

# Lie の differential invariant について

京大理 森本 徹

序. S. Lie は, その論文 "Über Differentialinvarianten" (Math. Ann. Bd 24, 1884) の中で, 豊富な例によって, differential invariant の重要性を説いてゐる。またその中からいくつかの例を拾って, Lie の differential invariant とはどんなものか見てみよう。

例 1 2 階常微分方程式:

$$y'' = \phi(x, y, y')$$

は,  $(x, y)$ -空間の一般な変換:

$$\begin{cases} y_1 = Y(x, y) \\ x_1 = X(x, y) \end{cases}$$

によつて,  $x_1, y_1$  についての常微分方程式:

$$y_1'' = \phi_1(x_1, y_1, y_1')$$

に与る。  $y', \phi, \phi_x, \dots$  の関数  $\Omega(y', \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{y'}, \dots)$  以上の形の任意の変換に対して

$$\Omega(y', \phi, \phi_x, \dots) = \Omega(y_1', \phi_1, \phi_{1x_1}, \dots)$$

を満足する関数  $\Omega$  を differential invariant といいよ。

例 2  $n$  階の齊次線形常微分方程式 :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) y = 0$$

は 次の形の変換 :

$n > 1$  のとき

$n = 1$  のとき

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) \\ \bar{y} = \lambda(x) y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) \\ \bar{y} = g(x) y^\mu \quad (\mu: \text{任意定数}) \end{cases}$$

によって、同じ形の微分方程式 :

$$\frac{d^n \bar{y}}{d\bar{x}^n} + \bar{P}_1(\bar{x}) \frac{d^{n-1} \bar{y}}{d\bar{x}^{n-1}} + \cdots + \bar{P}_n(\bar{x}) \bar{y} = 0$$

に等しい。関数  $\Omega(P_1, P_2, \dots, P_1', \dots, P_i^{(k)}, \dots)$  上の形の任意の変換に対して

$$\Omega(P_1, P_2, \dots) = \Omega(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots)$$

を満足するのは differential invariant といいよ。

この differential invariant については、19 世紀終りに Halphen, Laguerre, Forsyth, etc, によって詳しく計算がなされている。詳細は Wilczynski, Projective Differential Geometry of curves and ruled surfaces, Teubner (1906) を参照したい。

例 3 2 階偏微分方程式 :

$$r = F(x, y, z, p, q, s, t)$$

$$\left( \text{ここで } p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

は,  $(x, y, z)$  - 空間での一般を変換;

$$\begin{cases} x_1 = X(x, y, z) \\ y_1 = Y(x, y, z) \\ z_1 = Z(x, y, z) \end{cases}$$

によつて,  $r_1 = F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, s_1, t_1)$  に写るとする。このとき関数  $\Omega(p, q, s, t, F, F_x, F_y, \dots)$  で

$$\Omega(p, q, s, t, F, F_x, \dots) = \Omega(p_1, q_1, \dots, F_1, x_1, \dots)$$

を満たすものは differential invariant という。

Lie は この differential invariant を求めることが、2階偏微分方程式の分類の基礎になるといっている。

例を挙げるのはこれに留めておくが、このように、微分方程式のある族と、ある変換群(一般に無限次元)が与えられ、その族がその群に属する任意の変換によつて不変となるといえるとき、differential invariant というものが考えられる。そしてこの differential invariant を調べることは、微分方程式の equivalence や分類の問題、さらに解法の問題とも密接な関係を持つ。今日、もう一度、Lie の問題としたところを考へ直してみらるゝとあはれしいのではないかと思われる。

ここでは、まず現代的な立場から differential invariant の formulation を与えよう。そして differential invariant

に關するある種の有限性についてこの定理を述べる。そして最後に、一つの例として、一般化した Monge-Ampère の方程式を intrinsic な形で定義し、この微分方程式の族の接触変換群に關する differential invariant の計算が興味深い問題ではなにかということと指摘したい。

### §1. differential invariant

$\pi: M \rightarrow N$ , を fibred manifold とする。その local cross sections 全体の集合を  $\Gamma(M)$  と表わし、その  $k$ -jets 全体のなす空間を  $J^k(M)$  と表わす。 $\sigma \in \Gamma(M)$  に対して  $j_x^k \sigma$  で、 $\sigma$  の  $x$  での  $k$ -jet,  $j^k \sigma$  で、 $x \rightarrow j_x^k \sigma$ , によって決まる  $J^k(M)$  の section と表わす。

$a$  を  $M$  の local diffeo. とする。 $\sigma \in \Gamma(M)$  に対して  $\pi \circ a \circ \sigma$  が  $N$  の local diffeo. となり、 $a \circ \sigma \circ (\pi \circ a \circ \sigma)^{-1}$  が定義され、 $\Gamma(M)$  の元となる。これを  $a \cdot \sigma$  と略記しよう。

また  $z \in J^k(M)$  に対して、 $z = j_x^k(\sigma)$  となる  $\sigma \in \Gamma(M)$  と <sup>とったとき</sup>  $a \cdot \sigma$  が意味を持つのは、 $(p^k a)(z) = j_{a(x)}^k(a \cdot \sigma)$  によって  $p^k a$  が定まる、このようにして  $M$  の local diffeo.  $a$  から  $J^k(M)$  の local diffeo.  $p^k a$  が導かれる。

さて、 $J^k(M)$  の submanif.  $\Omega$  を与えるとは、 $N$  を独立変数の空間、 $M$  を独立変数と従属変数とある空間とする

$k$  階の微分方程式と与えることとみなせる。従ってこのやうな  $\mathcal{R}$  を  $M$  上の  $k$  階の微分方程式と呼ぼう。

$a$  を  $M$  の loc. diffeo. とすると,  $p^*a$  は  $M$  上の  $k$  階の微分方程式  $\mathcal{R}$  と同じく  $k$  階の微分方程式  $(p^*a)(\mathcal{R})$  に写す。これを  $a$  の作用とみて  $a \cdot \mathcal{R}$  と略記しよう。

( $a \cdot \mathcal{R}$  が意味を持つためには, 勿論  $p^*a$  の定義域が  $\mathcal{R}$  を含んでゐなくてはならない。しかし以下, 定義域云々については, いろいろ断らないことにする。)

今  $\mathcal{D}$  を  $M$  上の  $k$  階の微分方程式達の族とし,  $\mathcal{L}$  を  $M$  上の Lie algebra sheaf とする。即ち  $\mathcal{L}$  は  $M$  上の local vector fields の germs のある集合からなつていて, 各 stalk が通常の Lie bracket に関して, Lie algebra になつてゐるとする。そして  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$  で  $\mathcal{L}$  から生成される  $M$  上の pseudo-group と表わすことにする。 $\mathcal{D}$  が  $\mathcal{L}$  で不変とは,  $a \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ ,  $\mathcal{R} \in \mathcal{D}$  に対して  $a \cdot \mathcal{R} \in \mathcal{D}$  が成立つことである。

$\mathcal{L}$ -不変な微分方程式の族  $\mathcal{D}$  に対して, fibred manif.  $E \xrightarrow{\pi'} F$  と,  $E$  上の Lie algebra sheaf  $\mathcal{L}'$  があって, 次の i), ii), iii) を満たすとき,  $(E \xrightarrow{\pi'} F, \mathcal{L}')$  を  $(\mathcal{D}, \mathcal{L})$  の表現といふ。

$$i) \quad \exists \text{ map, } \mathcal{F}: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}(E).$$

$$ii) \quad \exists \text{ isomorphism, } \rho: \mathcal{P}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}').$$

$$\text{iii)} \quad \mathcal{F}(a \cdot \mathcal{Q}) = P(a) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{Q}), \quad \mathcal{Q} \in \mathcal{D}, a \in \mathcal{P}(\mathcal{L}).$$

$\mathcal{L}$ -不変な  $\mathcal{D}$  に対して, local には, その表現が 1 つで  
 0 存在すると思ってもよい。第 2 述べて例について, その表  
 現が容易に構成できる。例として, 例 2 の場合だと,  $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$   
 $F = \mathbb{R}$  とし, 微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x) y = 0$$

に対して,  $E$  の section  $(P_1(x), \dots, P_n(x), x)$  を対応させる。

そして  $E$  上の Lie algebra sheaf  $\mathcal{L}'$  は  $(P_1, \dots, P_n, x)$  から  
 $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n, \bar{x})$  への変換によって決められる。

今  $(E \xrightarrow{\pi'} F, \mathcal{L}')$  を  $(\mathcal{D}, \mathcal{L})$  の表現とする。

$J^L(E)$  上の function  $\Omega$  を, 任意の  $a \in \mathcal{P}(\mathcal{L}), \mathcal{Q} \in \mathcal{D}$  に対して

$$j^L(\mathcal{F}(\mathcal{Q}))^* \Omega = \overline{P(a)}^* \cdot j^L \mathcal{F}(a \mathcal{Q})^* \Omega$$

$$(\text{ここで, } \overline{P(a)} = \pi' \circ P(a) \circ \mathcal{F}(\mathcal{Q}))$$

を満たすものは  $L$  次の differential invariant という。

$$\begin{array}{ccc} J^L(E) & \xrightarrow{P(a)} & J^L(E) \\ \downarrow \mathcal{F}(\mathcal{Q}) & \searrow P(a) & \downarrow j^L \mathcal{F}(a \mathcal{Q}) \\ E & & E \\ \downarrow \pi' & \nearrow \mathcal{F}(\mathcal{Q}) & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\overline{P(a)}} & F \end{array} \quad \mathcal{F}(a \mathcal{Q}) = P(a) \mathcal{F}(\mathcal{Q})$$

これは, differential invariant とはいうに及ばず,  
 原理的には簡単である。次にそれを説明しよう。

まず  $E$  上の Lie algebra sheaf の  $J^L(E)$  への prolongation

に " " で述べたように。  $E$  上の local vector field  $X$  に對して、  
 その生成する local 1-pr. group は  $(\varphi_t)$  とする。  $(p^L \varphi_t)$   
 は  $J^L(E)$  上の local 1-pr. group をなし、それから決まる  
 $J^L(E)$  上の local vector field は  $p^L X$  とする。 このとき  
 $E$  上の local vector field  $X, Y$  に對して

$$p^L [X, Y] = [p^L X, p^L Y]$$

が成立つ。  $\mathcal{L}'$  は  $E$  上の Lie algebra sheaf とすると、  $\mathcal{L}'$   
 の section  $X$  に對して  $J^L(E)$  上の vector field  $p^L X$  が決る。  
 これから  $J^L(E)$  上の Lie algebra sheaf  $\mathcal{L}'^{(L)}$  が定まる。  
 これを  $\mathcal{L}'$  の  $J^L(E)$  への prolongation とする。

$\mathcal{L}'^{(L)}$  から  $J^L(E)$  の tangent bundle への evaluation map  
 によって  $J^L(E)$  上の differential system  $D(\mathcal{L}'^{(L)})$  が  
 定まる。最初に紹介した Lie の論文の、主定理は、我々の  
 表現に従えば、次のようになる。

Theorem (Lie).  $\mathcal{D}$  は  $\mathcal{L}$ -invariant な微分方程式の族とし、  
 $(E \xrightarrow{\pi} F, \mathcal{L}')$  はその表現とする。  $R_0 \in \mathcal{D}$   
 とし、  $\Omega$  は  $j_{x_0}^L(\pi(R_0))$  の近傍で定義される  $J^L(E)$  上の  
 関数とする。このとき  $\Omega$  が differential invariant である  
 ための必要十分条件は、  $\Omega$  が  $D(\mathcal{L}'^{(L)})$  の first integral  
 であることである。

証明は、微分と積分の関係からほとんど明らか。

## §2. differential invariant の有限性.

$\mathcal{D}$  は  $L$ -不変な微分方程式の族,  $(E \xrightarrow{\pi} F, \mathcal{L})$  とする表現とする. 次にみたように, 各  $k \geq 0$  に對して  $k$  次の differential invariant は  $J^k(E)$  上の differential system  $D(\mathcal{L}^{(k)})$  の 1-st integral として求まる.  $D(\mathcal{L}^{(k)})$  の次元が一定ならば, それは完全積分可能だから, 常微分方程式を解くことにより, 求める. このようにして, 次数とともに無限に増える differential invariants の族が存在するか, それに關してある意味での有限性が成立つこと, 即ちある  $k_0$  が存在して それより高い次数の differential invariant はそれ以下の differential invariant を微分したもののから得られることを示そう. なお, A. Kumpera は同様の問題を少し違った形で J. Diff. Geom. 10 (1975) 289-416, の中で扱っていることを注意しておく.

以下一つの表現  $(E \xrightarrow{\pi'} F, \mathcal{L}')$  を固定し考えるので, 記号の簡単のため,  $\pi$  とおいて  $(E \xrightarrow{\pi} F, \mathcal{L})$  で表わす. また同様の projection を次の様に書くことにする.

$$J^{k+1}(E) \xrightarrow{\pi_{k+1,k}} J^k(E) \xrightarrow{\pi_k} E \xrightarrow{\pi} F$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\omega_k}$

まず  $\delta$ -微分を定義しよう.  $\Omega$  は  $J^k(E)$  上の function,  $v$  は  $F$  上の vector field (あるいは, 少し一般に  $\omega_{k+1}^* TF$  の

section) とする。このとき  $S_v \Omega$  を  $J^{k+1}(E)$  上の function として次のように定義される。

$$(S_v \Omega)(z^{k+1}) = v_{\pi_{k+1}(z^{k+1})} (j^k \sigma)^* \Omega$$

ここで、 $\sigma$  は  $E$  の section で  $j_{\pi_{k+1}(z^{k+1})}^{k+1}(\sigma) = z^{k+1}$  を満たすもの。上の定義は勾配  $\sigma$  の選定方法によらずに、 $\sigma$  に local にも意味をもつ。次の性質は基本的である。

Proposition 1.  $X$  を  $E$  上の、 $v$  を  $F$  上の (local) vector field,  $\Omega$  を  $J^k(E)$  上の (local) function とすると

$$S_v((p^k X) \Omega) = (p^{k+1} X)(S_v \Omega).$$

さて、 $D(\mathcal{L}^k)$  を  $D^k$  と略記し、 $D^k$  の 1st integrals 全体を  $I(D^k)$  または  $I^k$  と書く。  $z^k \in J^k(E)$  での  $I^k$  の germs 全体を  $I_{z^k}^k$  と書くことにする。明らかに、 $f_1, f_2, \dots, f_s \in I_{z^k}^k$  ならば、その関数  $F(f_1, \dots, f_s)$  も  $I_{z^k}^k$  の元である。任意の  $I_{z^k}^k$  の元が  $f_1, \dots, f_s$  の関数として表わされるとき、 $f_1, \dots, f_s$  は  $I_{z^k}^k$  を生成するといひ、それらが独立なとき、 $f_1, \dots, f_s$  を  $I_{z^k}^k$  の fundamental system といふ。

$\pi_{k+1,k}(z^{k+1}) = z^k$  とすると、 $\pi_{k+1,k*} D_{z^{k+1}}^{k+1} = D_{z^k}^k$  が成立つことより、

$$\pi_{k+1,k}^* I_{z^k}^k \subset I_{z^{k+1}}^{k+1}.$$

が成立つ。特に、Prop. 1. より、次の成立つ。

$$S \cup I_{z^k}^k \subset I_{z^{k+1}}^{k+1}$$

ここで  $v$  は  $\omega_k(z^k)$  の nbd. で定義された勝手な vector field. さて我々の, 有限性の定理は次のように述べられる.

Theorem.  $(z^k)_{k \geq 0}$  を  $J^\infty(E)$  の元とする. 更に  $z^k \in J^k(E)$  で  $\pi_{k+1}(z^{k+1}) = z^k$ . そしてこの点において, 任意の  $k$  に対して,  $z^k$  の nbd. で  $\dim D^k$  は const. を仮定する. このとき integer  $k_0$  が存在して,  $k \geq k_0$  に対して  $I_{z^{k+1}}^{k+1}$  は  $S \cup I_{z^k}^k$  及び  $\pi_{k+1,k}^* I_{z^k}^k$  から生成される.

以下その証明の概略を示す.

$E$  の vertical vectors 全体のなす  $E$  上の vector bundle を  $V(E)$ ,  $\pi_k^*, \pi_{k,k-1}^*$  等によって induced bundle を与え, これは exact.

$$0 \rightarrow V(E) \rightarrow TE \xrightarrow{\pi_*} \pi^*(TF) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \omega_k^* S^k(T^*F) \otimes \pi_k^* V(E) \rightarrow TJ^k(E) \rightarrow \pi_{k,k-1}^* TJ^{k-1}(E) \rightarrow 0$$

このより, この exact seq. によって  $J^k(E)$  上の bundle  $\mathcal{J}^k$  を定義する.

$$0 \rightarrow \mathcal{J}^k \rightarrow D^k \rightarrow \pi_{k,k-1}^* D^{k-1} \rightarrow 0$$

contraction によって  $\bigwedge^m \mathcal{J}^k$  へ  $\lambda$  を定義する.

$$\omega_{k+1}^* S^{k+1}(T^*F) \otimes \pi_{k+1}^* V(E) \times \omega_{k+1}^* TF$$

$$\downarrow \lambda$$

$$\omega_{k+1}^* S^k(T^*F) \otimes \pi_{k+1}^* V(E)$$

Proposition 2.  $z^k, z^{k+1}$  の nbhd.  $z$   $\dim f^k$ ,  
 $\dim f^{k+1}$ ,  $\dim D^k$  は const. とし  $\pi_{k+1}(z^{k+1}) = z^k$ ,  
 $\omega_{k+1}(z^{k+1}) = x$  とする,

$$\lambda(f_{z^{k+1}}^{k+1} \times T_x F) \subset f_{z^k}^k$$

この  $\lambda$  は dual に  $\lambda^*$  とする。これは exact.

$0 \rightarrow \pi_{k,k+1}^* T^* J^{k+1}(E) \rightarrow T^* J^k(E) \rightarrow \omega_k^* S^k(TF) \otimes \pi_k^* V(E)^* \rightarrow 0$ .  
 $\lambda: T^* D^k$  の annihilators の  $\lambda^*$  の space と  $\Phi^k$ ,  $f^k$  の  $\eta^k$   
 $\eta^k$  と  $\eta^k$  とする。これは exact.

$$0 \rightarrow \pi_{k,k+1}^* \Phi^{k+1} \rightarrow \Phi^k \rightarrow \eta^k \rightarrow 0$$

またこの map  $\mu$  を  $\lambda$  と dual に定義する。

$$\omega_{k+1}^* S^k(TF) \otimes \pi_{k+1}^* V(E)^* \times \omega_{k+1}^*(TF)$$

$$\downarrow \mu$$

$$\omega_{k+1}^* S^k(TF) \otimes \pi_{k+1}^* V(E)^*$$

この  $\mu$ , Prop. 2 は  $\mu$  と同値。

Proposition 2'.  $z^k, z^{k+1}$  の nbhd.  $z$   $\dim \eta^k$ ,  
 $\dim \eta^{k+1}$ ,  $\dim \Phi^k$  は const. とする。

$$\mu(\eta_{z^k}^k \times T_x F) \subset \eta_{z^{k+1}}^{k+1}$$

これはこの Prop. の成立。

Proposition 3.  $z^k, z^{k+1}$  の nbhd.  $z$   $\dim \eta^k$ ,  
 $\dim \eta^{k+1}$ ,  $\dim \Phi^k$  は const. とする。すると。

$$\mu: \eta_{z^k}^k \times T_x F \rightarrow \eta_{z^{k+1}}^{k+1}$$

は surjective とする。このとき次の成立。  $f_1, \dots, f_s \in I_{zk}^k$  の fundamental system とし  $v_1, \dots, v_n \in x$  の nbd.  $\tau$  の frame とすると

$\{ \pi_{k+1,k}^* f_\alpha, \delta_{v_i} f_\alpha : \alpha=1, \dots, s, i=1, \dots, n \}$  から  $I_{zk+1}^{k+1}$  の fundamental system を選べる。

上の propositions の証明は略すが、 $s=1$  と認めると、定理は次のように直ちに命ずる。定理での仮定のもとに、

$$\eta_{z_0}^0 + \eta_{z_1}^1 + \dots + \eta_{z_k}^k + \dots$$

は  $\sum_{k=0}^{\infty} S^k T_x F \otimes \mathcal{V}(E)_{z_0}^*$  の  $\sum S^k T_x F$  -submodule とする。従って有限生成、このことからある  $k_0$  が存在して

$\mu: \eta_{z_k}^k \times T_x F \rightarrow \eta_{z_{k+1}}^{k+1}$  は surjective とする Prop. 3

より、定理が成立する。

### §3. generalized Monge-Ampère equation

$x, y$  を独立変数、 $z$  を未知関数とし、その2階導関数の偏微分を  $p, q, r, s, t$  で表す。

$$Hr + 2KS + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

(ここで  $H, K, \dots, N$  は  $x, y, z, p, q$  などの関数)

の形の方程式は Monge-Ampère の方程式として古くから知られてゐる。

ここで、これを少し拡張して考え座標によらない intrinsic

方法で、 $n$  変数の一階化された Monge-Ampère の方程式  
と定義する。

$N$  を  $(r+s)$ -dim diff manif. とし、 $TN$  の  $r$ -dim  
subspaces 全体からなる  $N$  上の Grassmann bundle を、

$C_{r,s}(N)$  とし、単に  $C_r(N)$  と書く、 $N$  の projection  
を  $\pi$  で表わす。  $C_{r,s}(N)$  上の differential system  $D$  を

$$D_z = \{ \xi \in T_z C_{r,s}(N) \mid \pi_* \xi \in \mathbb{R} \}$$

によって自然に定義される。

$(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^s)$  を  $N$  の loc. coord. system,  $U$  を  
その coord. nbd. とする。

$$\mathcal{U} = \{ z \in \pi^{-1}(U) \mid dx^1|_z, \dots, dx^r|_z; \text{ lin. indep.} \}$$

とすると、 $\mathcal{U}$  は  $C_{r,s}(N)$  の open set であり  $z \in \mathcal{U}$  に対して

$$dy^\alpha|_z = \sum_{i=1}^r p_i^\alpha(z) dx^i|_z \quad \alpha=1, \dots, s.$$

が満たされる  $p_i^\alpha(z)$  は unique に定まり、 $(x^i, y^\alpha, p_i^\alpha)$

は  $\mathcal{U}$  上の coord. system と見做す。さて  $D$  は  $\mathcal{U}$  上、

$$dy^\alpha - \sum_i p_i^\alpha dx^i = 0 \quad \alpha=1, \dots, s$$

で定義される。従って、 $s=1$  のとき、 $D$  は  $C_{r,1}(N)$

上の contact structure と定まると分かる。

Proposition 1.  $X$  を  $r$ -dim manif.,  $f: X \rightarrow N$  を  
immersion とすると、 $f$  の微分によって

$$cf: X \longrightarrow C_r(N)$$

かつ  $Cf$  は  $D$  の integral manuf. となる。逆に、  
 $F: X^r \rightarrow C_r(N)$  が  $D$  の integral manuf. かつ  
 $\pi \circ F$  が immersion ならば、 $C(\pi \circ F) = F$  となる。

$C_r(N)$  上の diff. system  $D$  の  $r$ -dim. integral elements 全体は  $C_r(C_r(N))$  の submanifold となる。

また  $C_r^2(N)$  と  $\frac{r}{2} < s$  ならば、 $C_r(N) \cap$  open set  
 $\mathcal{U}$  上で  $D$  は  $\omega^1 = \dots = \omega^s = 0$  で定義されるという。すると

$$C_r^2(N) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{Z \in C_r(C_r(N)) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}) \mid \omega^\alpha|_Z = d\omega^\alpha|_Z = 0, \alpha=1, \dots, s\}$$

これは定義と Prop. 1 より直ちに合致する。

Proposition 2.  $f: X^r \rightarrow N$  は immersion となる。

このとき、 $C(C(f)): X \rightarrow C_r(C_r(N))$  は  $C_r^2(N)$  への  
map となる。逆に、 $F: X^r \rightarrow C_r(N)$  が  $(CF)(X)$   
 $\subset C_r^2(N)$  かつ  $\pi \circ F$  が immersion ならば  $F = C(\pi \circ F)$ 。

以下  $C(C(f))$  を  $C^2 f$  とかく。以上のことからこの定  
義は妥当である。

Def.  $C_{r,s}^2(N)$  の submanifold  $\mathcal{R}$  を 独立変数  $r$ ,  
未知変数  $s$  の 2 階の微分方程式系とみる。

Def.  $\mathcal{R} \subset C_r^2(N)$  の submanif,  $f: X^r \rightarrow N$  は  
immersion となる。  $f$  が  $\mathcal{R}$  の solution  $\Leftrightarrow C^2 f(X) \subset \mathcal{R}$

Def.  $\mathcal{R} \subset C_r^2(N)$  の submanif.  $F: X^r \rightarrow C_r(N)$  は imm-  
ersion となる。  $F$  が  $\mathcal{R}$  の generalized solution  $\Leftrightarrow C(F)X \subset \mathcal{R}$ 。

以上のことを念頭にあつて generalized Monge-Ampère eq. を定義しよう。  $s=1$  とし  $N$  は  $r+1$  次元の diff manifold とする。先に注意したように、 $C_{r,1}(N)$  上の diff system  $D$  は contact structure と呼ばれる。  $\omega$  は  $D$  から  $C_{r,1}(N)$  上の vector bundle  $E$  を導き出すに決める。今  $D$  は  $\omega=0$  と定義されてゐるとする。  $\Omega = d\omega|_D$  とおき、  $z \in C_r(N)$  に対して、  $\Omega_z$  から生成される  $\wedge^r D_z^*$  の ideal  $\mathfrak{I}(\Omega)_z$  とし、  $(\Omega)_z^{(r)} = \Omega_z \cap \wedge^r D_z^*$ ,  $(\Omega)^{(r)} = \bigcup_{z \in C_r(N)} (\Omega)_z^{(r)}$  とする。  $\wedge^r D^* / (\Omega)^{(r)}$  は  $C_r(N)$  上の vector bundle とする。これを  $E$  とおき、  $\pi: E \rightarrow C_r(N)$  を projective bundle とし  $P(E)$  とする。

さて  $\alpha \in T(P(E))$  に対して、  $r$  変数、1 未知関数、2 階の微分方程式  $\mathcal{R}_\alpha$  を

$$\mathcal{R}_\alpha = \{ z \in C_{r,1}(N) \mid \alpha|_z = 0 \}$$

により定義する。この方程式を generalized Monge-Ampère equation と呼ぶ。

これを座標で表わしてみると、  $\pi: C_r(N) \rightarrow N$  の微分に對して好ましい所では、  $\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} \right)$  の  $r$  行  $r$  列式連の一次結合（係数は  $z$  についての 1 階  $r$  階の微分しか含まない）を 0 とする方程式に分けてゐる。特に  $r=2$  のときは、好ましい所では、従来の Monge-Ampère 方程式の形に表わされる。

$R_\alpha$  の generalized solution の問題に 対応する  $Cr(N)$  と  $N$  上の contact str. の  $\alpha$  の関係し,  $\alpha$  は  $N$  を定めてよい。特に  $\alpha \rightarrow R_\alpha$  の対応は 1対1 であることを注意しておく。従って, generalized Monge-Ampère eq. を改めて次のようにより簡明に定義することができろ。

$M$  を contact manif. とし  $D$  を  $N$  上の contact str. とする。このとき前述のように,  $D$  から  $M$  上の projective bundle  $P(E)$  が定まる。 $T(P(E))$  の元, 即ち  $P(E)$  の local section を  $M$  上の generalized Monge-Ampère equation という。そしてこの全体を  $\mathcal{M}$  とし,  $\mathcal{M}(M, D)$  と書く。

ここで  $M$  の local diffeo.  $\varphi$  で  $\varphi_* D \subset D$  となるものが contact transformation と呼ばれる。 $P(E)$  の作り方から,  $M$  の contact transf.  $\varphi$  は  $P(E)$  の diffeo  $\tilde{\varphi}$  を導くことができる。従って, contact transf. group は  $\Gamma(P(E))$  に作用する。そして  $\mathcal{M}$  は contact transf. group で不変となる。

$M$  上の infinitesimal contact transf. の  $S^1$  の Lie algebra sheaf を  $\mathcal{C}$  とすると, 上のことより,  $\mathcal{C}$  の  $P(E)$  への lift  $\tilde{\mathcal{C}}$  が存在する。そして  $\mathcal{M}(M, D)$  は  $\mathcal{C}$  - 不変であり  $(P(E) \rightarrow M, \tilde{\mathcal{C}})$  がその表現になっている。

$\int \omega^2$  は  $(P(E) \rightarrow M, \tilde{E})$  の differential invariant  
 と計算できることは, generalized Monge-Ampère eq. の  
 contact transf. group による  $\mathbb{C}^2$  の equivalence の分類  
 の問題と関係し, 非常に興味ある問題であると思  
 われる。