\{u_{i,p}(t)\}$ は次の常微分方程式 - Galerkin system - を満たす。

$$(2.2) \quad (p \ddot{u}_i, y_p) + \frac{\sigma}{2} (\sigma_{ij}, y_{p,j}) = (b_i, y_p) \quad p \in P$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D \dot{\epsilon} \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad \text{if } f(\sigma - \alpha) < \bar{\sigma} \quad (\text{i.e., elastic})$$

$$(2.4) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = (D - D') \dot{\epsilon} \\ \dot{\alpha} = (\sigma - \alpha) \phi^* \dot{\sigma} / f \end{cases} \quad \text{if } f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma} \text{ and } \phi^* \dot{\sigma} \geq 0 \quad (\text{i.e., plastic})$$

ϵ - u 関係式および初期条件は前と同じである。初速度を表わす関数は $\{y_p\}$ で補間することにする。

便宜上 (2.2) ~ (2.4) を semi-discrete system と呼ぼう。もし γ 上の system をみたら (u, σ, α) をみつけることが我々の問題である。 $u \in C^2(T)$, また σ と α には t にかんす

る絶対連続性を要求する。

さて、 $t=0$ において $\sigma = \alpha = 0$ 、又応力-ひずみ関係式は (2.3) が最初には使用される。ある時刻 $t=t_0$ において「く」の要素にたいし $f(\sigma) = \bar{\sigma}$ が成立するまでは、弾性振動問題であって、解は一意的に存在する。 $t=t_0$ を越えて解を接続するためには、 $t > t_0$ の各要素にたいし、それが弾性・塑性の「く」の状態となるかを $t=t_0$ の時点で前もって決定しておかねばならない。このために、 $t=t_0+\Delta t$ における $\partial f^* \dot{\sigma}$ 、またはその高階の導関数の値の符号に注目する。これをみれば $t=t_0$ の状態 (i.e. elastic, plastic) が変わり得る要素にたいしては、 $t > t_0$ の状態を勝手に仮定して $t=t_0$ の初期値問題を設定し、その解の $t=t_0+\Delta t$ における振舞いを観察すればよい。

まずわかることは、 $t=t_0$ ではじめて $f(\sigma) = \bar{\sigma}$ となった要素にたいしては、 $t > t_0$ の状態 (i.e. elastic or plastic, 以下同じ意味で使用) とは独立に $\partial f^* \dot{\sigma}|_{t_0+\Delta t}$ の符号が定まる。なぜならば、弾性、塑性に応じて次の2通りの場合がある。

$$\partial f^* \dot{\sigma}|_{t_0+\Delta t} = \begin{cases} \partial f^* D \dot{\varepsilon}|_{t_0+\Delta t} \\ \partial f^* D \dot{\varepsilon}|_{t_0+\Delta t} (1-\theta) \end{cases}, \quad \theta = \frac{\partial f^* D \partial f}{2 + \partial f^* D \partial f}$$

== $\dot{\varepsilon}$ は $t=t_0$ で連続であり、 $0 < 1$ であるから $\partial f^* \dot{\sigma}|_{t_0+\Delta t}$ の符号自体は変わらない。(注: $\partial f^* \dot{\sigma} \geq 0$ は σ が曲面 $f(\sigma) = \bar{\sigma}$ の(外)部へ向う事を意味する。) したがって $\partial f^* \dot{\sigma}|_{t_0+\Delta t} = 0$ とする

要素以外は $\bar{\sigma}$ の符号を $\sigma = \pm$ により $t > t_0$ の状態が走り
 れる. $\partial f^* \dot{\sigma}|_{t_0+0} = 0$ となった要素にたいして $t > t_0$ の状
 態を決定するために次のことをまず準備する.

補題 1. σ および α は (2.3) 又は (2.4) により走らせられ
 とし, $t = t_0 + 0$ で $f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma}$, $\partial f^*(\sigma - \alpha) \cdot \dot{\sigma} = 0$ であるとす (注:
 ある要素にたいして考えている). 又 σ, α は $t (\geq t_0)$ で実解
 的であるとす, $\partial f^*(\sigma - \alpha) \cdot \dot{\sigma}$ の Taylor 展開を次の様に表わす.

$$g(t) \equiv \partial f^*(\sigma - \alpha) \cdot \dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} g_0^{(k)} (t - t_0)^k$$

ここで次のような $k_0 (\neq \infty)$ があるとす.

$$g_0^{(k_0)} \neq 0, \quad g_0^{(k)} = 0 \quad (k < k_0)$$

このとき, 正の数 δ および時間区間 $I_\delta = (t_0, t_0 + \delta)$ があって

(1) もし $g_0^{(k_0)} < 0$, かつ $\alpha \equiv \alpha_0 = \text{const.}$ であれば

$$f(\sigma - \alpha_0) < \bar{\sigma} \quad \text{in } I_\delta$$

(2) もし $g_0^{(k_0)} > 0$, かつ α が (2.4) の $\sigma = \pm$ 式を満たしていれば

$$\partial f^*(\sigma - \alpha) \cdot \dot{\sigma} > 0, \quad f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma} \quad \text{in } I_\delta$$

(注: $\partial f^*(\sigma - \alpha)$ は ∂f の $\sigma - \alpha$ にあける値であって内積ではない).

以下, この補題にあける $g_0^{(k_0)}$ の符号があらわに決定して
 るところを示したい. (∂f は $\partial f(\sigma - \alpha)$ を表わすものとする).

$\mathcal{E}$ を $\hat{\Omega}$ の要素すべての集合とし, $\mathcal{E}_0$ を $t = t_0$ で $f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma}$
 $\partial f^* \dot{\sigma}|_{t_0+0} = 0$ となる要素の集合とする. $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ の要素にたい

12は, 上のことから $t > t_0$ の状態は決定されていると考えよう。まず, ε_0 の要素にたいして次が成立する。

$$(a) \quad \partial f^* D \dot{\varepsilon} \Big|_{t_0+0} = 0$$

$$(b) \quad \dot{\sigma} \Big|_{t_0+0} \text{ は } \varepsilon_0 \text{ の次の状態と独立. (i.e. } t > t_0 \text{ の状態)}$$

次に, ε_0 の要素にたいしては, $(\partial f^* \dot{\sigma})_t \Big|_{t_0+0}$ の符号は, ε_0 の次の状態と独立に定まることからわかる。これは, $t > t_0$ で

$$(\partial f^* \dot{\sigma})_t \Big|_{t_0+0} = \begin{cases} (\partial f^* D \dot{\varepsilon})_t \Big|_{t_0+0} & (\text{if elastic}) \\ (\partial f^* D \dot{\varepsilon})_t \Big|_{t_0+0} (1-\theta) & (\text{if plastic}) \end{cases}$$

であるが, 上の (b) および $\dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}$ の連続性より, $(\partial f^* D \dot{\varepsilon})_t \Big|_{t_0+0}$ が次の状態と独立だということからわかる。したがって,

ε_0 のうちで $(\partial f^* \dot{\sigma})_t \Big|_{t_0+0} = 0$ となるもの以外にたいしては $t > t_0$ の状態が決まる。この論法は次のように一般化できる。

$$(\partial f^* \dot{\sigma})^{(i)} = \frac{\partial \dot{\sigma}^{(i)}}{\partial t} (\partial f^* \dot{\sigma})^{(i)} \Big|_{t_0+0} \text{ となる。}$$

ε_k ($k \geq 0$) を次の条件をみたす要素の集合とする。

$$(i) \quad f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma}$$

(ii) $(\partial f^* \dot{\sigma})^{(i)} (i \in k)$ の $t = t_0+0$ における値の符号は, ε_k の次の状態と独立に定まり, かつゼロとなる。

(iii) $\varepsilon - \varepsilon_k$ の要素の次の状態は定まっている。

このとき, ε_k の要素 ~~が~~ ^の すべて次の条件
に対して

↑

$$(A) \quad (\partial f^* D \dot{z})^{(i)} \Big|_{t_0+0} = 0 \quad (i \leq k)$$

$$(B) \quad \dot{z}^{(i+1)} \Big|_{t_0+0} \quad (i \leq k) \text{ は } \mathcal{E}_k \text{ の次の状態と独立}$$

がみえられ、かつ、また条件

$$(C) \quad \ddot{z}^{(i+2)} \Big|_{t_0+0} \quad (i \leq k) \text{ は } \mathcal{E}_k \text{ の次の状態と独立}$$

もみえられなければならない、

(I) $\mathcal{E}_k$ のすべての要素について、 $(\partial f^* \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0}$ の符号は $\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立に定まる。したがってこれがゼロにならない $\mathcal{E}_k$ の要素にたいしては次の状態が決定される。

(II) $\mathcal{E}_k$ の要素のうち $(\partial f^* \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0} = 0$ となるもの全体 (定義によりこれは $\mathcal{E}_{k+1}$ である) にたいして、上の (A), (B), (C) が $k \rightarrow k+1$ として成立する。

(I) の証明: 各要素にたいして、次の状態をどう選ぶかによって 2 つの可能性がある。

$$(\partial f^* \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0} = \begin{cases} (\partial f^* D \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0} \\ (\partial f^* D \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0} (1-\theta) \end{cases}$$

仮定 (B), (C) により $(\partial f^* D \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0}$ は $\mathcal{E}_k$ の次の状態と独立に定まるから左辺の量の符号も然り。

(II) の証明: 上の α ことから、 $(\partial f^* \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0} = 0$ であれば

$(\partial f^* D \dot{z})^{(k+1)} \Big|_{t_0+0} = 0$ である。したがって (A) が $k+1$ のとき成立。

(B) を示すため、次の 2通りの可能性があることを示す。

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^{(k+2)} &= D \varepsilon^{(k+2)} \\ \sigma^{(k+2)} &= (D \dot{\varepsilon} - D/2 \partial f \cdot \partial f^* \dot{\sigma})^{(k+1)} \\ &= D \varepsilon^{(k+2)} - D/2 \left[\sum_{r=0}^{R+1} C_{R+1-r} (\partial f)^{(R+1-r)} (\partial f^* \dot{\sigma})^{(r)} \right] \end{aligned} \right.$$

と 3 か, 式 (3) の最後の項は明らかに $t > t_0 + 0$ ではゼロである。したがって仮定 (C) により (B) が $k \rightarrow k+1$ として成立する。

次に $t > t_0$ ではいずれの式も成立している。

$$(p \mu_i^{(k+2)}, g_p) + \sum_j (\sigma_{ij}^{(k+1)}, g_{p,j}) = (b_i^{(k+1)}, g_p)$$

$\varepsilon - \varepsilon_{k+1}$ の要素の次の状態はすでに確定しているから、この要素上での $\sigma^{(k)}|_{t_0+0}$ ($i \leq k+1$) は ε_{k+1} の次の状態とは独立に決定される。
(仮定 (C) より) 一方 ε_{k+1} の要素上での $\sigma^{(k+1)}|_{t_0+0}$ は ε_{k+1} の次の状態とは独立 (仮定 (B) より) である。したがって上式より $\mu^{(k+1)}|_{t_0+0}$ は ε_{k+1} の次の状態と独立である。これは (C) が $k \rightarrow k+1$ として成立するを意味する。

さて、 ε_0 には (A), (B), (C) の三条件が満たされていることは前に示した。したがって ε_1 が well defined であって (A), (B) 及び (C) が $k=1$ として成立する。したがって ε_2 が well defined であって、($\varepsilon_2 \neq \emptyset$ である限り) (A), (B), (C) が $k=2$ として成立する。これをくり返して行けば、すべての要素にたいして次の状態が物理的に妥当な形で決定される。例外としては

$$(\partial f^* \dot{\sigma})^{(k)}|_{t_0+0} = 0 \quad \forall k$$

となる要素があるが、この要素にたいしては $t > t_0$ は塑性とする（その理由等については後述をみられたい）。

このようにして、 $t > t_0$ での要素の状態があらかじめ決定されているので、物理的に妥当な解が $t = t_0$ を越えて接続される。

上の論法は降荷（*i.e.* plastic $\rightarrow$ elastic）の厚み全く同じことが可能で、以下に示すエネルギー不等式を考慮すれば、考えられている区間の全体にわたって解が接続されることがわかる。

<注意 1>: 任意の $t_0 \in T$ に対し、次の三つの場合がある。

- (1) 1) かなる要素も t_0 の近傍では状態の変化を行わない。
- (2) 1) いくつかの要素が $t = t_0$ で elastic $\leftrightarrow$ plastic の変化を行う。
- (3) t_0 は (2) のような t_0 の累積点である。

<注意 2>: 上の (3) の場合、正の数 δ があって時間区間 $(t_0, t_0 + \delta)$ のありだはいかなる要素も状態の変化を行わない。これは上述した解の接続法をみれば、^{わかるように} 解が区分的に解析的であるということからくる。— このためには勿論知らなければならない種の仮定が必要である。

上に定式化した問題は別の定式化が可能である。このため、 x^e を要素 e の特性関数として、 u, v, σ, α を次の形で表現する。

$$u(t) = \sum_{p \in \mathbb{P}} u^p(t) \varphi_p, \quad (\varepsilon, \sigma, \alpha)(t) = \sum_{e \in E} (\varepsilon^e, \sigma^e, \alpha^e)(t) \chi^e$$

定理 1. semi-discrete system の初期値問題は次の問題と同等である: t にかんし積分可能な $(u^{(3)}, \sigma, \alpha) \in \mathcal{H}$ が (u, σ, α) を次式を満たすものを求める。

$$(p \ddot{u}_i, \varphi)_p + \sum_j (\sigma_{ij}, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \quad p \in \mathbb{P}$$

$$(\dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma}, \tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \in K$$

$$\alpha = \mathcal{L} S^{-1} (\dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma})$$

ただし, $C = D^{-1}$, $\sigma \in K$ かつ

$$K = \left\{ \tau = \sum_e \tau^e(t) \chi^e; \tau^e(t) \text{ は } T \text{ で連続, } f(\tau - \alpha) \leq \bar{\sigma} \right\}$$

また S は σ と $\sigma - \alpha$ を $f\sigma = S(\sigma - \alpha)$ の関係で結んでいるある有限行列である。 $u - \varepsilon$ 関係式及び初期条件は semi-discrete system に属するものと同じである。

証明には上の問題の解の一貫性が示されればほとんど完全である。

定理 2. $(u, \sigma, \alpha) \in \text{semi-discrete system}$ の解とする。

$$E_0(t) \equiv \|\dot{u}\|_p^2 + \frac{1}{2} \|\alpha\|_S^2 + \|\sigma\|_C^2 \quad t \in T$$

は Ω の三角形分割に関して一様に有界である。 したがって,

$$\|\dot{u}\|_p^2 = (p\dot{u}, \dot{u}), \quad \|\alpha\|_S^2 = (S\alpha, \alpha), \text{ etc.}$$

定理3. (u, σ, α) を semi-discrete system の解とする。

$$E_1(t \pm 0) \equiv [\|u\|_p^2 + \frac{1}{2} \|\alpha\|_s^2 + \|\sigma\|_c^2](t \pm 0)$$

は Ω の三角形分割に かんして 一様に 有界である。

これを証明するには、次の補題を使用し、状態変化の生じない区間でまずエネルギー一掃両を行い、それを繰り返せばよい。

補題2. $t = t_0$ で応力場 σ が降伏曲面 $\{t \in E^3; f(t, \alpha) = \bar{\sigma}^2\}$ と離れるから

$$\partial f^* \sigma = 0 \quad \text{at } t = t_0 \pm 0$$

3. 塑性移動問題の弱解

前節で得た解 (u, σ, α) は Ω の分割中にせりと存するとする。これを八収平し、それは次の問題の弱解と見做され得る。その証明法は Duvant-Lions [1] にあけきつたと全く同じであるので結果だけを以下に記す。

$C^\infty(\bar{\Omega})$ の α が P_0 上にせりと存する σ の全体を $\overline{W}_2(\Omega)$ のノルムに完备化したものを $\mathcal{W}_2(\Omega, P_0)$ と表わす。 $\alpha \in L^\infty(T; L^2(\Omega))$ にたいして $K = K_\alpha$ を次のように定義する。

$$K = \{ \tau \in L^0(T; L^2(\omega)); \text{ a.e. on } T, f^2(\tau, \alpha) \leq \bar{\sigma}^2 \text{ a.e. on } \omega \}$$

定理 4. 次の問題は一意解を持つ。それは semi-discrete system の解の極限として与えられる: $(u, \sigma, \alpha) \in L^0(T; L^2(\omega))$ であり、次の条件を満たすものを求めよ。

a.e. T について

$$(\rho \ddot{u}_n, \varphi) + \sum_j (\sigma_{nj}, \varphi_{,j}) = (b_n, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_2'(\Omega, P_0)$$

$$(\dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma}, \tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \in K$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \dot{\sigma}^{-1} (\dot{\varepsilon} - C\dot{\sigma})$$

$b_n \in L^2$, $\sigma \in K$, $(u, \dot{u}) \in L^0(T; \mathcal{D}_2'(\Omega, P_0))$, $(\ddot{u}, \dot{\sigma}, \dot{\alpha}) \in L^0(T; L^2(\omega))$,
 $u - \varepsilon$ 内厚式及び初期条件は (1.1)~(1.3) に在るものと同じ。
 証明の詳細については (5) に参照されたい。

文 献

- [1] Duvaut-Lions, Inequalities in Mechanics and physics
Springer (1976)
- [2] Miyoslii, Elastic-plastic vibration of a rod., Publ. R.I.M.S.
Kyoto Univ. Vol. 16, No. 2.
- [3] Yamada, 塑性・粘弾性, 培風館 (1972)
- [4] Ziegler, A modification of Prager's hardening rule,
Quart. Appl. Math. 17 (1959), 55-65.
- [5] Miyoslii, On existence proof in plasticity theory, Kumamoto J. Sci. Vol. 14