

多重パイこね変換における非平衡状態と フラクタル測度

基礎化学研究所 田崎 秀一

Brussels 自由大 Pierre Gaspard

§1. 序

マクロなレベルでは輸送現象は現象論的法則によって記述される。特に（線形）拡散では粒子流（ J ）が密度勾配（ ∇C ）に比例するという Fick の法則が成り立つ。

$$J = -D\nabla C. \quad (1.1)$$

ここで D は拡散係数である。この場合、周知のように、棒状の領域の両端で一定の密度差を保つという境界条件の下では一様な密度勾配を持つ状態が自発的かつ非可逆的に形成される。ミクロな力学法則に基づく現象論的法則の導出、輸送係数の計算に関しては、これまで活発に研究が行なわれ、久保らによる線形応答理論¹⁾など数多くの理論が提出されている。また適当なスケリング極限をとることにより直接ミクロな力学法則から輸送現象のマクロな側面を捉えようというアプローチもある²⁾。しかし、輸送現象に付随するミクロな状態に関してはあまり知られていない。

他方、拡散を示す純力学的カオスモデルは、近年いろいろと提案され、その性質が研究されている³⁻¹¹⁾。とりわけ、ベルヌーイ写像を空間的に拡張したモデル⁵⁻⁷⁾やパイこね変換を空間的に拡張した保存的なモデル⁹⁻¹¹⁾では、平衡への接近を特徴付ける減衰モードおよび減衰率が密度分布関数の時間発展演算子（Frobenius-Perron 演算子）の一般化された固有関数および対応する固有値として計算されることが示されている。この固有値（の対数）は Pollicott-Ruelle の共鳴^{12,13)}に相当している。非可逆性と分布関数の時間発展演算子の間にあるこのような関係の存在とその一般性は、Prigogine ら¹⁴⁻¹⁸⁾によって主張されている。その理論では、（通常は現象論的方程式やマスター方程式を通して得られる）熱平衡への接近を特徴付ける減衰率・減衰モードが、分布関数の時間発展演算子（Liouville-von Neumann 演算子）の一般化された固有値・固有関数として計算される。

ここでは、多重パイこね変換という保存的な決定論的拡散モデルにおいて、非平衡定常状態を厳密に構成し、そこでフラクタル的な特異測度が重要な役割を演じていることを示す。2 節でモデルを説明し、3 節で累積分布関数の発展方程式を導く。4 節では累積分布関数の発展方程式の定常解として非平衡状態を構成し、付随する流れの性質を論じる。5 節では、両端の密度差が一定に保たれるようにした有限長の多重パイこね変換の時間発展を調べ、両端での分布が一様 Lebesgue 測度の場合、定勾配を持ち Fick の法則に従う状態が自発的に生成されることを示す。詳細は文献 31-32 を参照されたい。

§2. 多重パイこね変換

一次元の酔歩では、一次元格子上を動く粒子が各時間ステップに一つの格子点から左右両隣の格子点にそれぞれ $1/2$ の遷移確率で移動する。格子点を単位正方形で、両隣への振り分けをパイこね変換に置き換えることにより、酔歩に類似した可逆な力学系が構成できる。これが、次のように定義される多重パイこね変換 B である。

$$B(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & 0 \leq x < 1/2 \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、整数 n は、単位正方形のラベルであり、実数の組 (x, y) ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) は、各単位正方形内での座標を表わす。図 1 に、写像 B を模式的に示す。容易にわかる様に、写像 B は、(Lebesgue 測度について) 保測かつ可逆で時間反転不変である。事実、変換

$$I(n, x, y) \equiv (n, 1-y, 1-x) \quad (2.2)$$

に対して

$$B^{-1} = IBI, \quad (2.3)$$

である。また、多重パイこね変換 B は、一様に双曲的であり、その最大 Lyapunov 指数は $\ln 2$ である。

§3. 測度の時間発展

統計力学の通常のアプローチでは、考えている系の状態は分布関数によって指定される。分布関数は Liouville 測度に関して絶対連続な測度を定め、逆にそのような測度は分布関数を定める。つまり、系の状態は、相空間上で定義された測度により表わされている。今、測度の時間発展を直接考えると、必ずしも Liouville 測度に関して絶対連続でない測度も含めることができ、より一般の場合も扱える。

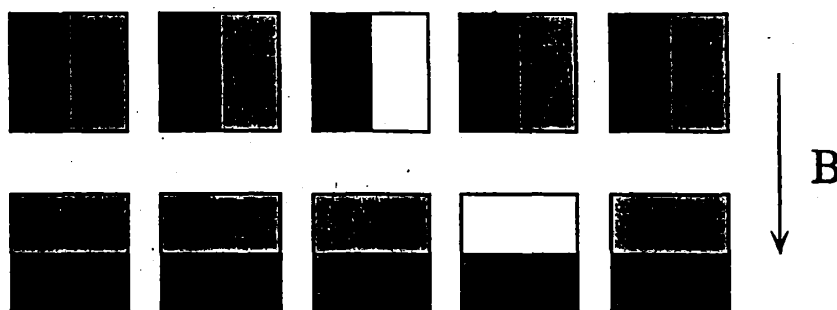


図 1: 多重パイこね変換 B

多重パイこね変換の場合にこれを実行しよう。一般性を損なうことなく測度 μ を Borel 測度に限ることができる。この時、任意の μ -可測集合は、次の様な半開矩形の可算個の和集合として表わされる。

$$\{[0, x) \times [0, y)\}_n, \quad (3.1)$$

ここで添字 n は、矩形 $[0, x) \times [0, y)$ が n 番目の単位正方形の部分集合であることを示す。従って、測度 μ は、累積分布関数 G :

$$G(n, x, y) \equiv \mu\left(\{[0, x) \times [0, y)\}_n\right), \quad (3.2)$$

により完全に指定される。測度 μ の時間発展方程式は、Liouville 方程式と同様に導出される。

$$\mu_{t+1}(A) = \mu_t(B^{-1}A), \quad (3.3)$$

ここで、 μ_t は時刻 t での測度を表し、 A は任意の可測集合である。矩形 $\{[0, x) \times [0, y)\}_n$ の逆像が

$$B^{-1}\{[0, x) \times [0, y)\}_n = \begin{cases} \{[0, \frac{x}{2}) \times [0, 2y)\}_{n+1}, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \{[0, \frac{x}{2}) \times [0, 1)\}_{n+1} \\ \cup \{[\frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}) \times [0, 2y-1)\}_{n-1}, & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

と与えられるので、累積分布関数 G の発展方程式は結局

$$G_{t+1}(n, x, y) = \begin{cases} G_t(n+1, \frac{x}{2}, 2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ G_t(n+1, \frac{x}{2}, 1) + G_t(n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1) \\ - G_t(n-1, \frac{1}{2}, 2y-1), & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

となる。ここで $G_t(n, x, y) \equiv \mu_t\left(\{[0, x) \times [0, y)\}_n\right)$ は時刻 t での測度の累積分布関数である。(3.5)式で $x=1, y=1$ と置くと

$$G_{t+1}(n, 1, 1) = \alpha_{n+1,t} G_t(n+1, 1, 1) + (1 - \alpha_{n-1,t}) G_t(n-1, 1, 1), \quad (3.6)$$

が得られる。ただし $\alpha_{n,t} \equiv G_t(n, 1/2, 1)/G_t(n, 1, 1)$ である。明らかに不等式 $0 \leq \alpha_{n,t} \leq 1$ が成立するので、(3.6)式は、時刻 t のサイト n から $(n-1)$ への遷移確率が $\alpha_{n,t}$ である様な酔歩を表わしている。 $\alpha_{n,t}$ は選んだ測度に依存して様々な値を取り得るが、これは多重パイこね変換という力学系が無数の確率過程(酔歩)を含んでいることを意味している。

§4. 非平衡一様定常状態：流れの性質とフラクタル性

前節では、均一な分布状態への緩和を論じたが、この節では、(3.5) 式の一様定常解を構成しその状態における「流れ」を調べ、厳密に Fick の法則に従う状態が可能であることを示す。

4-1. 一様定常状態の構成

一様定常状態は a) (3.5) 式の定常解で、b) 前節で定義した $\alpha_n \equiv G(n, 1/2, 1)/G(n, 1, 1)$ がサイト座標 n によらないものとして特徴付けられる。さて、多重パイコね変換は、 x 方向を x 方向に、 y 方向を y 方向に写すので、両方向は独立であると考えられ、積測度 (累積分布関数が x の関数と y の関数の積に書ける測度) で表される定常状態が存在することが示唆される。因に、一様 Lebesgue 測度は不変測度で、かつ積測度である。このとき累積分布関数は次の様に置ける。

$$G(n, x, y) = G(n, 1, y)F(n, x), \quad (4.1)$$

ただし、 $F(n, 1/2) = \alpha$ は n によらない。(4.1) を (3.5) に代入し F に関する条件を使うと次の方程式が得られる。

$$G(n, 1, y) = \begin{cases} \alpha G(n+1, 1, 2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ (1-\alpha)G(n-1, 1, 2y-1) + \alpha G(n+1, 1, 1), & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (4.2a)$$

$$F(n, x) = \begin{cases} \alpha F(n-1, 2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-\alpha)F(n+1, 2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (4.2b)$$

関数方程式 (4.2) は deRham の関数方程式^{19-21,7)}と同様の形をしている。(4.2a) は $G(n, 1, 1)$ が定まると、(4.2b) はそのまま唯一の解を持つ^{31,32)}。 $G(n, 1, 1)$ は (4.2a) で $y = 1$ と置いて得られる漸化式

$$G(n, 1, 1) = (1-\alpha)G(n-1, 1, 1) + \alpha G(n+1, 1, 1), \quad (4.3)$$

から境界条件を与えることにより定められる。(4.3) は右から左への遷移確率が α である酔歩の定常分布を定める式であり、前節と同様、異なるパラメータ α が異なる酔歩に対応していることが分かる。

因みに、方程式 (4.1-3) によって定められる測度 μ と多重パイコね変換 B の組は、Ornstein の意味²⁵⁾で確率的 Markov 鎖と同型である³²⁾。遷移確率 P_{ij} とそれから計算される KS エントロピー h_{KS} は次式で与えられる。

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha & i = j+1 \\ 1-\alpha, & i = j-1 \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$h_{KS} = -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) . \quad (4.5)$$

遷移確率 (4.4) が再び、右から左に確率 α で移動する酔歩のものと一致することを注意しておく。

さて方程式 (4.2) に戻ろう。(4.2b) の唯一の解は deRham の関数方程式 (4.1) の解 f_α に等しい。

$$F(n, x) = f_\alpha(x) . \quad (4.6)$$

$G(n, 1, y)$ については、 $G(n, 1, 1)$ の漸化式 (4.3) の解が

$$G(n, 1, 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{k-1} \{G(1, 1, 1) - G(0, 1, 1)\} + G(0, 1, 1) , \quad (4.7)$$

と与えられるので、二つの場合が区別される。

ア) $\alpha \neq 1/2$, $0 < \alpha < 1$ の場合

このとき、定数 A 、 A' を

$$A = \frac{\alpha}{1-2\alpha} \{G(1, 1, 1) - G(1, 1, 0)\} , \quad A' = \frac{(1-\alpha)G(0, 1, 1) - \alpha G(1, 1, 1)}{1-2\alpha} , \quad (4.8a)$$

と置くと、

$$G(n, 1, 1) = A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n + A' , \quad (4.8b)$$

である。 $G(n, 1, y)$ が $G(n, 1, 1)$ と同様の n 依存性を持つと仮定して (4.2a) を解くと次式が得られる。

$$G(n, x, y) = f_\alpha(x) G(n, 1, y) = f_\alpha(x) \left\{ A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n f_{1-\alpha}(y) + A' f_\alpha(y) \right\} . \quad (4.9)$$

図 2 (a),(b),(c) のそれぞれに (4.9) の n, x, y 依存性を示す。

イ) $\alpha = 1/2$ の場合

このとき、定数 B 、 B' を

$$B = G(1, 1, 1) - G(0, 1, 1) , \quad B' = G(0, 1, 1) , \quad (4.10a)$$

と置くと、

$$G(n, 1, 1) = nB + B' \quad (4.10b)$$

である。ア) の場合と同様にして

$$G(n, x, y) = xG(n, 1, y) = x[B\{ny + T(y)\} + B'y] . \quad (4.11)$$

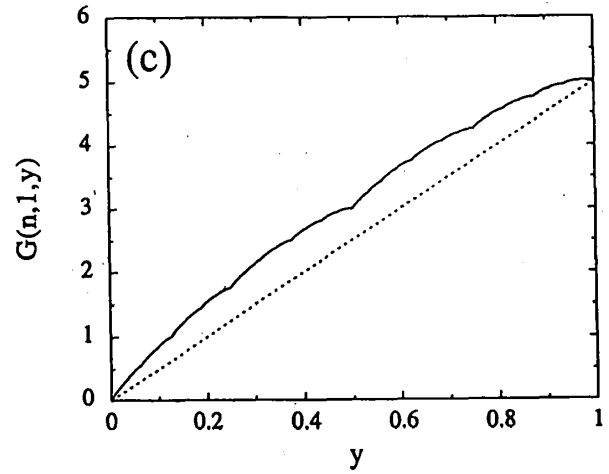
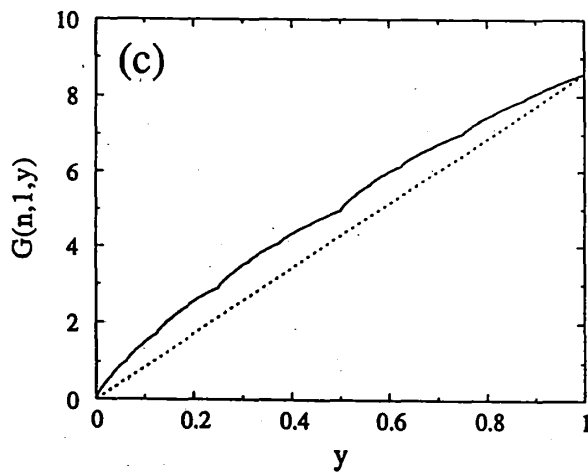
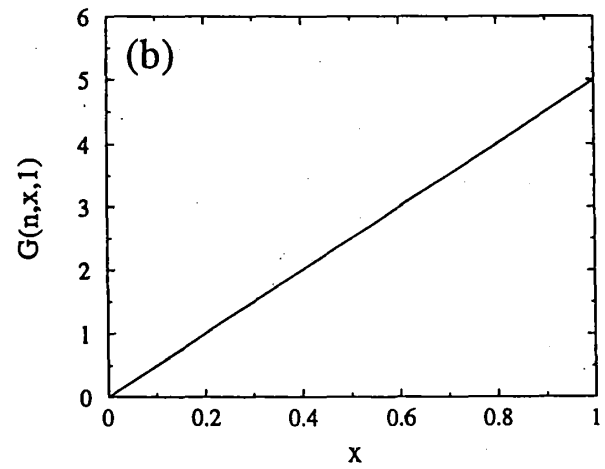
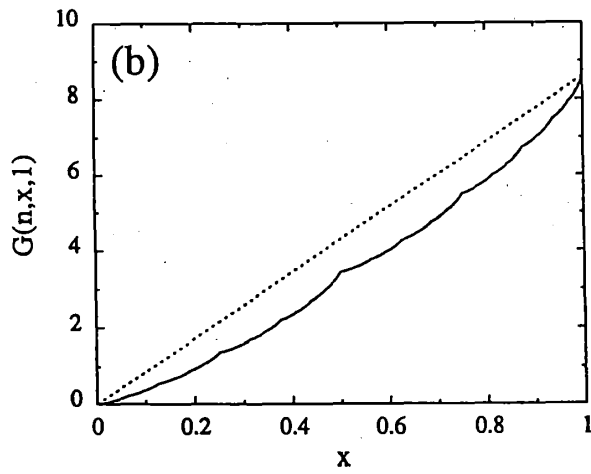
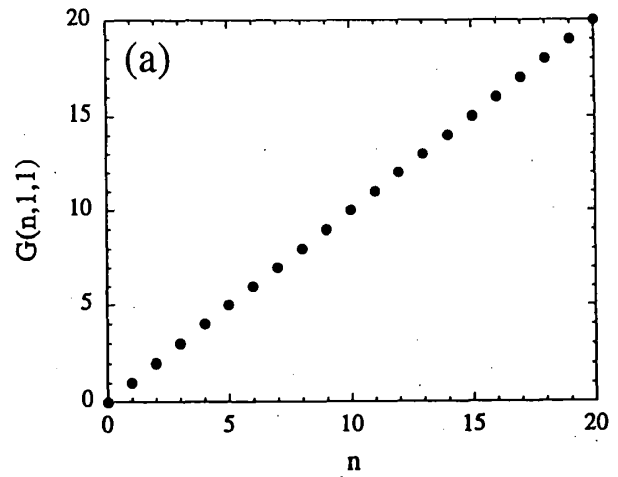
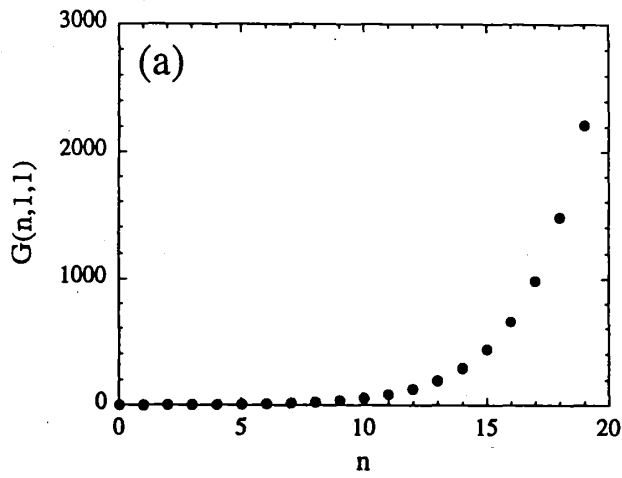


図 2 : 累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 2/5)$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

図 3 : 累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 1/2, \text{Fick 状態})$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

ここで、関数 $T(y)$ は次の方程式の一意解として定義される。

$$T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2y) + y, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}T(2y-1) + 1 - y, & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

(4.11) の n, x, y 依存性をそれぞれ図 3 (a),(b),(c) に示す。関数 $T(y)$ は、高木²⁶⁾により、連続でいたるところ有限な導関数を持たない関数の例として考えられ、高木関数と呼ばれる (図 4 参照)。高木関数とそれに関連した関数の諸性質は畑、山口^{20,21)}により詳しく調べられている。

ウ) 時間反転状態

2 節で示したように、多重パイコね変換 B は時間反転 I のもとで不変である。上述した状態にこの変換を適用したのもも定常状態である。 $\alpha \neq 1/2$ の場合、この操作によって新しい状態は作られない。しかし、 $\alpha = 1/2$ の場合には、次の状態が得られる。

$$\tilde{G}(n, x, y) \equiv \mu \left(I \{ [0, x] \times [0, y] \}_n \right) = y [B \{ nx - T(x) \} + B' x] . \quad (4.13)$$

以上の結果より、 $\alpha = 1/2$ かつ $B = 0$ の場合を除き、累積分布関数は、特異関数を含む。従って、対応する測度は、Lebesgue 測度に関して絶対連続ではない。つまり、これらの累積分布を通常の密度分布関数 $\rho_n(x, y)$ を用いて表わすことはできない：

$$G(n, x, y) \neq \int_0^x dx' \int_0^y dy' \rho_n(x', y') . \quad (4.14)$$

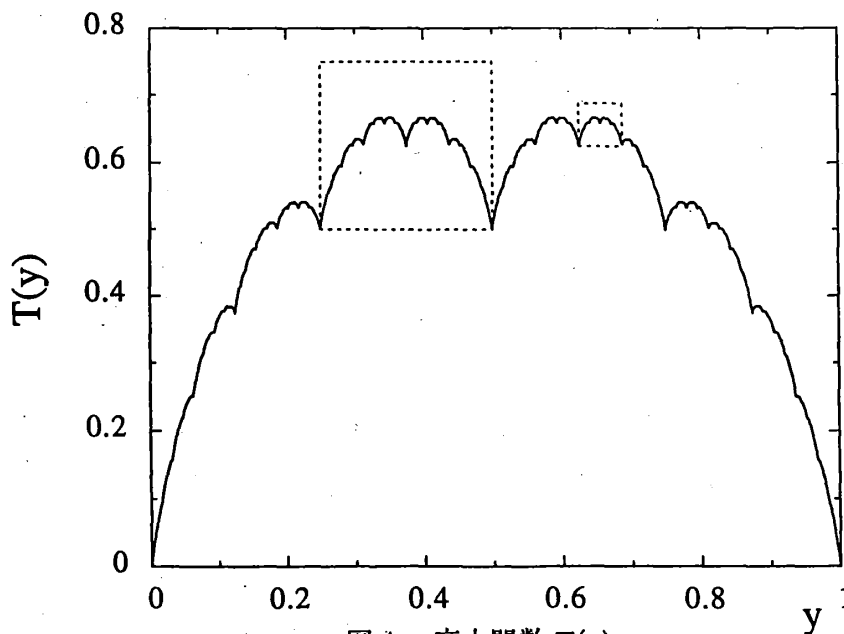


図 4 : 高木関数 $T(y)$

パラメーター α の任意性から、与えられた $G(n, 1, 1)$ に関する境界条件に対し、非可算無限個の定常状態、従って不変測度が存在することが解かる。しかし、すべての不変測度が物理的に実現可能ではない²⁷⁻²⁹⁾。この点に関しては次節で議論する。

4.2. 定常状態における流れとその性質

ここでは、一様定常状態における流れを調べる。 n 番目と $n+1$ 番目の正方形の境界を考える。図5に示す様に、一回の多重バイコね変換 B により、 n 番目の正方形の右半分が右に、 $n+1$ 番目の正方形の左半分が左に移される。従って、この境界を左から右へ横切る流れは、 n 番目のセル中の $[1/2, 1] \times [0, 1]$ という領域の測度と $n+1$ 番目のセル中の $[0, 1/2] \times [0, 1]$ という領域の測度の差である：

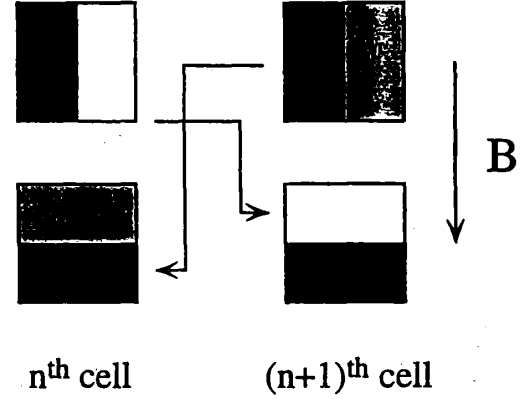


図5: n と $n+1$ 番目の境界を横切る流れ

$$\begin{aligned} J_{n|n+1} &= \mu\left(\left\{\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 1]\right\}_n\right) - \mu\left(\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1]\right\}_{n+1}\right) \\ &= G(n, 1, 1) - G(n, \frac{1}{2}, 1) - G(n+1, \frac{1}{2}, 1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

7) $\alpha \neq 1/2$, $0 < \alpha < 1$ の場合

このとき、(4.9) 式より

$$J_{n|n+1} = (1 - 2\alpha)A', \quad (4.16)$$

となる。つまり、この時はセル座標 n に依存しない部分から流れが生じる。これは次のように理解できる。まず流れの表式(4.15)を $G(n, \frac{1}{2}, 1)/G(n, 1, 1) = F(n, \frac{1}{2}) = \alpha$ を用いて書き換えると

$$J_{n|n+1} = (1 - 2\alpha) \frac{G(n+1, 1, 1) + G(n, 1, 1)}{2} - \frac{1}{2} \{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}, \quad (4.15')$$

となる。この第一項は各セルの右半分と左半分の重みが異なる(両者の比は $(1 - \alpha) : \alpha$)ことから生じる弾道型流れを表わし、第二項は拡散係数 $D = 1/2$ の拡散流を表わす。今の場合、セル座標 n に依存する部分から生じる両流れは互いに打ち消しあうのである。

1) $\alpha = 1/2$ の場合

このとき、(4.15')の第一項は存在せず

$$J_{n|n+1} = -\frac{B}{2} = -\frac{1}{2} \{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}, \quad (4.17)$$

となる。前の場合と異なり、流れはセル間の測度の差により引き起こされる。さらに、拡散係数 D が $1/2$ なので、これは Fick の法則を表わしている：

$$J_{n|n+1} = -D\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \quad (5.17')$$

Fick の法則は明らかに時間反転対称性を破っているが、時間反転対称な多重パイこね変換の定常状態としてこのような状態が得られることは興味深い。

ウ) 時間反転状態

(4.13) 式の状態は次の流れを持ち、予想される様に「反」Fick の法則に従う。

$$\begin{aligned} J_{n|n+1} &= \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\} \\ &= D\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

§5. 状態の選択：有限長多重パイこね変換

5-3.

パラメータ α に応じ異なる定常状態が得られ、それぞれ異なる輸送過程に対応していることを見てきた。どの状態が物理的に実現し得るかを吟味するには与えられた境界条件の下での系の時間発展を追跡すればよい。ここでは、図 6 に示す両端が自由運動に相等する写像に接続した有限長の多重パイこね変換のダイナミックスを考える。サイト座標が $1 \leq n \leq N-1$ の時は多重パイこね変換 (2.1) に従って変換され、サイト座標が $-1 \geq n$ または $N+2 \leq n$ の時は自由運動に相当する

$$B'(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, x, y), & 0 \leq x < 1/2 \\ (n+1, x, y), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

で変換され、 $n = -1, 0, N, N+1$ の所で全体が可逆な写像になるように接続されている。初

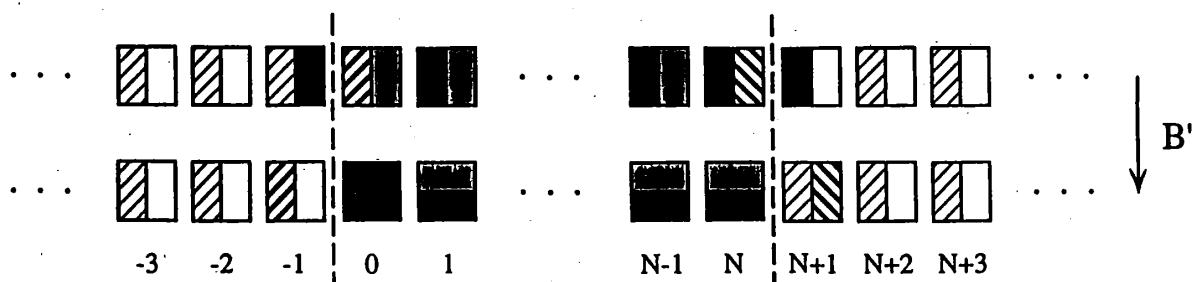


図 6：有限長の多重パイこね変換：破線の外は自由運動部 B'

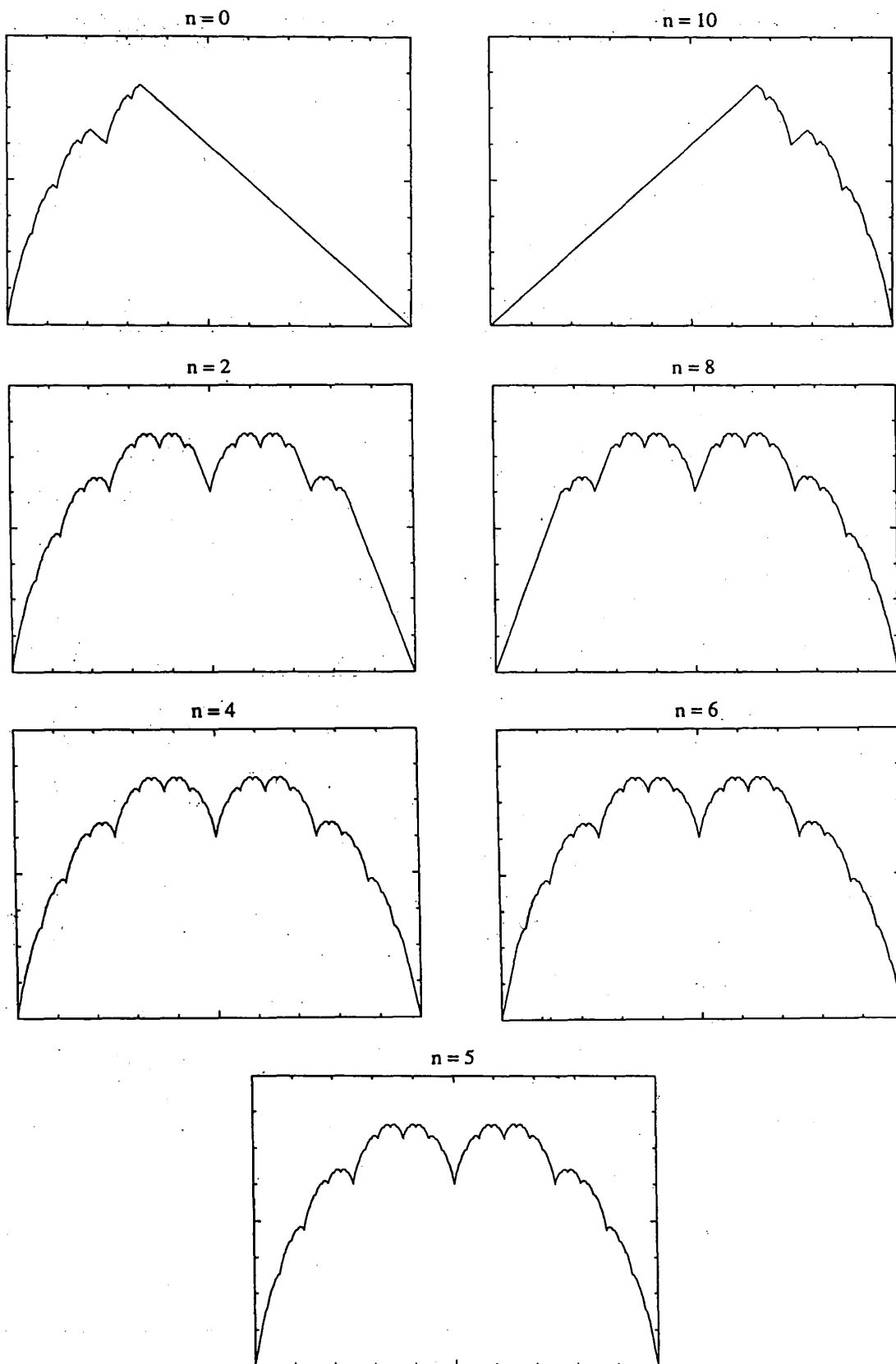


図 7 : 不完全高木関数 $T_n(y)$. 長さ $N+1=11$ の有限長多重パイこね変換の場合。
 $T_5(y)$ は高木関数 $T(y)$ とほぼ同一。

期条件としては、多重パイこね部には累積分布関数 $G_0(n, x, y)$ が伸びる方向 x について二回連続微分可能であるような測度を与え、自由運動部分には次のように一様 Lebesgue 測度を与える。

$$\begin{cases} G_0(n, x, y) = \rho_- xy, & n \leq -1 \\ G_0(n, x, y) = \rho_+ xy, & n \geq N+1 \end{cases} \quad (5.2)$$

ただし、多重パイこね部両端の密度差 $\rho_+ - \rho_-$ は零でないとする。この初期条件は、密度差を一定に保つという境界条件に相当している。

この初期条件下での時間発展は解析的に追跡することができる³²⁾。その結果次のようなステップで定勾配状態に漸近していくことが見い出された。

- i) 伸びる x 方向への分布の一様化。これは Lyapunov 数から決まる時間依存性 $(1/2)^t$ を持つ。
- ii) セル座標 n について一定の勾配を持つ分布への漸近。この変化は拡散に駆動され、対応して $\{\cos(\frac{\pi}{N+1})\}^t$ という時間依存性を持つ。
- iii) 縮む y 方向の分布の終状態への接近。これは x 方向への一様化と同様 $(1/2)^t$ の時間変化を持つ。

終状態は (4.11) に類似した形をとる：

$$G_\infty(n, x, y) = x \left\{ \frac{\rho_+ - \rho_-}{N+2} [(n+1)y + T_n(y)] + \rho_- y \right\}. \quad (5.3)$$

ここで関数 $T_n(y)$ は (4.11) の高木関数に相当し、図 7 のようになる。図より境界から十分離れたところでは高木関数に一致することが分かる。

この考察から Fick 状態が安定であることが示唆される。この安定性は次のようにも説明できる。まず Fick 状態が伸びる方向に一様であるのに対し他の定常状態は伸びる方向に特異的である。他方、多重パイこね変換による引き伸ばしのため分布は伸びる方向に沿って一様化される傾向がある。従って、伸びる方向に関して特異的な分布が終状態として実現するには伸びる方向に自己相似的な初期分布から出発しなければならない。このような分布は、準備をするのに fine tuning が必要であり、不安定であると考えられる。

ところで、KS エントロピーは Fick 状態、「反」Fick 状態の双方で最大値 $h_{KS} = \ln 2$ をとる ((4.5) 式参照)。つまり、KS エントロピーは Fick 状態と「反」Fick 状態を区別しない。これは一般論から結論することもできる。事実、Fick 状態 G と多重パイこね変換 B の組、 (G, B) は、「反」Fick 状態 $\bar{G}$ と逆変換 B^{-1} の組 $(\bar{G}, B^{-1})$ と、時間反転 I により同型であるから、両者は等しい KS エントロピーを持つ³⁰⁾。他方 $(\bar{G}, B^t)$ の KS エントロピーは $(\bar{G}, B)$ のそれの $|t|$ 倍であるから³⁰⁾、結局 (G, B) と $(\bar{G}, B)$ の KS エントロピーは一致するのである。

§6. 結語

多重パイこね変換において、特異測度を用いることにより空間的に一様な非平衡定常状態を厳密に構成した。各セルの右半分と左半分の重み（それぞれ $1 - \alpha$ 、 α ）が異なるか等しい

かに応じて、それぞれ指数的なセル座標依存性を持つ分布あるいは線形なセル座標依存性を持つ分布が定常分布として得られた。この状態は、右から左への遷移確率が α である酔歩の定常状態と正確に対応している。同様のふるまいは武末³³⁾によるセル・オートマトンにおける熱伝導においても見いだされている。この場合、指数型定常分布と線形定常分布がオートマトンのルールに応じて得られている。

4節で見たように不均一な定常状態を構成する際にフラクタルな特異関数が重要な役割を担っている。これは次のように理解できる。一つのセルに注目すると変換によって縮む方向に圧縮された両隣のセルの一部が流入するので、すべてのセル内の分布が同一でないかぎり、分布は縮む方向に細かく変動するようになる。つまり、均一なセル上分布を持たない非平衡定常状態では必ずセル内分布は特異的になるのである。さらに今考えている写像は一様 Lebesgue 測度に関してエルゴード的であり⁸⁾、Lebesgue 測度について絶対連続な測度から出発する限り Lebesgue 測度に漸近する。よって一様 Lebesgue 測度で表わせない定常状態に対応する測度は特異測度でなければならない。これらの考察から、一般にもカオスの保存系における非平衡状態の記述に特異関数が重要な役割を演じていると期待される。

謝辞

本研究への支援および有益なコメントを頂いた基礎化学研究所の福井謙一所長、龍谷大学の山口昌哉教授、Solvay 研究所 (Brussels) の Prof. I. Prigogine、Dr. I. Antoniou、Dr. Z. Suchanecki に感謝します。またこの研究は、文部省の科学研究補助金、国際学術研究、ベルギー国 National Fund for Scientific Research (F.N.R.S. Belgium)、Communauté Française (ARC contract No 93/98-166) から助成を受けています。

参考文献

- [1] e.g., M. Toda, R. Kubo and N. Saito, *Statistical Physics I*, Solid-State Sciences **30**, Springer, Berlin (1983);
R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, Solid-State Sciences **31**, Springer, Berlin (1985).
- [2] J. Lebowitz and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **19** 633 (1978);
H. Spohn, *Rev. Mod. Phys.* **53** 569 (1980);
L.A. Bunimovich and Y.G. Sinai, *Commun. Math. Phys.* **78** 479 (1980).
- [3] S. Grossman and H. Fujisaka, *Phys. Rev. A* **26** (1982) 1779.
- [4] S. Thomae, "Chaos-induced diffusion", in *Statics and Dynamics of Nonlinear Systems*, G. Benedek et al., Eds. (Springer, Berlin, 1983) 204.
- [5] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Lett. A* **168** (1992) 18.

- [6] P. Gaspard, *Phys. Lett.* **A168** (1992) 13.
- [7] S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, *Phys. Lett.* **A179** (1993) 97.
- [8] P. Gaspard, *J. Stat. Phys.* **68** (1992) 673.
- [9] P. Gaspard, *Chaos* **3** (1993) 427.
- [10] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Rev. E* **50** (1994) 1781.
- [11] S. Tasaki, A. Hakmi and I. Antoniou, to appear.
- [12] M. Pollicott, *Invent. Math.* **81** (1985) 413; *Invent. Math.* **85** (1986) 147.
- [13] D. Ruelle, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 405; *J. Stat. Phys.* **44** (1986) 281.
- [14] I. Prigogine, *Non-equilibrium statistical mechanics*, Wiley, New York, 1962.
- [15] I. Prigogine, C. George, F. Henin and L. Rosenfeld, *Chemica Scripta* **4** (1973) 5.
- [16] T. Petrosky and I. Prigogine, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **90** (1993) 9393.
- [17] I. Prigogine, *Vistas in Astronomy* **37** (1993) 7 および引用文献。
- [18] I. Prigogine, 「バリテイ」 **10** (1995) No.1 p.6; No.2 p.32 および引用文献。
- [19] G. de Rham, *Rend. Sem. Mat. Torino* **16** (1957) 101.
- [20] M. Hata and M. Yamaguti, *Japan J. Appl. Math.* **1** (1984) 183.
- [21] M. Hata, in *Patterns and Waves* eds. T. Nishida, M. Mimura and H. Fujii, Studies in mathematics and its Application, Kinokuniya & Northholland, 1986, p.259.
- [22] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [23] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York, 1965.
- [24] S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, *Chaos, Solitons and Fractals* **4** (1994) 227.
- [25] D. Ornstein, *Science* **243** (1989) 182.
- [26] T. Takagi, *Proc. of Physico-Mathematical Society of Japan, ser.II*, **1** (1903) 176.
- [27] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617.
- [28] Y. Oono and Y. Takahashi, *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980) 1804;
Y. Takahashi and Y. Oono, *Prog. Theor. Phys.* **71** (1984) 851.
- [29] S. Tasaki, Z. Suchanecki and I. Antoniou, *Phys. Lett.* **A179** (1993) 103.

- [30] Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1972.
- [31] S. Tasaki and P. Gaspard, *Towards the Harnessing of Chaos*, Ed. M. Yamaguti, Elsevier, Amsterdam, 1994, p.273.
- [32] S. Tasaki and P. Gaspard, "Fick's Law and Fractality of Nonequilibrium Stationary States in a Reversible Multibaker Map", 1995, submitted to *J. Stat. Phys.*.
- [33] S. Takesue, "Nonequilibrium Statistical Mechanics of Reversible Cellular Automata", Proc. of International Conference on Dynamical Systems and Chaos, ed. K. Shiraiwa et al., 23-27 May, 1994, Tokyo:
武末 真二、基礎物理学研究所研究会「多自由度の力学系と幾何学」報告、(小西哲郎、相沢洋二編、「物性研究」1995 年)。