

$\mathbb{C}^3$ の compact 化

琉球大・教育 古島幹雄

§0. 序

X を n 次元連結コンパクト複素多様体とし, Y を X に $\mathbb{P}^1$ ける解析的閉部分集合とする. 2つ組 (X, Y) が $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化であるとは, $X \setminus Y$ が $\mathbb{C}^n$ に双正則同型であるときをいう. このとき, F. Hirzebruch により次の問題が提起された.

問題 第2バッチ数 $b_2 = 1$ なる $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化をすべて決定せよ.

まず, $n = 1$ のときは, 容易に, $(X, Y) \cong (\mathbb{P}^1, \infty)$ であり, $n = 2$ のときは, Remmert - Van de Ven [11] により, $(X, Y) \cong (\mathbb{P}^2, \text{a line } \mathbb{P}^1)$ であることが示された.

そこで, 我々は, $n = 3$ の時を考察する. 最近, Ph. Petermell 等により, $n = 3$ の時, $b_2 = 1$ なる任意の解析

的コンパクト化 X は射影代数的であることが示されたらしいので、我々は、以後、 X は射影代数的と仮定する。

注意 $n \geq 4$ に対しては、 X の射影代数性は未解決である。又、 $b_2 = 2$ なる射影代数的でない $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化が存在するので、 $b_2 = 1$ の仮定は本質的である。

§ 1. 基本的事実

(X, Y) を $b_2(X) = 1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化で、とくに、 X は射影代数的と仮定する。そのとき、次を得る。

命題 1.1 ([2]) (1) Y は X 上の既約で、豊富な因子である。

$$(2) \quad H^i(X; \mathbb{Z}) \cong H^i(Y; \mathbb{Z}) \quad , \quad \text{とくに}$$

$$(\text{a}) \quad H^1(X; \mathbb{Z}) \cong H^1(Y; \mathbb{Z}) \cong 0$$

$$(1) \quad H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot c_1(\mathcal{O}_X(Y))$$

すなわち

$$H^2(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot c_1(\mathcal{O}_Y(Y))$$

(3) $K_X = -r \cdot Y$ ($r > 0$, $r \in \mathbb{Z}$) , 但し、 K_X は X の標準因子。特に、 X は第 1 種 Fano 3-fold である。

命題 1.1-(3) における整数 $r > 0$ を X の index と言う.

定理 1.2 (c.f. [8]).

- (1) $\text{Index } r \geq 4 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{P}^3, \text{a plane } \mathbb{P}^2)$
 (2) $\text{Index } r = 3 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, 但し,
 $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ は非特異 2 次超曲面で, $\mathbb{Q}_0^2$ は 2 次錐.

これより, 残るは, $\text{Index } r \leq 2$ の場合の (X, Y) の構造である.

§2. $\text{Index } r = 2$ の場合

V_5 を $\text{index } 2$, $\text{genus } g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1 = 21$ の第 1 種 Fano 3-fold, 即ち, $\mathbb{P}^4$ 内の lines の Grassmann $G(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ の余次元 3 の部分空間 $\mathbb{P}^6$ による切断とする (c.f. [1], [8]). 向井-梅村 [10] により, $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ の定義式は

$$\begin{cases} x_0x_4 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 = 0 & , & x_1x_6 - 3x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0 \\ x_0x_5 - 3x_1x_4 + 2x_2x_3 = 0 & , & x_2x_6 - 4x_3x_5 + 3x_4^2 = 0 \\ x_0x_6 - 9x_2x_4 + 8x_3^2 = 0 & , & (1 \text{ 且 } (x_0 : \dots : x_6)) \end{cases}$$

は $\mathbb{P}^6$ の同次座標) で与えられる. 実際, $\text{index } 2$, $g = 21$

の第1種 Fano 3-fold はすべて射影同値である (c.f. [8]).
そこで, $H_5^\circ := V_5 \cap \{\alpha_5 = 0\}$, $H_5^\infty := V_5 \cap \{\alpha_6 = 0\}$ なる
超平面切断を与える. すると, 次が分る:

(1) $\text{sing } H_5^\circ$ は唯1個の A_4 -型の有理2重点よりなる.

(2) $\text{sing } H_5^\infty =: \ell$ は法束 $N_{\ell|V_5} \cong \mathcal{O}_2(-1) \oplus \mathcal{O}_2(1)$ をもつ

V_5 における直線である. 特に, H_5^∞ は non-normal.

(3) $V_5 \setminus H_5^\circ \cong \mathbb{C}^3$, $V_5 \setminus H_5^\infty \cong \mathbb{C}^3$

こうして, (V_5, H_5°) , (V_5, H_5^∞) は index $\chi = 2$ の
 $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化の例を与える.

一方, (V_5, H_5°) , (V_5, H_5^∞) は以下のようにしても構成で
きる:

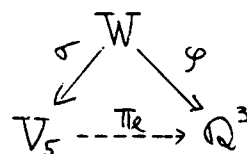
非特異2次超曲面 $Q^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ 上に直線 ℓ をとる.

$0 \neq \infty \in \ell$ を ℓ 上の異なる2点とする. Q_0, Q_∞ にて, 0
 ∞ をそれぞれ頂点にもつ2次の錐とする. すると, $Q_0 \cdot Q_\infty = 2\ell$
を得る. Q_∞ に含まれる非特異3次有理曲線 C を, $0, \infty$
を通るものとれる. $\varphi: W \rightarrow Q^3$ を C に沿う
blowing up とし, $C' = \varphi^{-1}(C) (\cong \mathbb{P}_1)$ とおく. $\overline{Q}_0, \overline{Q}_\infty$ を
それぞれ, Q_0, Q_∞ の W における proper transform とする.
すると, $\overline{Q}_\infty \cong \mathbb{P}_2$ であり, この $\overline{Q}_\infty$ が曲線につぶれる.
こうして得られた非特異3-fold が index 2, $\chi = 21$ の第1
種 Fano 3-fold V_5 である. $\sigma: W \rightarrow V_5$ をこの

contraction morphism とする。

$\sigma(\overline{Q}_\infty) =: \ell$ は $N_{\ell|V_5} \cong \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)$

なる (V_5 における) 直線である。



(D-1)

右の (D-1) は, V_5 のこの直線 ℓ からの射影 $\pi_\ell: V_5 \dashrightarrow Q^3$ の不定点解消を与えている。

(4) $H_5^\infty \cong \sigma(C')$. とくに, H_5^∞ は $\ell = \sigma(\overline{Q}_\infty)$ と交わる直線全体で張られる ruled surface である。

(5) $H_5^0 \cong \sigma(\overline{Q}_0)$. とくに, $\ell = \sigma(\overline{Q}_\infty)$ は H_5^0 に含まれる, V_5 における唯一つの直線である。

(6) $V_5 - H_5^\infty \xrightarrow{\sigma} W - (C' \cup \overline{Q}_\infty) \xrightarrow{\phi} Q^3 - Q_\infty \cong \mathbb{C}^3$

(7) $V_5 - H_5^0 \cong W - (C' \cup \overline{Q}_0) \cong \mathbb{C}^3$ (c.f. [2]).

このことから, (V_5, H_5^0) , (V_5, H_5^∞) が $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化であることが分る。実は, 次がいえる。

定理 2.1 ([2], [7], [12]). Index $k = 2$ のときの $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化は, 同型をのぞき, (V_5, H_5^0) 又は (V_5, H_5^∞) に限る。

$\mathbb{C}^3$ のコンパクト化としての Fano 3-fold V_5 の詳しい構造については [6] [7] を見て下さい。

§ 3. Index $r = 1$ の場合

この場合, X は index 1 の第 1 種 Fano 3-fold で Y はその特異点をもつ超平面切断である.

定理 3.1 ([4]). Y は non-normal である.

(証明の方針). Y を normal とし矛盾を導く.

$K_X = -Y$ より, Y は自明な標準層 $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$ をもつ.

$S := \{x \in \text{sing } Y; x \text{ は有理型特異点でない}\}$

とおく. $\pi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を最小特異点除去とし, $\pi^*(S) =:$

$C = \cup C_i$ とおく. $\text{sing } Y \setminus S$ は有理 2 重点よりなる.

補題 3.2 (1) $-K_{\tilde{Y}} = \sum m_i C_i$ ($m_i > 0$, $m_i \in \mathbb{Z}$)

(2) 多重種数 $\rho_m(\tilde{Y}) = 0$ ($\forall m > 0$)

(3) $\rho := h^1(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \frac{1}{2} b_3(X)$

系. $\tilde{Y}$ は rational surface 又は genus ρ のコンパクトリーマン面上の ruled surface.

補題 3.3 (梅津[13]). $S = \{\alpha_0\}$ (1点) と $\rho_f(\alpha_0) = \rho + 1$.

命題 3.4 ([3]). $0 \leq g \leq 3$, 特に, $g = 3$ のときは $\tilde{Y}$ は genus 3 のコンパクトリーマン面上の $\mathbb{P}^1$ -束である.

補題 3.5 (Iskovskih の分類表 [8]).

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
g	52	30	20	14	10	7	5	3	2	0

$$\text{ここに, } g = \frac{1}{2} b_3(X), \quad g = \frac{1}{2} (-K_X)^3 + 1.$$

命題 3.4, 補題 3.6 より, $(g, g) = (9, 3), (10, 2), (12, 0)$ を得るが, $\tilde{Y}$ の構造を詳しく見ることにより,

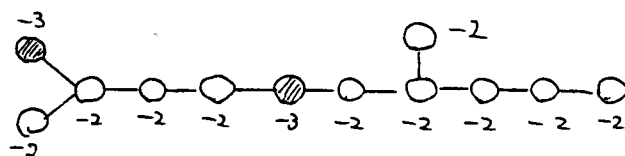
命題 3.6. $(g, g) = (12, 0)$, 即ち, X は index 1 genus 12 の第 1 種 Fano 3-fold で, その超平面切断 Y は rational surface である. 特に, $S = \{x_0\}$ は最小楕円型特異点である.

Laufer [9] による最小楕円型特異点の分類結果を細かく見ることにより, Y の特異点集合 $\text{Sing } Y$ について,

命題 3.7. $\text{Sing } Y$ は 次のいずれかである

(a) $\text{Sing } Y = S = \{x_0\}$ (1 点) で $\pi^{-1}(x_0) = C$ の

dual graph は :



- (b) $\text{sing } Y = \{x_0, y_0\}$ (2点) で, $\pi^{-1}(x_0) = C$ は $(C^2) = -2$ なる 1 点の cuspidal point をもち $\mathbb{P}^1$ であり, y_0 は A_0 -型の有理2重点である.

Case (a) が起きない事 : $\text{sing } Y = \{x_0\}$ からの3重射影
は X から $\mathbb{P}^3$ への rational map $\pi_{y_0} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$
を定める. Y の最小特異点除去 $\tilde{Y}$ を調べることにより,
 $x_0 \in X$ を通る X 内の line は存在せず, x_0 を通る X の
conic は唯一つ存在することが分る. それを γ とする.
 $\sigma_1 : X_1 \rightarrow X$ を x_0 での blowing up とし, $E := \sigma_1^{-1}(x_0) \cong$
 $\mathbb{P}^2$ とおく. γ_1 を γ の X_1 における proper transform
とすると, linear system $|\sigma_1^*H - 3E|$ (但し $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$)
の base locus $B_{|\sigma_1^*H - 3E|} = \gamma_1$ である. 又, γ_1 の
 X_1 における法線は $N_{\gamma_1|X_1} \cong \mathcal{O}_{\gamma_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\gamma_1}$ が分る.

今, linear system $|\sigma_1^*H - 3E|$ で定義される rational
map $\pi := \pi_{|\sigma_1^*H - 3E|} : X_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ の不定点解消を注意深

く見ることにより,

(i) $\Phi(X_1) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は 2 次超曲面

(ii) γ_1 に沿う X_1 の flip $f: X_1 \dashrightarrow W_1$ と U
 W_1 から $\Phi(X_1)$ の上への morphism
 $\exists \varphi: W_1 \rightarrow \Phi(X_1)$

が存在して, 次の可換:

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{f} & W_1 \\
 \sigma_1 \downarrow & \square & \downarrow \varphi \\
 X & \xrightarrow[\pi_{3\gamma_0}]{} & \Phi(X_1) \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \\
 & & \downarrow \text{sq} \\
 & & \mathbb{Q}^2
 \end{array}$$

(iii) $\Phi(X_1) \cong \mathbb{Q}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は 非特異 2 次超曲面
 上, $\varphi: W_1 \rightarrow \Phi(X_1) \cong \mathbb{Q}^2$ は conic
 bundle の構造をもつ.

さて, (iii) より, $b_2(W_1) = b_2(\mathbb{Q}^2) + 1 = 3$.
 一方, $2 = b_2(X_1) = b_2(W_1)$. こうして矛盾.
 よって, Case (a) は起きない.

Case (b) 加起さない事. Y の x_0 での重複度は 2 である. $\sigma_1: X_1 \rightarrow X$ は x_0 での blowing up とし, $E := \sigma_1^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^2$ とおく. $Y_1 \in Y$ の X_1 における proper transform とすると, $Y_1 \cap E = 2L$ (但し, L は $E \cong \mathbb{P}^2$ における line). $\sigma_2: X_2 \rightarrow X_1$ は L に沿う blowing up とし, $L' := \sigma_2^{-1}(L) (\cong \mathbb{P}^2)$ とおく. ここで, X_2 上に linear system $\mathcal{L} := |\sigma_2^* Y_1 - L'|$ を考える. すると, $\mathcal{L}$ は base point free であり, X_2 から $\mathbb{P}^6$ への birational morphism $\Phi = \Phi_{\mathcal{L}}: X_2 \rightarrow \Phi(X_2) \subset \mathbb{P}^6$ を定める. Φ の exceptional set は $x_0 \in X$ である. X の conic の X_2 における proper transform のみである. $W = \Phi(X_2)$ とおくと, $\deg W = 4$, 従って W は rational scroll または Veronese surface 上の cone である. ところで, $b_2(W) = 1$. 一方, $\beta = b_2(X_2) = b_2(W)$ より矛盾を生ずる. 従って, Case (b) は起さない. 以上が定理 3.1 の証明のあらすじである.

定理 3.2 (Peternell-Schneider [12]). Y は non-normal とする. すると, X は index 1, genus 12 の第 1 種 Fano 3-fold である.

制限 $\pi_{21} : V'_{22} - H'_{22} \xrightarrow{\sim} V_5 - H_5^\infty (\cong \mathbb{C}^3)$ は同型である.

問題. index 1 の $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化は, (V'_{22}, H'_{22}) に限るか?

注意. (V'_{22}, H'_{22}) , (V_5, H_5^∞) , $(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2)$ は, 境界因子の特異点からの射影 (又は, 2重射影) でつながっている, 即ち, birational maps

$$V'_{22} \xrightarrow{\pi_2} V_5 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{P}^3,$$

但し, $\left(\begin{array}{ll} \pi_2 : & \text{sing } H'_{22} \text{ (line) からの2重射影} \\ \pi_1 : & \text{sing } H_5^\infty \text{ (line) からの射影} \\ \pi_0 : & \text{sing } \mathbb{Q}_0^2 \text{ (pt) からの射影} \end{array} \right.$

加えて,

$$V'_{22} \setminus H'_{22} \xrightarrow{\pi_2} V_5 \setminus H_5^\infty \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{Q}^3 \setminus \mathbb{Q}_0^2 \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^2 \\ (\cong \mathbb{C}^3)$$

References

- [1] T. Fujita : On the structure of polarized

定理 3.3 ([5]). V_{22}' を向井-梅村 [10] によって構成された, index 1, genus 12 の第1種 Fano 3-fold とする. そのとき, V_{22}' の non-normal な超平面切断 H_{22}' で, $V_{22}' - H_{22}' \cong \mathbb{C}^3$ なるものが存在する.

最後に, (V_{22}', H_{22}') の構造について述べる.

命題 3.4

- (1) $\text{sing } H_{22}' =: L$ は V_{22}' における line で, その法束は, $N_{L|V_{22}'} \cong \mathcal{O}_L(-2) \oplus \mathcal{O}_L(1)$ である.
- (2) L と交わる V_{22}' のその他の line はない.
- (3) H_{22}' は L と交わる V_{22}' 内の conics で張られる ruled surface である.

定理 3.5. L からの2重射影 π_{2L} は V_{22}' から index 2, genus 21 の第1種 Fano 3-fold V_5 の上への birational map $\pi_{2L} : V_{22}' \dashrightarrow V_5$ を定め,

manifolds with total deficiency one II, J.
Math. Soc. Japan 33 (1981) 415-434.

[2] M. Furushima : Singular del Pezzo surfaces and complex analytic compactifications of the 3-dimensional complex affine space $\mathbb{C}^3$, Nagoya Math. J. 104 (1986) 1-28.

[3] M. Furushima : Singular K-3 surfaces with hypersurface singularities, Pacific J. Math. 125 (1986) 67-77.

[4] M. Furushima : Complex analytic compactifications of $\mathbb{C}^3$, to appear in Compositio Math.

[5] M. Furushima : A note on a compactification of $\mathbb{C}^3$ in preparation.

[6] M. Furushima - N. Nakayama : A new construction of a compactification of $\mathbb{C}^3$, Tohoku Math. J. 41 (1989) 543-560.

- [7] M. Furushima - N. Nakayama : The family of lines on the Fano 3-fold V_5 , Nagoya Math. J. 116 (1989) 1-12
- [8] V.A. Iskovskih : Anticanonical models of three dimensional algebraic varieties, J. Soviet Math. 13-14 (1980), 745-814.
- [9] H. Laufer : On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99 (1977) 1257-1295.
- [10] S. Mukai - H. Umemura : Minimal rational threefolds, L.N.M 1016 (1983), 490-518
- [11] R. Remmert - T. Van de Ven : Zwei Sätze über die komplex-projektive ebene, Nieuw Arch. Wisk. 8 (3) (1960), 147-157.
- [12] T. Peterzell - M. Schneider, Compactifications of $\mathbb{C}^3$ I Math. Ann. 280 (1988), 129-146

- [3]. Y. Umezū ; On normal projective surfaces
with trivial dualizing sheaf, Tokyo J. Math.
4 (1981), 343 - 354.