

Cuntz-Krieger 環の生成元達の組み合わせ論的性質と関連する力学系のゼータ関数について

横浜市立大学 松本 健吾 (Kengo Matsumoto)

□ はじめに

この小文では次の2つのプレプリントの内容を紹介します。

④ K. Matsumoto 「Cuntz-Krieger algebras and a generalization of Catalan numbers」

arXiv: 0607.5117

⑤ W. Krieger & K. Matsumoto 「Zeta functions and topological entropy of the Markov Dyck shifts」

arXiv: 0706.3262

従って、この小文は W. Krieger との共同研究に基づいたものです。目標としては、次の表の ?①, ?②, ?③ を埋めることです。

?① と ?② は主に ④ で取り上げ、?③ は ⑤ のプレプリントで考えました。

C^* 環	Cuntz環 $\mathcal{O}_N$	Cuntz-Krieger環 $\mathcal{O}_A$
組み合わせ論	(N -色) カタラン数	?①
記号カ学系	Dyck shifts D_N	?②
カ学系の セータ関数	$\zeta_{D_N}(t)$ (G. Keller 1989) v. 3	?③

Cuntz環 $\mathcal{O}_N$ の生成元 $S_1, \dots, S_N$ は等距離作用素達で $\sum_{j=1}^N S_j S_j^*$ を満たすものである。

これらの生成元 $S_1, \dots, S_N, S_1^*, \dots, S_N^*$ の組み合わせ論的性質はカタラン数で統制され、その生成元達のなす記号列からできる記号カ学系は、Dyck シフトと呼ばれるサブシフトになります。この Dyck シフトのカ学系のセータ関数は、

G. Keller: J. Combinatorial Theory 56(1991) 75-83
 により求められています。そこで問題は, Cuntz環
 の代わりに, Cuntz-Krieger環に一般化した場合に
 は, カタラン数や Dyck shifts や そのゼータ関
 数がどのように一般化されるか? ということにな
 ります。

□ カ学系のゼータ関数

ゼータ関数と言えは, Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

が、あまりにも有名ですが、これから登場するゼータ関数
 は、そのカ学系への類似物であり、歴史的には

Selberg (1952) が Riemann 面, ^{の測りやすさ}
 Riemann 対称空間 $\checkmark$ に対して

Artin-Mazur (1965) が C^{∞} 様体上の可微分
 同相写像 $\checkmark$ に対して

Ruelle (1976) が カ学系のゼータ関数の定式化
 と、統計学的観点からの研究

の論文等で、その定義が確立し、研究され始めたと言え
 るようです。

以下 X をコンパクトハウスドルフ空間, ϕ をその上の同相写象とします。 $P_n(\phi)$, $n=1, 2, \dots$ を ϕ の n -周期的全体のなる集合

$$P_n(\phi) = \{x \in X \mid \phi^n(x) = x\}$$

を表わし, $P_n(\phi)$ の個数 $\#P_n(\phi)$ とします ($P_n(\phi) = \emptyset$ の場合も, もちろんです)。この数数列

$$P_1(\phi), P_2(\phi), P_3(\phi), \dots$$

は力学系 (X, ϕ) の位相不変量になっています。力学系のゼータ関数 $\zeta_\phi(t)$ はこの数数列 $\{P_n(\phi)\}_{n=1}^{\infty}$ をまとめたものですが, $P_n(\phi) = \infty$ になってほうと取り扱えないので, 以下

$$P_n(\phi) < \infty \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$$

となる力学系 (X, ϕ) に限定して考えます。

定義 (力学系のゼータ関数)

$P_n(\phi) < \infty \quad \forall n=1, 2, \dots$ となる力学系 (X, ϕ) に対して, そのゼータ関数 $\zeta_\phi(t)$ を

$$\zeta_\phi(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(\phi)}{n} t^n\right)$$

と定義します。

$\exp$ の中身は無限級数なので、収束半径の問題、解析接続の問題、解析接続した後の関数の形、零点の問題等、解析的な問題は重要ですが、ここでははたらく、形式的な定義で考えます。

形式的には

$$\zeta_\phi(t) = 1 + p_1(\phi)t + \frac{1}{2}(p_2(\phi) + p_1(\phi)^2)t^2 + \frac{1}{6}(2p_3(\phi) + 3p_1(\phi)p_2(\phi) + p_1(\phi)^3)t^3 + \dots$$

より

$$\frac{d^n}{dt^n} \log \zeta_\phi(t) \Big|_{t=0} = n! \frac{p_n(\phi)}{n}$$

なので、ゼータ関数 $\zeta_\phi(t)$ から数列 $p_n(\phi), n=1, 2, \dots$ も復活できます。このゼータ関数はオイラー積表示

$$\zeta_\phi(t) = \prod_{\gamma: \text{周期軌道}} (1 - t^{|\gamma|})^{-1}$$

(但し、 $|\gamma|$ は周期軌道の周期の長さ) をもちいて、形式的に $e^{-s} = t$, $N(\gamma) \equiv e^{|\gamma|}$ とおくと、

$$\zeta_\phi(t) = \prod_{\gamma: \text{周期軌道}} (1 - N(\gamma)^{-s})^{-1}, \quad |\gamma|^{-1} = \operatorname{Re}(s)$$

となり, Riemann zeta 関数の形の類似であることがよく分ります。以下簡単な列を記号力学系も題材にして計算してみましょう。その際、必要なのは初等的公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \quad \text{とその積分形}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t)$$

だけで済む。

例 1.1 $(X, \phi) = (\cdot, \text{id})$
1点.

$$P_n(\phi) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} Z_{\phi}(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right) \\ &= \exp(-\log(1-t)) \\ &= \frac{1}{1-t}. \end{aligned}$$

例 1.2 $(X, \phi) = (\{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}, \sigma) : N\text{-full shift}$

$$\text{ここで } \sigma((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} : \text{シフト}$$

n -周期点 $P_n(\sigma)$ は n 文字列 $\{1, 2, \dots, N\}^n$ で決まるので $P_n(\sigma) = N^n$ となります。従って

$$\begin{aligned}
 \zeta_G(t) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^n}{n} t^n \right) \\
 &= \exp (-\log (1 - Nt)) \\
 &= \frac{1}{1 - Nt}
 \end{aligned}$$

例3 $(X, \phi) = (X_G, \sigma)$: 位相的マルコフシフト

$G = (V, E)$ も既約な有向有限グラフで, 頂点 V の個数は N とします. $A_G \in N \times N$ 隣接行列とします. 例えは..

G :  なる $A_G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ かつ,

$$X_G = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} \mid \begin{array}{l} r(x_i) = s(x_{i+1}) \\ \forall i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$\pi = \pi \circ \sigma$

$r(x_i), s(x_{i+1})$ は辺 x_i の終点, 辺 x_{i+1} の始点です.
無限直積位相 $E^{\mathbb{Z}}$ はコンパクトハウスドルフ空間で X_G は $E^{\mathbb{Z}}$ のコンパクト部分集合です.

$\sigma_G: X_G \rightarrow X_G$ を $\sigma_G((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ と定義しとき, 位相力学系 (X_G, σ_G) をグラフ G から定義される位相的マルコフシフトと呼びます.

このとき, 頂点 ① から頂点 ② への辺の本数は

$(A_G)^n(j, j) + 1$ ので, n -周期点の個数は

$$\begin{aligned}
 p_n(\sigma_G) &= \sum_{i=1}^N (A_G)^n(i, i) = \text{Tr}((A_G)^n) \\
 &= \lambda_1^n + \dots + \lambda_N^n
 \end{aligned}$$

但し $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ は A_G の重複を許した固有値リストです。従って、ゼータ関数は

$$\begin{aligned}
 Z_{\sigma_G}(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n + \dots + \lambda_N^n}{n} t^n\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n} t^n\right) \times \dots \times \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_N^n}{n} t^n\right) \\
 &= \frac{1}{1 - \lambda_1 t} \times \dots \times \frac{1}{1 - \lambda_N t} \\
 &= \frac{1}{\det(1 - A_G t)}
 \end{aligned}$$

となり、行列式表示をもちます。この表示は Bowen-Lanford Formula (1970) と呼ばれています。

例 4 $(X, \phi) = (D_N, \sigma_N) : \text{Dyck シフト}$

$2 \leq N \in \mathbb{N}$ とし、 Σ_N を N -種の括弧組とします。

$$\Sigma_N = \{ (, (, \dots, (,), \dots,),) \}$$

ここで括弧組 $(i,)_j$ の次の演算を定義します。

$$(*) \quad (i,)_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

このとき

$$\mathcal{F}_N = \{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Sigma_N \times \dots \times \Sigma_N \mid \delta_1 \dots \delta_n = 0\}$$

と定義します。例えば

$$(1)_2, (2)_1, (1(2)_2)_2, (3(1)_1(2)_2)_4 \in \mathcal{F}_N$$

つまり, $\mathcal{F}_N$ は 整合しない括弧の並みの集合です。

$$D_N = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_N^{\mathbb{Z}} \mid (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}) \notin \mathcal{F}_N \right. \\ \left. \forall k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

とかく D_N は 整合しない括弧列が現れない括弧列の両側無限列全体であり $\Sigma_N^{\mathbb{Z}}$ のコンパクト部分集合になります。 $\sigma_{D_N}: D_N \rightarrow D_N$ を例3と同様のシフトとすると, 位相力学系 (D_N, σ_{D_N}) を

Dyck シフト と呼びます。Dyck シフトは例3のヌルコフシフトではなく, ナスキはソビックシフトと呼ばれる色付有向有限グラフで現れるサブシフトにもなりません。ソビックでない記号力学系のセータ関数を計算するのは一般にかなり難しく, 殊に計算例が知られていません。ただ, このDyck シフトのセータ関数 $\zeta_{D_N}(t)$ については, G. Keller がカタラン数の母関数を使って, 次のように計算しています。

定理 (G. Keller 1989)

$$Z_{D_N}(t) = \frac{2(1 + \sqrt{1 - 4Nt^2})}{(1 - 2Nt + \sqrt{1 - 4Nt^2})^2}$$

Keller は Dyck shift の周期点の個数 $P_n(D_N)$ については、求めています。九州大学の浜地先生のリ3の大学院生だった井上さんによリ $P_n(D_N)$ は次のよう計算されています。

定理 (K. Inoue)

$N=2$ のとき

$$P_n(D_2) = \begin{cases} 2 \left\{ 3^n - \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} 2^i \right\} & (n: \text{奇数}) \\ 2 \left\{ 3^n - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{i} 2^i \right\} + \binom{n}{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

2 Cuntz 環と Catalan 数

Cuntz 環 $\mathcal{O}_N$ の生成元 $S_1, \dots, S_N$ は等距離性作用素で、 $S_i^* S_i = 1, i=1, \dots, N, \sum_{j=1}^N S_j S_j^* = 1$ が満たされる。

従って、

(*)

$$S_i^* \cdot S_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となります。 $S_1^*, \dots, S_N^*, S_1, \dots, S_N$ の word (有限個の種) で $\emptyset$ になるのは (*) で $\emptyset$ になるときに限るので、先の Dyck shift は

$$S_i^* \leftrightarrow C_i, \quad S_i \leftrightarrow D_i$$

と対応させることにより

$$D_N = \left\{ (\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid \gamma_i = S_j^* \text{ or } S_j, \right. \\ \left. \gamma_{k+1} \cdot \gamma_{k+2} \cdots \gamma_{k+m} \neq \emptyset \text{ in } \mathcal{O}_N \right. \\ \left. \forall k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

と見なせます。

さて, Catalan 数 $C_n, n=0,1,2,\dots$ は, 次で定義される数列です。

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \left(= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \right)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

よって, $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ となります。
 $\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & \dots \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & \end{array}$

Catalan 数は自然界の様々な物の数え上げに現れる数で;

R. Stanley 「Enumerative Combinatorics vol 2」 には, なんと

と 66 種の例が書かれています。次は, その中の有名な

3 つです。

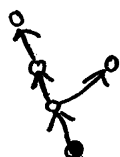
$$C_n = \# \left\{ \begin{array}{l} \text{上り} \nearrow n \text{本, 下り} \searrow n \text{本の山脈の形} \\ \text{例は} \end{array} \right\}$$



$$= \# \left\{ \begin{array}{l} \text{2n個の整合した括弧} \\ \text{例は} \end{array} \right\}$$

$((()) ())$

$$= \# \left\{ \begin{array}{l} \text{n本の枝からなる根付き木} \\ \text{例は} \end{array} \right\}$$



一番上の上り n 本下り n 本の山脈の形は Dyck path
とも呼ばれています。詳しく置くと

$$n=1 \quad \nearrow \searrow \quad \therefore C_1 = 1$$

$$n=2 \quad \nearrow \searrow \nearrow \searrow, \nearrow \searrow \nearrow \searrow \quad \therefore C_2 = 2$$

$$n=3 \quad \nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow \searrow, \nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow \searrow, \nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow \searrow$$

$$\nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow \searrow, \nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow \searrow \quad \therefore C_3 = 5$$

...

$$\begin{array}{ccc} S_i^* \leftrightarrow \nearrow^i & \text{レベル } i \text{ の 上 } \\ S_i \leftrightarrow \searrow_i & \text{下 } \end{array}$$

と対応させる

$$\forall \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}), \quad \gamma_i = S_i^* \text{ or } S_i \quad \text{ただし}$$

$$\gamma_1 \cdots \gamma_{2n} = 1 \text{ in } \mathcal{O}_N \quad \text{となるための必要かつ}$$

十分条件は

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \text{ がある Dyck path を与える}$$

こととなります。従って,

$$\Sigma_N = \{S_1^*, \dots, S_N^*, S_1, \dots, S_N\};$$

$$C_n^{(N)} \equiv \# \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \mid \gamma_i \in \Sigma_N, \forall i=1, \dots, 2n; \right. \\ \left. \gamma_1 \cdots \gamma_{2n} = 1 \text{ in } \mathcal{O}_N \right\}$$

とおいたとき

$$\boxed{\text{命題}} \quad C_n^{(N)} = N^n \times C_n, \quad n=0,1,2,\dots$$

となります。この $C_n^{(N)}$ という数は、組合せ論では、 N 色カタラン数と呼ばれているものです。以上の Cuntz 環の生成元と Catalan 数の対応は、難しいものではなく、Voiculescu, Bocklandt や自由確率論を研究している人達には既に良く知られていたことのようにです。

③ Dyck shifts と Catalan 数の Cuntz-Krieger 環による一般化.

今までの議論は, Cuntz 環 $\mathcal{O}_N$ の生成元達を用いて行いしたが, Cuntz 環を一般化して Cuntz-Krieger 環での議論を一般化しよう.

$G=(V, E)$ を有向有限グラフとします. その 0-1 推移行列 A^G を $e, f \in E$: 有向辺に対して

$$A^G(e, f) = \begin{cases} 1 & \text{if } \underline{e \rightarrow f} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義します. グラフ G に対する Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_{A^G}$ は部分等距離性作用素 $S_e, e \in E$ で生成される普通 C^* 環で, 関係式は

$$\begin{cases} S_e^* S_e = \sum_{f \in E} A^G(e, f) S_f S_f^*, \\ \sum_{f \in E} S_f S_f^* = 1 \end{cases}$$

です. 特々 $G = \textcircled{N}$ N -edges, 1 頂点 1 個

のとき $A^G = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ となり $\mathcal{O}_{A^G} = \mathcal{O}_N$ となります.

さて グラフ G に対して

$\Sigma_G = \{ S_e^*, S_e \mid e \in E \}$ とおきます.

$$\mathcal{F}_G = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \Sigma_G \times \dots \times \Sigma_G \mid \gamma_1 \dots \gamma_m = \square \text{ in } \mathcal{O}_{AG} \right\}$$

と禁止語を決めて,

定義 (位相的アルゴリズム)

$$D_{AG} = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \Sigma_G, i \in \mathbb{Z}, \right. \\ \left. x_{k+1} \dots x_{k+m} \notin \mathcal{F}_G \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

特に

$G = \bigcirc$ N -edges のときは $D_{AG} = D_N$ アルゴリズムになります。

Cuntz-Krieger のように、 G が $\text{Condition}(I)$ を満たすとは、(1) 任意の頂点に、入ってくる辺と出ていく辺が存在し、
(2) 任意の頂点から何本かの辺を通して、必ず異なる2個以上の頂点に到達できる ことを言います。これを

命題 G が $\text{Condition}(I)$ を満たすならば、サブシフト

D_{AG} は シフト にならない。

そこで、これから、このサブシフト D_{AG} のエンタピー関数 $h_{D_{AG}}(t)$ を求めてみましょう。そのため、先に現れた N 色カタラン数も一般のグラフ G に対して、一般化する必要があるのです。

そこで頂点 $v \in V$ に対して、射影 $P_v = \sum_{\substack{f \in F \\ \text{start} = v}} S_f S_f^*$ とおきます。すると



$$P_v P_u = 0 \quad (v \neq u)$$

$$S_e^* S_f = \begin{cases} P_{\kappa(e)} & (e=f) \\ 0 & (e \neq f) \end{cases} \quad \text{, } \kappa(e) \text{ は } e \text{ の終点.}$$

を満たす。辺集合 E 上 $E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$ とすると,

$$\Sigma_G = \{S_{e_1}^*, \dots, S_{e_{|E|}}^*, S_{e_1}, \dots, S_{e_{|E|}}\}$$

と記します。ここで

$Cunt$ 環 $\mathcal{O}_{|E|}$ を用意し, その等距離生成元達を $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{|E|}$

と書き, 対応 $\bar{\Phi}_G : \Sigma_G \rightarrow \Sigma_{|E|} = \{\Lambda_i^*, \Lambda_i \mid i=1, \dots, |E|\}$

を $\bar{\Phi}_G(S_{e_i}^*) = \Lambda_i^*, \quad \bar{\Phi}_G(S_{e_i}) = \Lambda_i, \quad i=1, \dots, |E|$

と定義します。

定義 (G -Catalan words, G -Catalan 数)

$$B_n^G = \left\{ (X_1, \dots, X_{2n}) \mid \begin{array}{l} X_i \in \Sigma_G, i=1, \dots, 2n; \\ X_1 \cdots X_{2n} \neq 0 \text{ in } \mathcal{O}_{AG}; \\ \bar{\Phi}_G(X_1) \cdots \bar{\Phi}_G(X_{2n}) = 1 \text{ in } \mathcal{O}_N \end{array} \right\}$$

を G -Catalan words と呼び,

$$C_0^G \equiv \# V (=N)$$

$$C_n^G \equiv \# B_n^G, \quad n=1, 2, \dots$$

を G -Catalan 数 と定義します。

例えば,

$$(S_{e_2}^*, S_{e_1}^*, S_{e_1}, S_{e_2}) \text{ は } \kappa(e_1)=s(e_2) \text{ とあれば}$$

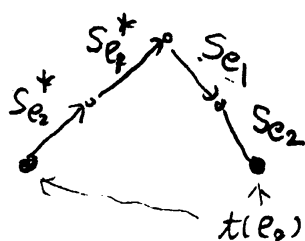
G -catalan word として、積を計算する

$$S_{e_2}^* S_{e_1}^* S_{e_1} S_{e_2} = S_{e_2}^* \left(\sum_{f \in E} A^G(e_1, f) S_f S_f^* \right) S_{e_2}$$

$$= \sum_{f \in E} A^G(e_1, f) S_{e_2}^* S_f S_f^* S_{e_2}$$

$$= A^G(e_1, e_2) S_{e_2}^* S_{e_2} = S_{e_2}^* S_{e_2}$$

$$= P_{t(e_2)}$$



と山の登り口 (= 下り口) の頂点への射影になります。

これはどんな G -Catalan word に対しても正しく、
勝ちな $X = (X_1, \dots, X_{2n}) \in B_n^G$ に対して、唯一頂点

$v(X) \in V$ が存在して (登り口 (= 下り口) の頂点),

$$X_1 X_2 \cdots X_{2n} = P_{v(X)} \quad \text{in } \mathcal{O}_{AG}$$

と示すことが、簡単にわかります。次の補題も分かります

補題 勝ちな $X = (X_1, \dots, X_{2n+2}) \in B_{n+1}^G$ に対して、
次のように一意的に分解できる。

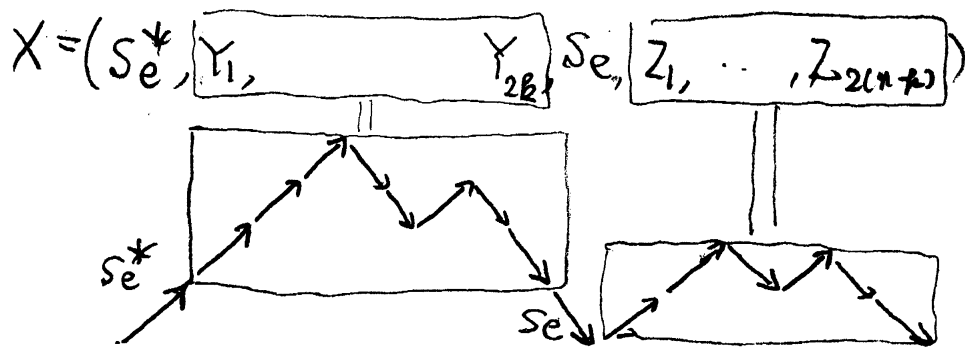
$$X = (S_{e_1}^*, Y_1, \dots, Y_{2k}, S_{e_1}, Z_1, \dots, Z_{2(n-k)}),$$

$$\text{但し } (Y_1, \dots, Y_{2k}) \in B_k^G,$$

$$(Z_1, \dots, Z_{2(n-k)}) \in B_{n-k}^G$$

とする。

これは次のような絵を書けば一発で分るでしょう。



頂点 $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ とします。 $i=1, \dots, N$ に対して

$$B_n^G(i) = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \in B_n^G \mid x_1 \dots x_{2n} = P_{v_i}\}$$

$$C_0^G(i) = 1$$

$$C_n^G(i) = \# B_n^G(i)$$

と定義します。これは頂点 v_i の根をもつ G -Catalan数です。グラフ G の頂点の隣接行列を A_G とします

$$A_G(i, j) = \#\{e \in E \mid v_i \xrightarrow{e} v_j\}$$

$$i, j = 1, \dots, N.$$

先の補題から、次の命題が瞬間芸でわかりましたね。

命題

$$(1) \quad C_n^G = \sum_{i=1}^N C_n^G(i)$$

$$(2) \quad C_{n+1}^G(i) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^N C_k^G(j) A_G(j, i) C_{n-k}^G(i)$$

ここで、この頂点 v_i の根、をもつ Catalan 数 $C_n^G(i)$ を求めるため、組み合わせ論では常套手段となっている母関数も考えましょう。

$$f_i^G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^G(i) x^n, \quad i=1, \dots, N$$

$$f^G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^G x^n \quad \text{と表します。}$$

このとき、次の定理は先の隣接基命題の言い換えです。
_{の前半}

定理

$$(1) \quad f^G(x) = \sum_{i=1}^N f_i^G(x)$$

(2) 関数連 $f_1^G(x), \dots, f_N^G(x)$ は次の式 (*)

$$(*) \quad f_i^G(x) = 1 + x \sum_{j=1}^N f_j^G(x) A_G(j, i) f_i^G(x), \quad i=1, \dots, N$$

を満たし、原点の近傍で、この関係式 (*) が成り立ち、一意的に決まる。またこの関数連 $f_i^G(x), i=1, \dots, N$ は原点の近傍で何回でも微分可能である。

言明_{の後半}には、微積分の授業で両陰関数定理を使います。ホウは生まれて初めて、陰関数定理を自分の研究で使いました。まさか Cantz-Knayer 環の研究で陰関数定理を使うとは夢にも思いませんでした(びくくり)。

次の母関数 $f_i^G(x)$ の収束半径を調べたいと思います。
 R_i^G を $f_i^G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^G(i) x^n$ の収束半径とします。
 ガウス系 $\mathcal{G}$ の Zeta 関数の一般論は $R_i^G > 0$ は分かっています。さらに次からすぐわかります。

$$1^\circ, R_i^G \geq \frac{1}{4 \|A_G\|_1}, \quad i=1, \dots, N$$

$$2^\circ, R_i^G = R_j^G \quad \forall i, j=1, \dots, N, \quad \text{ただし } G \text{ は既約です.}$$

$$\text{ここで } \|A_G\|_1 = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N A_G(j, i) \text{ です.}$$

実際, 1° については先の命題(2)の関係式から,

$$C_n^G(i) \leq (\|A_G\|_1)^n C_n \quad \text{がわかるので,}$$

$4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}$ より, わかります。 2° についても,

$$C_{n+1}^G(i) \geq C_n^G(j) A_G(j, i) C_0^G(i) \quad \text{であり}$$

$$A_G(j, i) > 0 \quad \text{であれば } C_{n+1}^G(i) \geq C_n^G(j)$$

を得て, 証明されます。

既約なグラフ G については, 2° から $f^G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^G x^n$ の収束半径は, 共通の R_i^G になります。この値を R_G とおきます。 N 個の実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ に対して, 新しい $N \times N$ 行列 $\alpha A_G \alpha$ を $(\alpha A_G \alpha)(i, j) = \alpha_i A_G(i, j) \alpha_j$ と定義します。これを微積分の授業で習う条件付極値問題の解法を用いるといふより, 次から証明できます (私は, 微積分は Cuntz-Krieger 環に有用だ! と言った)。

命題 実数 λ_0 が収束半径 R_G であるならば, N 個の正の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ が存在して, 次の2つの等式を満たす。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \det(\lambda A_G \lambda - \lambda_0) = 0 \\ \text{(ii)} & \lambda_0 = \lambda_i - \sum_{j=1}^N \lambda_j A_G(j, i) \lambda_j \end{cases}$$

$\forall i=1, \dots, N$

つまり, λ_0 は行列 $\lambda A_G \lambda$ の固有値として (ii) で実現されるということである。また, 特異, 固有値 λ_0 に対する固有ベクトル $[S_i]_{i=1}^N$ で $\sum_{i=1}^N S_i = 1$ となるものが存在して,

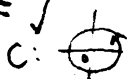
$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i S_i \quad \text{となります。}$$

従って 収束半径は 行列 $\lambda A_G \lambda$ の固有値として, 代数的に求めることが可能です。

次に, 母関数達 $f_i^G(x)$ から G -catalan数達 $C_n^G(i)$ を求める方法も考えてみましょう。もし $f_i^G(x)$ が具体的にわかるとすると, そのテイラー展開の係数である $C_n^G(i)$ 達は, 以下のような formula

$$C_n^G(i) = \frac{1}{n!} \frac{d^n f_i^G(x)}{dx^n} (0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f_i^G(z)}{z^{n+1}} dz$$

原点回
左回
一周



で求めることができます。しかし, 一般には, 具体的な行列 A_G から, 関係式 (*) (2.10-ii) 前の定理) を満たす関数達 $f_i^G(x)$ を求めるのは非常に難しく,

この formula を使って $C_n^G(i)$ を求めることは、現実的ではないにやがわかります。そこで係数 $C_n^G(i)$ を求めるために、まず関数 $f_i^G(z)$ を求めるという発想を改めて、関係式 (*) から $C_n^G(i)$ を求めるという戦法に変えます。

$$F_i(w_1, \dots, w_N) = \sum_{j=1}^N (w_j + 1) A_G(j, i) (w_N + 1)$$

$$w_i(z) = f_i^G(z) - 1, \quad i = 1, \dots, N$$

とおきます。関係式 (*) から

$$\frac{1}{z} = \frac{F_i(w_1, \dots, w_N)}{w_j(z)} \quad \text{より} \quad f_i^G(z)' = w_i'(z)$$

です。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w_i(z)}{z} = F_i(w_1(0), \dots, w_N(0)) = \sum_{j=1}^N A_G(j, i) > 0$$

よって、 $w_i(z)$ の原点の周りの回転数は 1 です。

よって

$$\begin{aligned} C_n^G(i) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}n} \int_C \frac{f_i^G(z)'}{z^n} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}n} \int_C \frac{F_i(w_1, \dots, w_N)^n}{w_j(z)^n} \times w_i'(z) dz \end{aligned}$$

となります。結局積分式

$$\boxed{\text{命題}} \quad C_n^G(i) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}n} \int_C \frac{F_i(w_1, \dots, w_N)^n}{(w_j)^n} dw_i$$

$i, j = 1, \dots, N$

が成り立ちます。右辺は i, j は i, j 無関係です。

④ 具体例.

1° G_1 :  N -loops とする。 $A_G = [N]$ とする。

$$f^{G_1}(x) = f_1^{G_1}(x),$$

$$f_1^{G_1}(x) = 1 + x N f_1^G(x)^2 \quad \text{より}$$

$$f^{G_1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4Nx}}{2xN}$$

∴ 分子の $\sqrt{\quad}$ の前の符号は $\lim_{x \rightarrow 0} f^G(x) = C_0^G = 1$ より
 マイナスです。 $\sqrt{\quad}$ の中は必ず負なので、 $R_G = \frac{1}{4N}$
 はすぐにわかりますが、2ホーシ前の方法によっても R_G は
 次のように求められます。連立方程式

$$\begin{cases} tNt - x_0 = 0 \\ x_0 = t - tNt \end{cases}$$

よって $t = \frac{1}{2N}$, $x_0 = \frac{1}{4N}$ であるから半径です。

$F(w) = N \cdot (w+1)^2$ なので、 C_n^G も先の積分公式より

$$\begin{aligned} C_n^G &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}n} \int_C \frac{F(w)^n}{w^n} dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}n} \int_C \frac{N^n (w+1)^{2n}}{w^n} dw \\ &= \frac{N^n}{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} w^{k-n} dw \\ &= \frac{N^n}{n} \binom{2n}{n-1} = N^n \times C_n, \end{aligned}$$

となり N は Catalan 数 が得られます。

$2^\circ G_2$:  $\therefore A_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

簡単のため $f_i^{G_2}(x)$ を $f_i(x)$ とおき、関係式(*)は

$$\textcircled{1} \quad f_1(x) = 1 + x(f_1(x) + f_2(x)) \cdot f_1(x)$$

$$\textcircled{2} \quad f_2(x) = 1 + x f_1(x) \cdot f_2(x)$$

この連立方程式を解くと ② になります。すなわち、 $f_2(x)$ は

次の3次方程式 $x(f_2(x))^3 - f_2(x) - 1 = 0$ の解となり

$f_1(x) = f_2(x)^2$ となりこれをかきつまずいて、求めることができます。4又束半径 R_{G_2} は 次の連立方程式の解 x_0 。

$$\textcircled{A} \quad \det \left(\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 t_2 \\ t_2 t_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\textcircled{B} \quad x_0 = t_1 - (t_1 + t_2)t_1$$

$$\textcircled{C} \quad x_0 = t_2 - t_1 t_2$$

である、これを解くと $x_0 = \frac{4}{27}$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{9}$

となります。 G_2 -Catalan 数 $C_n^{G_2} = C_n^{G_2}(1) + C_n^{G_2}(2)$ の計算は 先の積分公式を用い、次のようになります。

$$F_1(W_1, W_2) = \{(W_2 + 1) + (W_1 + 1)\}(W_1 + 1)$$

$$F_2(W_1, W_2) = (W_1 + 1)(W_2 + 1) = (W_2 + 1)^3$$

$$\therefore F_2(W_1, W_2)^n = (W_2 + 1)^{3n},$$

$$W_1'(x) = \{(W_2 + 1)^2\}' = 2(W_2 + 1)W_2'(x) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}
C_n^{G_2}(1) &= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{F_2(W_1(z), W_2(z))^n}{W_2(z)^n} W_1'(z) dz \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{(W_2(z)+1)^{3n}}{W_2(z)^n} 2(W_2(z)+1) W_2'(z) dz \\
&= \frac{2}{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{(W_2+1)^{3n+1}}{W_2^n} dW_2 \\
&= \frac{2}{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \sum_{k=0}^{3n+1} \binom{3n+1}{k} W_2^{k-n} dW_2 \\
&= \frac{2}{n} \binom{3n+1}{n-1}
\end{aligned}$$

同様の計算で

$$C_n^{G_2}(2) = \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1} \text{ かわかります。}$$

よって G_2 -Catalan 数 $C_n^{G_2} = C_n^{G_2}(1) + C_n^{G_2}(2)$ は

$$C_n^{G_2} = \frac{2}{n} \binom{3n+1}{n-1} + \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1}$$

$$C_n^{G_2} = \frac{2}{n+1} \binom{3n}{n}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

最初の方は

$$\begin{array}{ccccc}
2, & 3, & 10, & 42, & 198, \dots \\
C_0^{G_2} & C_1^{G_2} & C_2^{G_2} & C_3^{G_2} & C_4^{G_2}
\end{array}$$

となります。これを Catalan 数の Fibonacci 版と呼んでも良いでしょう。ここで $f_1(x) = f_2(x)^2$ となるので、

$$C_n^{G_3}(1) = \sum_{k=0}^n C_k^{G_3}(2) C_{n-k}^{G_3}(2)$$

という関係がわかります。よって

$$\frac{2}{n} \binom{3n+1}{n-1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \binom{3k}{k-1} \frac{1}{n-k} \binom{3n-3k}{n-k-1}$$

という恒等式が成り立ちます。

5 マルコフタイルシフトの Zeta 関数

③ で定義したマルコフタイルシフト D_{A_G} を簡単に D_G と表す。

このサブシフトのアルファベット Σ_G は, Cantz-Krieger 環 $\mathcal{O}_{A_G}$ の生成元 S_e , ($e \in E$) を使って $\Sigma_G = \{S_e^*, S_e \mid e \in E\}$ と表す。これから求めるこの Zeta 関数 $Z_{D_G}(t)$ を表す。

$N = \#V$: 頂点の個数 とし, G -Catalan 数 C_n^G の母関数達 $f_1^G(x), \dots, f_N^G(x)$ に対して, それを対角に並べた行列値関数 $F^G(t)$ を

$$F^G(t) = \begin{bmatrix} f_1^G(t^2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_N^G(t^2) \end{bmatrix} \quad \text{と定義します。}$$

このとき

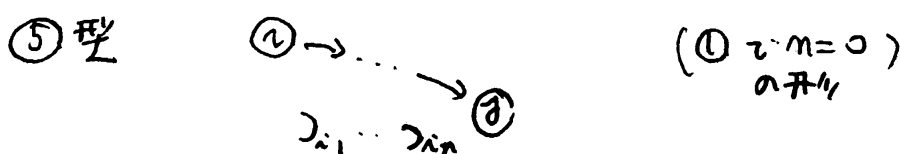
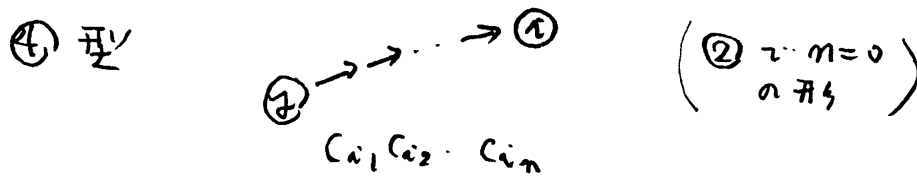
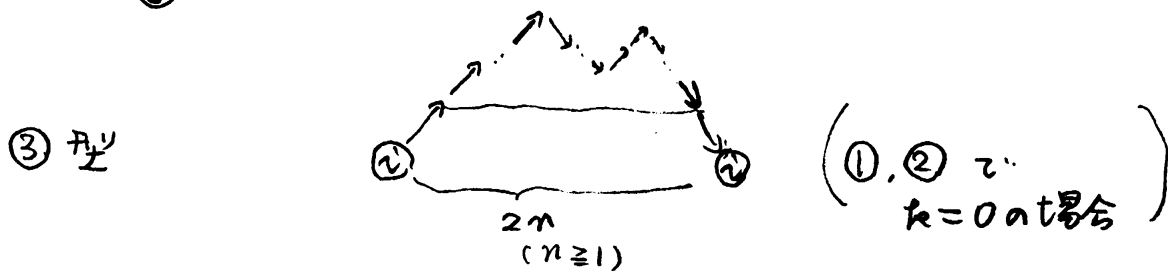
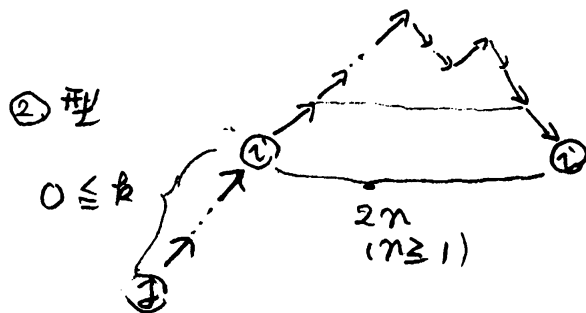
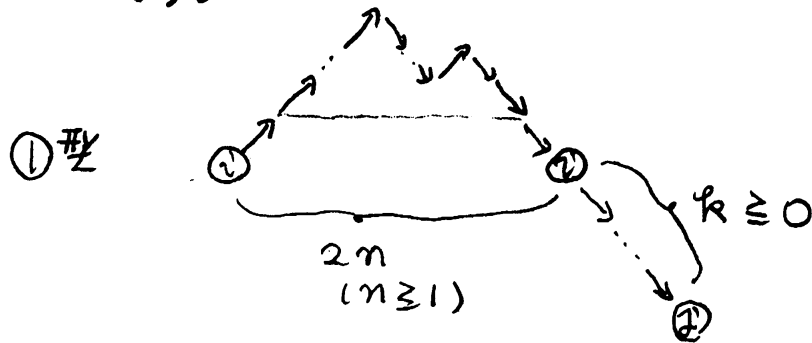
定理 (Krieger-松本)

$$Z_{D_G}(t) = \frac{1}{\det((F^G(t)^{-1} - tA_G)(1 - tF^G(t)A_G))}$$

$$\left(= \frac{\det(F^G(t))}{\det((L - tF^G(t)A_G)^2)} \right)$$

以下の証明の考え方を書きます。

タリクシフトの周期点とは、周期を構成するブロックよりなり
 ますので、その周期ブロックに着目することにより、5種類
 に分けます。



タリク
 シフト
 の部分

③型は、①、②型の特別な場合になり、それ以外のそれ
これらの型はみな互いに disjoint なので、

$$\{D_G \text{ の周期点} \} = \{(\textcircled{1} \cup \textcircled{2}) \setminus \textcircled{3}\} \cup (\textcircled{4} \cup \textcircled{5})$$

となります。また、力学系のゼータ関数の定義より

$$\text{「周期点の和} = \text{Z の積} \text{」}$$

(U 合併)

になります。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad Z_{X \cup Y}(t) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X \cup Y)}{n} t^n \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X) + P_n(Y)}{n} t^n \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X)}{n} t^n \right) \times \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(Y)}{n} t^n \right) \\ &= Z_X(t) \times Z_Y(t) \end{aligned}$$

よって

$$Z_{D_G} = \frac{Z_{\textcircled{1}} \times Z_{\textcircled{2}}}{Z_{\textcircled{3}}} \times Z_{\textcircled{4}} \times Z_{\textcircled{5}}$$

ここで、④、⑤の部分の Zeta 関数はコルコフシフの部分
なので

$$Z_{\textcircled{4}}(t) = \frac{1}{\det(1 - t A_G^t)}$$

A_G の transpose

$$Z_{\textcircled{5}}(t) = \frac{1}{\det(1 - t A_G)}$$

です。
($\therefore Z_{\textcircled{4}} = Z_{\textcircled{5}}$)

補題 (i) $z_{\textcircled{3}}(t) = \prod_{i=1}^N f_i^G(t^2)$

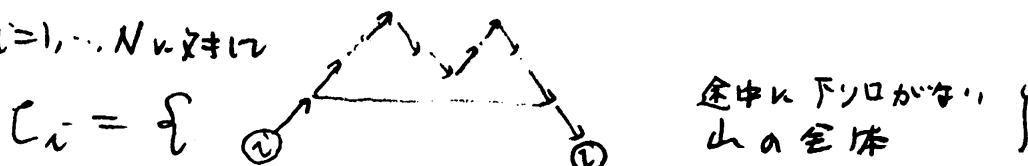
(ii) $z_{\textcircled{1}}(t) = z_{\textcircled{2}}(t) = \frac{1}{\det(I - D^G(t)(1-tA_G)^{-1})}$

但し

$$D^G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_N(t) \end{bmatrix}, \quad g_i(t) = 1 - \frac{1}{f_i^G(t^2)}$$

(証明の概略)

(i) $i=1, \dots, N$ に対し



とあると、これは circular code と呼ばれるものになります。circular code とは C_i の元の自由連接からなる両側無限列 C_i^∞ の周期的なものは、一意的に C_i の元達に分解できる words の集を言います。 C_i の元の自由連接からなる単語全体を C_i^* で表わすと、 $C_i^* = \bigcup_n B_n^G(i)$ となります。 $\textcircled{3}$ 型の中で、根、(登り)の頂点が i のものを $\textcircled{3}_i$ で表わすと、その zeta 関数 $z_{\textcircled{3}_i}(t)$ は、従って、 $z_{C_i^\infty}(t)$ です。一般に circular code C に対しては、その自由連接からなる両側無限列 C^∞ の zeta 関数 $z_{C^\infty}(t)$ と自由連接でできる有限単語全体 C^* の田関数

$g_C^*(t)$ は一致するので、

$$Z_{\textcircled{3}i}(t) = Z_{C_i^\infty}(t) = g_{C_i^*}^*(t)$$

となります。

$$\text{---} \quad g_{C_i^*}^*(t) = g_{\bigcup_n B_n^*(i)}(t) = f_i^G(t^2)$$

なので、

$$Z_{\textcircled{3}i}(t) = f_i^G(t^2) \quad \text{かつ}$$

$$Z_{\textcircled{3}}(t) = \prod_{i=1}^N Z_{\textcircled{3}i}(t) = \prod_{i=1}^N f_i^G(t^2) \quad \text{かつ、}$$

(ii)

冒頭の③の preprint で、Markov 性をもった Circular Code とは Circular Markov Code という概念を導入し、Circular Code に対応する Zeta 関数の公式 $Z_{C^\infty}(t) = \frac{1}{1-g_C(t)}$ と Markov シフトに対応する Zeta 関数の公式 $Z_{X_A}(t) = \frac{1}{\det(1-tA)}$ を統合しました。①型、②型はその Circular Markov Code という概念にあてはまり、その統合された公式からこの (ii) の公式が導かれます。詳細は preprint ③か、G. Keller の先の論文も見たいと思います。すいません。この補題により、定理が証明されることになります。

□

記号力学系の重要な位相不変量に、位相エントロピーがあります。位相エントロピー $h_{\text{top}}(\Lambda)$ はサブシフト Λ に対して、現れる長さ n の単語の指数的増大度を計る量で

$$h_{\text{top}}(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^{\#} B_n(\Lambda)$$

で定義されます。ここで $^{\#}B_n(\Lambda)$ は Λ に現れる長さ n の単語全体の個数です。 Λ の n -周期点の個数を $P_n(\Lambda)$ とすると、もちろん $P_n(\Lambda) \leq ^{\#}B_n(\Lambda)$ ですが、マシコフタタクシフト D_G の場合は次が成り立ちます。

命題 $h_{\text{top}}(D_G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(D_G)$

これにより、先の定理の系として

系 $h_{\text{top}}(D_G) = \overset{\text{方程式}}{\log} \det(1 - \tau F^G(\tau) A_G) = 0$ の最小な正の実解の $\log$

かめかかります。

最後に例の計算をします。グラフ G として、矢のグラフ

G_2  を考えます。 $A_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ です。

$$f_n^{G_2}(x) = f_n(x), \quad n=1, 2 \text{ に対して}$$

$$\begin{cases} f_1(x^2) = f_2(x^2)^2 \\ f_2(x^2) = 1 + x^2 f_2(x^2)^3 \end{cases} \text{ であり、}$$

$$\xi(x) = x f_2(x^2) \text{ である}$$

$$\xi(t)^3 - \xi(t) + t = 0$$

この2式

$$\xi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{2} t \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

であり、Zeta 関数 $\zeta_{D_{G_2}}(t)$ は、この $\xi(t)$ を使って

$$\begin{aligned} \zeta_{D_{G_2}}(t) &= \frac{\xi(t)}{t(2\xi(t)^2 + \xi(t) - 1)^2} \\ &= \frac{\xi(t)}{t(\xi(t) + 1)\{-4t + \xi(t) + 1\}} \end{aligned}$$

位相エンタルピー $h_{\text{top}}(D_{G_2})$ は

$$h_{\text{top}}(D_{G_2}) = 3 \log 2 - \log 3 = \log \frac{8}{3} \quad \text{となります。}$$

よから

わかるように、具体的なグラフに対するマルコフシフトの計算は、 G_2 のような簡単なグラフでも、それほどきれいな形になりませんが、元々張って他のグラフに対しても、計算していると思っています。

この研究集会をお世話になった山ノ内さんにたいへん感謝しています。