

KM₂O-ランジュヴァン方程式の理論

北大 理 岡部 靖憲

(OKABE YASUNORI)

§1 目的

気象データ、工学データ、医学データ、経済データ等、時間の推移と共に変化する不規則な現象に関する有限個の観測データや実験データを統計的・数学的に分析することによって、その現象の構造を分析し、それに基づいてその将来を予測し、制御することは科学の重要な研究課題のひとつである。

私の研究の目的は、2つの不規則な現象に対して、どちらが原因で、どちらが結果であるかという、いわゆる「因果関係を切り出す方法を見つけ出すことである。

そのために、調べたい現象が局所定常性を持つかどうかのテストを求める。その際、確率モデルを天真的に用いるのではなく、局所定常性のみを含む確率時系列の数学的構造を調べあげる。2つの部分がKM₂O-ランジュヴァン方程式論の理論的側面である。実際のデータ解析に应用する際には、理論の限界を明確にする形で、データ解析に伴

う近似はなるべく精密にし、そのために近似の段階は少くするとは大事と思われる。

応用数学において、大事なことは、応用に因らる数学的理論が構築されたことと同時に、その研究の過程から数学的に新しい側面が見い出されたこととを思われる。このことは、統計物理学における「揺動散逸定理」の哲学的理解である。私の研究では、非線型予測問題の復活であり、因果関係が線型、2次、3次...と非線型性を高めることによりより正確に検証されたことは、非線型予測問題が良ハルゴリズムをもつて解かれることを意味する。これと可能にするのが、 KM_0 -ラレシエヴァレ方程式の理論である。

§2. 局所定常性

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上に $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $X = (X(n); n \leq N)$ が与えられ、その平均ベクトル関数は恒等的に0、共分散関数は R とする；

$$(2.1) \quad E(X(n)) = 0$$

$$(2.2) \quad R(n-m) = E(X(n)^t X(m))$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、block Toeplitz matrix $S_n \in M(nd; \mathbb{R})$ を

$$S_n = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(n-1) \\ {}^tR(1) & R(0) & \cdots & R(n-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ {}^tR(n-1) & {}^tR(n-2) & \cdots & {}^tR(1) & R(0) \end{pmatrix}$$

一定する。次の (C1), (C2) のいずれかが成り立つ。

$$(C1) \quad 1 \leq \forall n \leq N \quad S_n \in GL(2d; \mathbb{R})$$

$$(C2) \quad 1 \leq \exists \lambda_0 \leq N \text{ s.t. } \begin{cases} 1 \leq \forall n \leq \lambda_0 & S_n \in GL(2d; \mathbb{R}) \\ \lambda_0 + 1 \leq \forall n \leq N & S_n \in GL(2d; \mathbb{R}) \end{cases}$$

29 報告では (C1) が成り立つ場合を考える。そのとき、 X の時間発展を記述する確率差分方程式が次のように記述される:

述べる: KM20-ラレシエウアル方程式

$$\exists \text{ KM20-ラレシエウアルデーフ } (\delta_{\pm}^{\pm}(n, k), S_{\pm}^{\pm}(n), V_{\pm}^{\pm}(n); 0 \leq k < n \leq N)$$

$$\exists \text{ KM20-ラレシエウアルカ } V_{\pm}^{\pm} = (V_{\pm}^{\pm}(n); 0 \leq n \leq N) \text{ s.t.}$$

$$(2.3) \quad X(n) = - \sum_{k=1}^n \delta_{+}^{\pm}(n, k) X(k) - S_{+}^{\pm}(n) X(0) + V_{+}^{\pm}(n)$$

$$(2.4) \quad X(-n) = - \sum_{k=1}^n \delta_{-}^{\pm}(n, k) X(-k) - S_{-}^{\pm}(n) X(0) + V_{-}^{\pm}(n).$$

基本的性質

$$(2.5) \quad E(V_{\pm}^{\pm}(n) \mid V_{\pm}^{\pm}(n)) = S_{\pm}^{\pm}(n) V_{\pm}^{\pm}(n)$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} [X_j^{\pm}(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq n \leq n] = [V_{\pm}^{\pm}(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq n \leq n] \\ [X_j^{\pm}(-n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq n \leq n] = [V_{\pm}^{\pm}(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq n \leq n] \end{cases}$$

$$(2.7) \quad 1 \leq \forall k \leq n \leq N$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \delta_{\pm}^{\pm}(n, k) = \delta_{\pm}^{\pm}(n-1, k-1) + \delta_{\pm}^{\pm}(n) \delta_{\pm}^{\pm}(n-1, n-k-1) \\ (ii) & V_{\pm}^{\pm}(n) = (I - \delta_{\pm}^{\pm}(n) S_{\pm}^{\pm}(n)) V_{\pm}^{\pm}(n-1) \\ (iii) & S_{-}^{\pm}(n) V_{+}^{\pm}(n-1) = V_{-}^{\pm}(n-1) S_{+}^{\pm}(n) \\ (iv) & V_{\pm}^{\pm}(n) \in GL(d; \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

但し、 $\delta_{\pm}(\lambda, 0) = \delta_{\pm}(\lambda)$ とおす

$$(2.8) \quad \begin{cases} \delta_+(\lambda) = - \left(R(\lambda) + \sum_{k=0}^{\lambda-2} \delta_+(\lambda-k) R(k+1) \right) V_-(\lambda-1)^{-1} \\ \delta_-(\lambda) = - \left({}^t R(\lambda) + \sum_{k=0}^{\lambda-2} \delta_-(\lambda-k) R(k+1) \right) V_+(\lambda-1)^{-1} \end{cases}$$

注意 2.1 (2.7) (ii) より、

$$(2.9) \quad V_{\pm}(\lambda) = (I - \delta_{\pm}(\lambda) \delta_{\pm}(\lambda)) (I - \delta_{\pm}(\lambda-1) \delta_{\pm}(\lambda-1)) \cdots (I - \delta_{\pm}(1) \delta_{\pm}(1)) R(0)$$

これは、ラネシグレ方程式 (2.3) と (2.4) に基づいておいて、推動力 $V_{\pm}$ の大きさが散逸部分 (で決定する所) の $\delta_{\pm}(\cdot)$ と結びつくという意味で、推動散逸定理のひとりの表現である。

注意 2.2 逆に、(2.5), (2.7) を満足するデータ (おいて、

$\delta_{\pm}(\cdot), V_{\pm}(\cdot)$ と $V_{\pm}$ を与えれば、(2.3) で定まる確率過程 $X_t = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ は局所定常性をもつ (構成定理)

注意 2.3 1次元強定常過程 $Y = (Y(n); 1 \leq n \leq N)$ に対して、

$$X(n) = {}^t (Y(n), Y(n)^2, \dots, Y(n)^d)$$

として、 $\mathbb{R}^d$ 値局所定常過程 $X = (X(n); 1 \leq n \leq N)$ が得られ、これに対する KMO-ラネシグレ方程式 (2.3), (2.4) の第1成分をとりとれば、 Y に対する非線型ラネシグレ方程式が導かれる。係数関数のアルゴリズムは、 X のそれを通じて求まった。こゝで徹底すれば非線型平均値問題を解くことになる。

注意 2.4 1次元のとき、条件 (C.2) が成り立つ場合は、

n_0+1 以後のラゲルカが存在する。

§3. 大域的定常性

今度は §2 の $N=\infty$ の場合、即ち $\mathbb{R}^d$ 値弱定常過程 $X = (X(n); n \in \mathbb{Z})$ が与えられる。を考へる。

R のスペクトル測度は、スペクトル密度行列 $\Delta(\theta)$ と表す。

$$(C.3) \quad \log(\det \Delta(\theta)) \in L^1(-\pi, \pi)$$

が成り立つと仮定する。

2.9 と表す。

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\pm}^{\dagger}(n) \equiv V_{\pm}^{\dagger}(\infty) \in GL(d; \mathbb{R})$$

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\pm}^{\dagger}(n) = 0$$

$$(3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\pm}^{\dagger}(n, k) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\pm}^{\dagger}(n, n-k) \equiv \delta_{\pm}^{\dagger}(k) \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

が成り立つ。 $M = [X_j(n); 1 \leq j \leq d, n \in \mathbb{Z}]$ 上の unitary group $U = (U(n); n \in \mathbb{Z})$: $U(n)(X_j(n)) = X_j(n+n)$

を用いて、

$$(3.5) \quad \xi_{\pm}^{\dagger}(n) \equiv U(n, \infty) V_{\pm}^{\dagger}(n)$$

と定め、 $\mathbb{R}^d$ 値弱定常過程 $\xi_{\pm}^{\dagger} = (\xi_{\pm}^{\dagger}(n); n \in \mathbb{Z})$ を考へる。

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\pm}^{\dagger}(n) \equiv V_{\pm}^{\dagger}(\infty)^{\frac{1}{2}} \xi_{\pm}^{\dagger}(n)$$

$$(3.7) \quad \xi_{\pm}^{\dagger} \equiv (\xi_{\pm}^{\dagger}(n); n \in \mathbb{Z}) \text{ は 白色雑音 } i.e.$$

$$\begin{cases} E(\xi_{\pm}^{\dagger}(n)) = 0 \\ E(\xi_{\pm}^{\dagger}(n) \xi_{\pm}^{\dagger}(m)) = \delta_{nm} I \end{cases}$$

$$(3.8) \quad \begin{cases} [X_j(z); 1 \leq j \leq d, m \leq N] = [\xi_j^+(z); 1 \leq j \leq d, z \leq N] \quad (V_N) \\ [X_j(z); 1 \leq j \leq d, N \leq z] = [\xi_j^-(z); 1 \leq j \leq d, z \geq N] \quad (V_N) \end{cases}$$

が成り立つ。ここで X の時間発展を記述する確率差分方程式は次のようになる:

KMO-ラレシエヴァル方程式

$$(3.9) \quad X(z) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \delta_+(N, N-k) X(z-k) + V_+(\infty)^{\frac{1}{2}} \xi^+(\infty)$$

$$(3.10) \quad X(-z) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \delta_-(N, N-k) X(z+k) + V_-(\infty)^{\frac{1}{2}} \xi^-(\infty)$$

§ 4. 因果性

2次元弱定常過程 $X = ({}^t(X_1(z), X_2(z)); z \in \mathbb{Z})$ が与えられるとする。

定義 4.1

(i) 線型の大域的存在性とは、 X_1 が原因、 X_2 が結果の時

$$\Leftrightarrow [X_2(z); z \leq 0] \subset [X_1(z); z \leq 0]$$

(ii) d 次元の大域的存在性とは、 X_1 が原因、 X_2 が結果の時

$$\Leftrightarrow [X_2(z); z \leq 0] \subset [X_1(z_1)X_1(z_2)X_1(z_3)X_1(z_4); z_1, \dots, z_d \leq 0, 1 \leq k \leq d]$$

(iii) 非線型の大域的存在性とは、 X_1 が原因、 X_2 が結果の時

$$\Leftrightarrow [X_2(z); z \leq 0] \subset [X_1(z_1)X_1(z_2)\dots X_d(z_d); z_1, \dots, z_d \leq 0, d \in \mathbb{N}]$$

実際のデータ解析にあたっては、データ数は有限個しかない

ため、次の局所的因果性の定義を与える。

定義 4.2

(i) 線型、局所的意味-ある、 X_1 が原因、 X_2 が結果

$$\iff [X_2(n); n_0 \leq n \leq \infty] \subset [X_1(n); n_0 \leq n \leq \infty] \quad (\exists n_0 \leq \forall n)$$

(ii) d 次、局所的意味-ある、 X_1 が原因、 X_2 が結果

$$\iff [X_2(n); n_0 \leq n \leq \infty] \subset [X_1(n_1) \dots X_1(n_d); n_0 \leq n_1, \dots, n_d \leq \infty, 1 \leq k \leq d]$$

(iii) 非線型、局所的意味-ある、 X_1 が原因、 X_2 が結果

$$\iff [X_2(n); n_0 \leq n \leq \infty] \subset [X_1(n_1) \dots X_1(n_d); n_0 \leq n_1, \dots, n_d \leq \infty, d \in \mathbb{N}]$$

X_1, X_2 に対する KM_0 -ラジアンパルカを 夫々 $\mathbb{D}_1 = (U_1(n); n \in \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{D} = ({}^t(U_{11}(n), U_{22}(n)); n \in \mathbb{N}^*)$ とする。

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & \|X_2(0) - P_{[X_1(\cdot); \cdot \leq 0]} X_2(0)\|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \|X_2(N) - P_{[X_1(\cdot); 0 \leq \cdot \leq N]} X_2(N)\|^2 \end{aligned}$$

に注意して、

$$(4.2) \quad X_1 \xrightarrow[\text{global}]{(c)} X_2 \quad (\text{定義 4.1 (i) の意味})$$

$$\iff \lim_{N \rightarrow \infty} \|X_2(N) - P_{[X_1(\cdot); 0 \leq \cdot \leq N]} X_2(N)\|^2 = 0$$

補足頁

$$X_1 \xrightarrow[\text{local}]{(c)} X_2$$

 $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \nu_1(n) \\ \nu_{11}(n) \\ \nu_{22}(n) \end{pmatrix}; n_0 \leq n < \infty \right\} \quad \text{直交}$$

が基本的で、これを用いて、 $X_1 \xrightarrow{(c)} X_2$ ならば、

$$(4.3) \quad \|X_2(N) - P_{[X_1(\cdot); 0 \leq \cdot \leq N]} X_2(N)\|^2 \\ = \sum_{k=0}^N \frac{Q_{22}(N, N-k)^2}{V_{11}(N-k)} \det V_+(N-k)$$

ここで、

$$(4.4) \quad Q(N, k) = \begin{cases} R(N)R(0)^{-1} & k=0 \\ P_+(N, k) V_+(k)^{-\frac{1}{2}} & 1 \leq k \leq N \end{cases}$$

$$(4.5) \quad \begin{cases} P_+(n, n) = V_+(n)^{\frac{1}{2}} \\ P_+(n, n) = -\sum_{k=n}^{n-1} \gamma_+(n, k) P_+(k, n) \quad (n > n) \end{cases}$$

注意 4.1 注意 2.3 に述べた考えを用いて、 d 次元大域の存在性について X_1 が原因、 X_2 が結果の場合に扱ったのである。

注意 4.2 実際のデータ解析において、大域の因果性の検定を局所的因果性に基づいて検定することは、理論の限界を避けられない。有限個のデータしか扱えない現状からすれば、局所的因果性は大事な概念と思われた。

実際、データ解析にあたって、定常性、因果性の検定は、頁数の関係に述べた通りだが、注意22で述べた構成定理に基づいての定常性の検定、(4.3)に基づいての因果性の検定も、中心極限定理に訴えることにより提案する事ができる。詳しくは、文献 [7], [8], [9] を見ていただく。

文献

- [1] 斎池弘次, 中川東一郎; ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社 (1973).
- [2] Okabe, Y., On a stationary Gaussian process with T -positivity and its associated Langevin equations and S -matrix, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 26 (1979), 115-165
- [3] Okabe, Y., On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with T -positivity and the fluctuation-dissipation theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 28 (1981), 169-213
- [4] Okabe, Y., On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with finite multiple Markovian property and the fluctuation-dissipation theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 28 (1982), 793-804
- [5] 岡部立青憲, ラビンガレ方程式について, 数学33 (1981), 306-324

- [6] Okabe, Y., On a wave equation associated with prediction errors for a stationary Gaussian process, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 49 (1983), 215-226.
- [7] Okabe, Y., A generalized fluctuation-dissipation theorem for one-dimensional diffusion process, *Commun. Math. Phys.*, 98 (1985), 449-468.
- [8] Okabe, Y., On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian process with T -positivity, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA*, 33 (1986), 1-56.
- [9] Okabe, Y., On the theory of Brownian motion with the Alder-Wainwright effect, *J. Stat. Phys.*, 45 (1986), 953-981.
- [10] Okabe, Y., KMO-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem (I), *Hokkaido Math. J.*, 15 (1986), 163-216.
- [11] Okabe, Y., KMO-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem (II), *Hokkaido Math. J.*, 15 (1986), 319-355.
- [12] Okabe, Y., Stokes-Boussinesq-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem, *Prob. Theory and Math. Stat.*, Vol. 2, 431-436, Prohorov et al. (eds.), 1986 VNU Science Press.
- [13] Okabe, Y., On long time tails of correlation functions for KMO-Langevin equations, *Lecture Notes in Math.*, Springer, 1299 (1986), 391-397.

- [14] Okabe, Y., On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (I), Hokkaido Math. J., 16(1987), 315-341.
- [15] Okabe, Y., On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (II), Hokkaido Math. J., 17(1987), 1-44.
- [16] Okabe, Y., On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (III), to appear in Hokkaido Math. J.
- [17] Okabe, Y., On stochastic difference equations for the multi-dimensional stationary time series, to appear in Prospect of Algebraic Analysis, Academic Press, 1988.
- [18] Okabe, Y., On stochastic difference equations for the multi-dimensional stationary time series, in preparation.
- [19] Okabe, Y. and Y. Nakano, On the theory of KMO-Langevin equations with application to time series, in preparation.