

## パラメータを持つマルチンゲールの一様可積分性

九州大・理 佐藤 坦 (Hiroshi Sato)  
九州大・理 玉城 政和 (Masakazu Tamashiro)

### Introduction

$(\Omega, \mathcal{F}, P), (T, \Sigma, \sigma)$  を何れも確率空間とする.

[定義]  $\Omega$  上の 非負値 martingale の族  $\mathbf{P}(t) = \{P_n(t, \omega), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1} (t \in T)$  は次の可測性と可積分性を持つとき  $T$  に パラメータ を持つ非負値 martingale と呼ばれる.

(1.1) 任意の  $n (\in \mathbf{N})$  について  $P_n(\cdot, \cdot)$  は  $(\Sigma \otimes \mathcal{F}_n)$ -可測である.

(1.2)  $\int_T \mathbf{E}[P_1(t, \omega)] \sigma(dt) < +\infty$ .

[問題]  $\mathbf{P}(t) = \{P_n(t, \omega), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1} (t \in T)$  は  $T$  に パラメータ を持つ 非負値 martingale とする.

$$M_n(\omega) = \int_T P_n(t, \omega) \sigma(dt)$$

とおく. Fubini の定理によって,  $\{M_n(\omega), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  は 非負値 martingale になる (これを average martingale と呼ぶことにする). それでは「どのような条件の下に  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分になるか?」というのが問題である.

次の補題で示すように, ほとんどすべての  $t \in T$  について  $\{P_n(t, \omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分であれば問題は自明である.

**補題 0.1** ほとんどすべての  $t \in T$  について  $\{P_n(t, \omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分であれば  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分である.

{証明} 仮定よりほとんどすべての  $t \in T$  について,

$$\mathbf{E}[P_1(t, \omega)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}[P_n(t, \omega)] = \mathbf{E}[\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t, \omega)]$$

が成り立つ. Martingale 性と Fubini の定理, Fatou の補題から,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_1(\omega)] &= \int_T \mathbf{E}[P_1(t, \omega)] \sigma(dt) = \int_T \mathbf{E}[\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t, \omega)] \sigma(dt) \\ &\leq \mathbf{E}[\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_T P_n(t, \omega) \sigma(dt)] = \mathbf{E}[\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega)] \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}[M_n(\omega)] = \mathbf{E}[M_1(\omega)] \end{aligned}$$

となり, これより

$$\mathbf{E}[M_1(\omega)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}[M_n(\omega)] = \mathbf{E}[\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega)]$$

が示され  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分であることがわかる.  $\square$

ところが興味深いことに, すべての  $t \in T$  について  $\{P_n(t, \omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分でない場合でも average martingale  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分になり得ることが知られており, これについては多くの研究がある. この報告の **PART I** では average martingale の一様可積分性に関するこれまでの研究を簡単に紹介する.

Kitada-Sato [6] は独立な二つの確率変数列  $\mathbf{X} = \{X_k\}_{k \geq 1}$  と  $\mathbf{Y} = \{Y_k\}_{k \geq 1}$  が数列空間上に導く確率測度  $\mu_{\mathbf{X}}$  と  $\mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$  との間の絶対連続性について研究した. これもまた average martingale の一様可積分性の問題と考えられる. 特に  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  が共に非負値の場合  $\mu_{\mathbf{X}}$  と  $\mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$  との絶対連続性を特徴付けることは, average martingale の一様可積分性の問題の最も典型的な例となる. **PART II** ではこの問題について最近得た結果を報告する.

## PART I

### 1 Random Covering

[問題] 非負実数列  $\frac{1}{2} > l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \cdots$  と  $T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  上の独立同分布な (分布が一様分布に従う) 確率変数列  $\{X_k(\omega)\}_{k \geq 1}$  が与えられたとする.

$$I_k(\omega) = X_k(\omega) + [0, l_k]$$

とおく. どのような条件の下に  $P(\cup_{k=1}^{+\infty} I_k(\omega) = T) = 1$  となるかが問題である.

$$P_n(t, \omega) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - l_k} 1_{(l_k, 1]}(t - X_k(\omega)) \quad t \in T,$$

$$M_n(\omega) = \int_T P_n(t, \omega) dt$$

とおく.

**定理 1.1** {Kahane[2]} 次の (A), (B), (C), (D) は同値になる.

(A)  $\{M_n(\omega)\}$  は  $L^2$  で収束する.

(B)  $\int_T \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t)\right] dt < +\infty$ . ここに  $\Delta_n(t) = \int_T 1_{[0, l_n]}(t+u) 1_{[0, l_n]}(u) du$ .

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \exp\left[\sum_{j=1}^n l_j\right] < +\infty$ .

(D)  $P(\cup_{k \geq 1} I_k(\omega) = T) < 1$ .

## 2 Mandelbrot の Martingale

{記号と定義}  $c (\geq 2)$  を自然数.  $T = \{0, 1, 2, \dots, c-1\}$  とする.

さらに,  $T^\infty = \{(s_n)_{n \geq 1}; s_n \in T (n \geq 1)\}$ ,  $T^n = \{(s_n)_{n \geq 1} \in T^\infty; s_{n+k} = 0 \ \forall k \geq 1\}$  とおく.  $s = (s_n)_{n \geq 1}$ ,  $t = (t_n)_{n \geq 1} \in T^\infty$  に対して  $s, t$  の距離  $d(s, t)$  を次で定義する.

$$(2.1) \quad d(s, t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{c}\right)^n & \text{if } s_k = t_k \ \forall k \leq \exists n \text{ and } s_{n+1} \neq t_{n+1} \\ 1 & \text{if } s_1 \neq t_1. \end{cases}$$

また  $\sigma$  を  $T^\infty$  上の Haar 測度で  $\sigma(T^\infty) = 1$  をみたすとする.

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の平均 1 の確率変数  $W$  に対して,

$$\{W(j_1, j_2, \dots, j_n); n \geq 1, \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \in T^n\}$$

をその independent copy とする.  $s = (s_n)_{n \geq 1} \in T^\infty$  に対して,

$$P_n(s) = W(s_1)W(s_1, s_2) \cdots W(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

とおき, さらに,

$$M_n = \int_{T^\infty} P_n(s) \sigma(ds) \quad \left( = \left(\frac{1}{c}\right)^n \sum_{s \in T^n} P_n(s) \right)$$

とする.  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  は非負値 martingale で, 任意の  $n$  について  $\mathbf{E}[M_n] = 1$  だから Fatou の補題に注意すると,

$$\exists M_\infty \quad \text{such that} \quad M_n \longrightarrow M_\infty \quad \text{a.s.} \quad \text{and} \quad \mathbf{E}[M_\infty] \leq 1.$$

**定理 2.1** {Kahane and Peyri re[4]} (A)  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  が一様可積分であるための必要十分条件は  $\mathbf{E}[W \log W] < \log c$  となることである.

(B)  $M_\infty = 0$  a.s. と  $\mathbf{E}[W \log W] \geq \log c$  は同値になる.

{注意} 初めの  $W$  を平均 0 分散  $u$  の Gauss 分布に従う確率変数  $X$  に対して  $W = \exp[X - \frac{1}{2}u]$  で定義する ( $\mathbf{E}[W] = 1$ ,  $\mathbf{E}[W \log W] = \frac{1}{2}u$  に注意する).  $X$  の independent copy  $\{X(i_1, i_2, \dots, i_n); n \geq 1, \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in T^n\}$  について,

$$W(i_1, i_2, \dots, i_n) = \exp[X(i_1, i_2, \dots, i_n) - \frac{1}{2}u]$$

としてよい. このとき,

$$\begin{aligned} c_n(s, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}[X(s_1, s_2, \dots, s_n)X(t_1, t_2, \dots, t_n)] \\ &= \begin{cases} \mathbf{E}[X^2] = u & \text{if } d(s, t) \leq c^{-n} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

となり, これと (2.1) に注意すると,

$$C(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} c_n(s, t) = u \log_c \frac{1}{d(s, t)}.$$

が得られる.

### 3 Multiplicative Chaos

$\nu$  を自然数.  $u > 0$  とする.

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の確率場  $\{X_n(t, \omega); t \in [0, 1]^\nu, n \in \mathbb{N}\}$  は次の (3.1) から (3.4) をみたすとき,  $u$  を parameter とする  $\nu$  次元の **multiplicative chaos** の基本モデルとよばれる.

(3.1) 各  $n \in \mathbb{N}$  について  $X_n(\cdot, \cdot)$  は  $(\mathcal{B}[0, 1]^\nu \otimes \Sigma)$ -可測.

(3.2) 各  $t \in [0, 1]^\nu$  について  $\{X_n(t, \omega)\}_{n \geq 1}$  は独立な平均 0 の Gauss 型確率変数列で, 任意の  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s, t \in [0, 1]^\nu \times [0, 1]^\nu$  について  $c_n(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}[X_n(s, \omega)X_n(t, \omega)] \geq 0$ .

(3.3)  $c_n; [0, 1]^\nu \times [0, 1]^\nu \longrightarrow \mathbf{R}_+$

は連続関数.

(3.4)  $[0, 1]^\nu \times [0, 1]^\nu$  上の有界関数  $O(s, t)$  が存在して,

$$\sum_{n \geq 1} c_n(s, t) = u \log^+ \frac{1}{\|s - t\|} + O(s, t)$$

が成り立つ.

$u$  を parameter とする  $\nu$  次元の multiplicative chaos の基本モデル  $\{X_n(t, \omega); t \in [0, 1]^\nu, n \geq 1\}$  について,

$$P_n(t, \omega) = \exp\left[\sum_{k=1}^n \left\{X_k(t, \omega) - \frac{1}{2} \mathbf{E}[X_k(t, \omega)^2]\right\}\right],$$

$$M_n(\omega) = \int_{[0, 1]^\nu} P_n(t, \omega) dt$$

とおく. 定理 2.1 の応用として次の定理が成り立つ.

**定理 3.1** (Kahane [3]) (A)  $u < 2\nu$  であれば  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分.

(B)  $u \geq 2\nu$  であれば  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) = 0$  a.s.

## 4 Høegh-Krohn モデル — Kusuoka の定式化—

ここでは, Kusuoka [7] の定式化した二次元の Høegh-Krohn モデルについて少し説明する.

$\mathbf{R}^2$  上の急減少関数の全体 (Schwartz 空間) を  $\mathcal{S}$  で表す.  $\mathcal{S}^*$  ( $\mathcal{S}$  の topological dual) 上の確率測度  $\lambda$  は,

$$(5.1) \quad \int_{\mathcal{S}^*} \exp[\sqrt{-1}u(h)] \lambda(du) = \exp\left[-\frac{1}{2}((1-\Delta)^{-1}h, h)_{L^2}\right] \quad \forall h \in \mathcal{S}$$

で定まるとする. ここに,  $\Delta = \sum_{n=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  (Laplacian).

さて  $\mathcal{S}^*$  上の確率測度  $\lambda_t^\alpha$  ( $t \in \mathbf{R}^2$ ,  $\alpha \geq 0$ ) を,

$$\lambda_t^\alpha(A) = \lambda(A - \alpha \cdot g_t) \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^*)$$

と定義する. ここに,

$$g_t(\cdot) = \int_0^{+\infty} \exp[-x] p(x, \cdot - t) dx \quad (\in L^2(\mathbf{R}^2, dx)).$$

ただし  $p(x, t) = \frac{1}{4\pi x} \exp[-\frac{|t|^2}{4x}]$  (heat kernel). Cameron-Martin の定理の帰結として,

$$\begin{aligned} \lambda_t^\alpha \ll \lambda &\iff \alpha(1-\Delta)^{\frac{1}{2}}g_t \in L^2 \\ &\iff \alpha \int_0^{+\infty} p(x, 0) dx < +\infty \iff \alpha = 0 \end{aligned}$$

となる. 従って  $\alpha > 0$  であれば任意の  $t \in [0, 1]^2$  について  $\lambda_t^\alpha \perp \lambda$ . そこで  $\alpha > 0$  のとき  $\mathcal{S}^*$  上の確率測度  $\mu^\alpha$  を,

$$\mu^\alpha(A) = \int_{[0,1]^2} \lambda_t^\alpha(A) dt \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^*)$$

で定める時  $\mu^\alpha \ll \lambda$  であるかどうか問題になる.

{注意} 形式的には  $\mu^\alpha$  の  $\lambda$  に対する Radon-Nikodym derivative は

$$\frac{d\mu^\alpha}{d\lambda}(u) = \int_{[0,1]^2} \exp\left[u\left[\alpha(1-\Delta)g_t\right] - \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^{+\infty} p(x, 0) dx\right] dt$$

で与えられることに注意する.

さて,  $t \in [0, 1]^2$  について,

$$g_{1,t}(\cdot) = \int_1^{+\infty} \exp[-x] p(x, \cdot - t) dx \quad (\in \mathcal{S}),$$

$$g_{n,t}(\cdot) = \int_{2^{-2(n-1)}}^{2^{-2(n-2)}} \exp[-x] p(x, \cdot - t) dx \quad (\in \mathcal{S}) \quad (n \geq 2).$$

とおく. さらに  $\mathcal{S}^*$  上の平均 0 の Gauss 場  $\{X_n(t, u); n \geq 1, t \in [0, 1]^2\}$  を,

$$X_n^\alpha(t, u) = u \{ \alpha(1 - \Delta)g_{n,t} \} \quad t \in [0, 1]^2, u \in \mathcal{S}^*$$

で定め,

$$P_n^\alpha(t, u) = \exp \left[ \sum_{k=1}^n X_k^\alpha(t, u) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}^*} X_k^\alpha(t, u)^2 \lambda(du) \right],$$

$$M_n^\alpha(u) = \int_{[0,1]^2} P_n^\alpha(t, u) dt$$

とおく. このとき  $\{M_n^\alpha(u)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分になることと  $\mu^\alpha \ll \lambda$  とは同値である.

ところが  $[0, 1]^2 \times [0, 1]^2$  上の有界関数  $O(s, t)$  によって,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \int_{\mathcal{S}^*} X_n^\alpha(t, u) X_n^\alpha(s, u) \lambda(du) &= \alpha^2 \int_0^{+\infty} p(x, s - t) dx \\ &= \frac{\alpha^2}{2\pi} \log^+ \frac{1}{\|s - t\|} + O(s, t) \end{aligned}$$

とかけるのでこの問題は 3 章 Multiplicative Chaos の特別な場合として定理 3.1 から次が導かれる.

定理 4.1 (A)  $\alpha^2 < 8\pi$  であれば,  $\{M_n(u)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分になる.

(B)  $\alpha^2 \geq 8\pi$  であれば,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(u) = 0$  a.s.

## PART II

### 5 Admissible Translation — Kitada-Sato の結果 —

[問題]  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  と  $(T, \Sigma, \sigma)$  は何れも確率空間とする (以下では  $\Omega$  上の積分を  $E_P$  で,  $T$  上の積分を  $E_\sigma$  で表す). また  $\Omega$  上で独立同分布な実数値確率変数列  $\mathbf{X} = \{X_k(\omega)\}_{k \geq 1}$  と,  $T$  上の独立な実数値確率変数列  $\mathbf{Y} = \{Y_k(t)\}_{k \geq 1}$  が与えられたとする.  $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{X_k(\omega) + Y_k(t)\}_{k \geq 1}$  を直積確率空間  $(\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \Sigma, P \otimes \sigma)$  上に定義する (このとき  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  とは  $\Omega \times T$  上で独立である).  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  はそれぞれ数列空間上に確率測度  $\mu_{\mathbf{X}}, \mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$  を導く. その間の絶対連続性を特徴付ける事が問題である.

初めに次の Shepp [10] の定理に注意する.

定理 5.1 (Shepp)  $X_1(\omega)$  の分布は Lebesgue 測度と互いに絶対連続で, さらにその density を  $f$  ( $f(x) > 0$  a.e. ( $dx$ )) とするとき  $f$  は絶対連続関数とする ( $f$  の density を  $f'$  とおく).  $Y = \{y_k\}_{k \geq 1}$  は実数列とする. 次のことが成り立つ.

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx \quad (\text{Fisher's information}) \text{ とおく.}$$

(A)  $I < +\infty$  とする.

(i)  $\sum_{k \geq 1} y_k^2 < +\infty$  であれば  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  ( $\mu_X$  と  $\mu_{X+Y}$  は互いに絶対連続).

(ii)  $\sum_{k \geq 1} y_k^2 = +\infty$  であれば  $\mu_X \perp \mu_{X+Y}$  ( $\mu_X$  と  $\mu_{X+Y}$  は特異).

(B) すべての  $Y \in l_2$  について  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  ならば  $I < +\infty$ .

さて  $Y = \{Y_k(t)\}_{k \geq 1}$  が random sequence のとき補題 0.1 から,

$$(II.1) \quad \sum_{k \geq 1} Y_k(t)^2 < +\infty \quad \sigma \text{ a.s.}$$

であれば  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  が示せる. しかし, 逆は一般に成り立たない. 実際,  $X, Y$  を共に平均 0 の Gauss 分布に従う確率変数列とすれば,

$$(II.2) \quad \sum_{k \geq 1} Y_k(t)^4 < +\infty \quad \sigma \text{ a.s.}$$

が  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であるための必要十分条件であることが知られている ([8]).

次に Kitada-Sato [6] による一つの結果を紹介しよう.  $X_1$  は平均 0 分散 1 の Gauss 型確率変数で  $Y_k$  ( $k \geq 1$ ) の分布は対称とする.  $t \in T$  を固定したとき,  $\mu_{X_k}, \mu_{X_k+Y_k(t)}$  をそれぞれ  $\Omega$  上の確率変数  $X_k, X_k + Y_k(t)$  の分布とし, さらに  $\Omega \times T$  上の確率変数  $X_k + Y_k$  の分布を  $\mu_{X_k+Y_k}$  で表すことにする.

$$(II.3) \quad P_n(t, \omega) = \exp \left[ \sum_{k=1}^n \left\{ X_k(\omega) Y_k(t) - \frac{1}{2} Y_k(t)^2 \right\} \right] \left( = \prod_{k=1}^n \frac{d\mu_{X_k+Y_k(t)}}{d\mu_{X_k}}(X_k(\omega)) \right)$$

$$(II.4) \quad M_n(\omega) = \int_T P_n(t, \omega) \sigma(dt) \left( = \prod_{k=1}^n \frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(X_k(\omega)) \right)$$

と定義すると良く知られているように  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であるための必要十分条件は  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分になることである. 従って次に述べる Kitada-Sato[6] の結果から導かれる定理は PART I. 3 章の Multiplicative Chaos においてパラメータの空間が一般の確率空間で Gauss 場が変数分離形になったものと理解でき, 例えば  $\{Y_k\}_{k \geq 1}$  が (II-1) をみたさなければ Shepp の定理から  $\sum_{k \geq 1} Y_k(t)^2 = +\infty$  である  $t \in T$  について  $\{P_n(t, \omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分でないが, (II-2) が成り立てば average martingale  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分であることを示している.

定理 5.2 { Kitada-Sato[6] } (A) ある  $\varepsilon > 0$  について,

$$(II.5) \quad \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\sigma[Y_k(t)^2; |Y_k| \leq \varepsilon] < +\infty,$$

$$(II.6) \quad \sum_{k \geq 1} \sigma(|Y_k| > \varepsilon) < +\infty$$

が成り立てば  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分になる.

(B)  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分であればすべての  $\varepsilon > 0$  について (II.5) と

$$(II.7) \quad \sum_{k \geq 1} \sigma(|Y_k| > \varepsilon)^2 < +\infty$$

が成り立つ.

[6] では  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分であるために (II.6) が必要でない例, (II.7) が十分でない例を示している.

## 6 One-sided Admissible Translation

[問題] PART II. 5 章で  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  が何れも  $S (= \mathbf{N}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots\}$  または  $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ ) に値をとる確率変数列のときに「 $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$ 」となるための条件を求めることが問題である.

パラメータを持つマルチンゲールの一様可積分性との関係について考える.  $\mathbf{X}$  の分布に次の仮定をおく.

(i)  $S = \mathbf{N}_0$  のとき  $P(X_1 = n) > 0$  ( $\forall n \in \mathbf{N}_0$ )

(ii)  $S = \mathbf{R}_+$  のとき  $X_1$  の分布は Lebesgue 測度と互いに絶対連続.

このとき任意の  $k \in \mathbf{N}$  と  $t \in T$  を固定すると,  $\mu_{X_k+Y_k(t)}$  は  $\mu_{X_k}$  に絶対連続である. しかし数列空間上で確率測度  $\prod_{k=1}^{+\infty} \mu_{X_k+Y_k(t)}$  と  $\prod_{k=1}^{+\infty} \mu_{X_k}$  とが互いに絶対連続であるための必要十分条件は, あきらかに, 任意の  $k \in \mathbf{N}$  について  $Y_k(t) = 0$  となることである. しかし  $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$  であるかどうかはあきらかなことではない. 任意の  $k \in \mathbf{N}$  について  $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$  を仮定すると  $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$  であるための必要十分条件は (II.4) で与えられる average martingale  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  が一様可積分になることである.

さてここで PART II. 5 章と同様に

$$M_n(\omega) = \prod_{k=1}^n \frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(X_k(\omega))$$



$$Z_k(x) = \frac{d\mu_{X_k+Y_k}(x)}{d\mu_{X_k}} - 1$$

とおく. 任意の  $k \in \mathbb{N}$  について  $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$  を仮定する. つぎの定理が知られている.

**定理 6.1** { Kitada-Sato [6] } 次の (A),(B),(C),(D) は同値になる.

(A)  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$

(B)  $\{M_n(\omega)\}_{n \geq 1}$  は一様可積分である.

(C)  $\sum_{k=1}^{+\infty} Z_k(X_k)$  は概収束する.

(D) 実数  $M (\geq 1)$  が存在して

(D-1)  $\sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[Z_k(X_k); Z_k(X_k) > M] < +\infty$

(D-2)  $\sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[Z_k(X_k)^2; Z_k(X_k) \leq M] < +\infty$

## 6.1 $S = \mathbb{N}_0$ の場合

$$f(n) = \begin{cases} P(X_k = n) > 0, & \text{if } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_k(l) = \sigma(Y_k = l), \quad l \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$$

とおく. 任意の  $k \in \mathbb{N}$  について  $g_k(0) > 0$  とする (このとき  $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$ ). さらに

$$Z_k(n) = \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} f(n-l)g_k(l)}{f(n)} - 1 \quad \left( = \frac{d\mu_{X_k+Y_k}(n)}{d\mu_{X_k}} - 1 \right)$$

とおく. 必要条件としてつぎが得られる.

**定理 6.2**  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であれば,

(A.1)  $\sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > 0)^2 = \sum_{k \geq 1} (1 - g_k(0))^2 < +\infty.$

{証明}  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  とする. 定理 6.1 (D-2) と,  $Z_k(0) = g_k(0) - 1 \leq 0$  ( $\forall k \geq 1$ ) から,

$$\begin{aligned} +\infty &> \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[Z_k(X_k)^2; Z_k(X_k) \leq 1] \\ &\geq \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[Z_k(0)^2; X_k = 0] \\ &= \sum_{k \geq 1} \{g_k(0) - 1\}^2 f(0). \end{aligned}$$

仮定から  $f(0) > 0$  なので (A.1) が得られる. □

次に Fisher の information に対応するものとして,

$$I(l) = \sum_{n \geq 0} \frac{\{f(n-l) - f(n)\}^2}{f(n)} \left( = \sum_{n \geq 0} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} - 1 \right) \quad l \in \mathbf{N}_0,$$

を考える.

**定理 6.3** {十分条件}  $L \in \mathbf{N}_0$  が存在して,

$$(A.2) \quad I(l) < +\infty \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$$

$$(A.3) \quad \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > L) < +\infty$$

が成り立つと仮定する. (A.1) が成り立てば  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  となる.

{証明} 定理 6.1 の命題 (C) を示す.  $L \in \mathbf{N}_0$  を仮定のものとし,

$$\begin{aligned} Z_k(X_k) &= \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} f(X_k - l) g_k(l)}{f(X_k)} - 1 \\ &= \frac{\sum_{l=1}^{+\infty} \{f(X_k - l) - f(X_k)\} g_k(l)}{f(X_k)} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^L \{f(X_k - l) - f(X_k)\} g_k(l)}{f(X_k)} + \frac{\sum_{l=L+1}^{+\infty} \{f(X_k - l) - f(X_k)\} g_k(l)}{f(X_k)} \\ &= W_k + V_k \end{aligned}$$

とおく. (A.3) から,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[|V_k|] &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 0} \sum_{l > L} \{f(n-l) + f(n)\} g_k(l) \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 0} \sum_{l > L} f(n) g_k(l) \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > L) < +\infty. \end{aligned}$$

従って  $\sum_{k=1}^{+\infty} |V_k| < +\infty$  a.s. となり  $\sum_{k=1}^{+\infty} V_k$  は概収束する.

次に  $\sum_{k=1}^{+\infty} W_k$  が概収束すること示せば証明は終わる. これには  $\{W_k\}_{k \geq 1}$  が独立かつ平均 0 の確率変数列なので,  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}_p[W_k^2] < +\infty$  を示せば十分. 実際 Schwarz の不等式と仮定 (A.1), (A.2) から,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_p[W_k^2] &= \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{f(n)} \left[ \sum_{l=1}^L \{f(n-l) - f(n)\} g_k(l) \right]^2 \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{f(n)} \left[ \sum_{l=1}^L \{f(n-l) - f(n)\}^2 g_k(l) \sum_{l'=1}^L g_k(l') \right] \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \sup_{1 \leq l \leq L} I(l) \left[ \sum_{l \geq 1} g_k(l) \right]^2 = \sup_{1 \leq l \leq L} I(l) \sum_{k \geq 1} [1 - g_k(0)]^2 < +\infty \quad \square \end{aligned}$$

**定理 6.4**  $f(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$  ( $\lambda > 0, n \in \mathbf{N}_0$ ) とする.  $L \in \mathbf{N}_0$  が存在して (A.3) が成り立つと仮定する.  $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$  であるための必要十分条件は (A.1) が成り立つことである.

{証明} 以下で  $f(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$  ( $\lambda > 0, n \geq 0$ ) のとき,

$$\begin{aligned} I(l) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} - 1 \\ &= \sum_{l \leq n < 2l} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} + \sum_{m \geq l} \frac{f(m)^2}{f(m+l)} - 1 \leq \sum_{l \leq n < 2l} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} + (1+l)^l - 1 \end{aligned}$$

が成り立つことを示す (従って, 定理 6.2, 定理 6.3 からこの定理がわかる). 実際,

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq l} \frac{f(m)^2}{f(m+l)} &= e^{-\lambda} \sum_{m \geq l} \frac{(m+l)! \lambda^{m-l}}{(m!)^2} = e^{-\lambda} \sum_{m \geq l} \frac{\lambda^{m-l}}{m!} (m+l)(m+l-1) \cdots (m+1) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{m \geq l} \frac{\lambda^{m-l}}{(m-l)!} \left(1 + \frac{l}{m}\right) \left(1 + \frac{l}{m-1}\right) \cdots \left(1 + \frac{l}{m-l+1}\right) \\ &\leq e^{-\lambda} (1+l)^l \sum_{m \geq l} \frac{\lambda^{m-l}}{(m-l)!} = (1+l)^l \quad \square \end{aligned}$$

## 6.2 $S = \mathbf{R}_+$ の場合

この節では  $\mathbf{X} = \{X_k\}_{k \geq 1}$  は非負値確率変数列で,  $X_1$  の分布は密度関数  $f$ ,

$$f(x) = \begin{cases} > 0 & \text{a.e.} & \text{if } x \geq 0, \\ = 0, & & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

を持つとする. 以下の議論では  $f$  は  $\mathbf{R}_+$  上の絶対連続関数でその density を  $f'$  とするとき,

$$(A.4) \quad I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx < +\infty$$

を仮定する (このとき  $f'$  は  $\mathbf{R}_+$  上可積分になる).  $\{Y_k\}_{k \geq 1}$  も非負値確率変数列で, 任意の  $k \in \mathbf{N}$  と  $x > 0$  について,

$$(A.5) \quad \sigma(0 \leq Y_k \leq x) > 0$$

が成り立つと仮定する. このとき  $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$  であって  $\mu_{X_k+Y_k}$  の  $\mu_{X_k}$  に対する Radon-Nikodym derivative は,

$$\frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(x) = \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(x-Y_k)]}{f(x)} \quad x \geq 0$$

で与えられる.

$$\begin{aligned} Z_k(X_k) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(X_k-Y_k)]}{f(X_k)} - 1 \\ &= \left\{ \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(X_k-Y_k); Y_k > \varepsilon]}{f(X_k)} - \sigma(Y_k > \varepsilon) \right\} \\ &\quad + \left\{ -\sigma(X_k < Y_k \leq \varepsilon) + \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(X_k-Y_k) - f(X_k); Y_k \leq X_k, Y_k \leq \varepsilon]}{f(X_k)} \right\} \\ &= V_\varepsilon(X_k) + W_\varepsilon(X_k) \quad \dots\dots\dots (\text{II.8}) \end{aligned}$$

とおく.

**補題 6.1** (Kitada-Sato [6] Lemma 1) ある  $\varepsilon > 0$  について,

$$(A.6) \quad \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) < +\infty$$

であれば,

$$\sum_{k \geq 1} |V_\varepsilon(X_k)| < +\infty \quad a.s.$$

さらに次のことが示せる.

定理 6.5 ある  $\varepsilon > 0$  について  $\mathbf{R}_+$  上の可積分関数  $\varphi$  で

$$(A.7) \quad \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \frac{f'(x-t)^2}{f(x)} 1_{\{t < x\}} \leq \varphi(x) \quad a.e. (dx)$$

をみたすものが存在するとする. さらにこの  $\varepsilon > 0$  について (A.6) と

$$(A.8) \quad \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \sigma(Y_k > x)^2 f(x) dx < +\infty,$$

$$(A.9)_\varepsilon \quad \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\sigma[Y_k; Y_k \leq \varepsilon]^2 < +\infty$$

が成り立てば  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$ .

{証明}  $\varepsilon > 0$  を仮定のものとする. 補題 6.1, 定理 6.1 から  $\sum_{k=1}^{+\infty} W_\varepsilon(X_k)$  が概収束する事を示せばよい. これには  $\{W_\varepsilon(X_k)\}_{k \geq 1}$  が独立な平均 0 の確率変数列であることから,  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}_P[W_\varepsilon(X_k)^2] < +\infty$  を示せば十分であることがわかる. 実際, Taylor 展開と仮定から

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[W_\varepsilon(X_k)^2] \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \left\{ -\sigma(x < Y_k \leq \varepsilon) + \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k) - f(x); Y_k \leq x, Y_k \leq \varepsilon]}{f(x)} \right\}^2 f(x) dx \\ &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k \leq \varepsilon)^2 f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k) - f(x); Y_k \leq x, Y_k \leq \varepsilon]}{f(x)} \right\}^2 f(x) dx \right\} \\ &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k)^2 f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma \left[ \int_0^1 \frac{|f'(x - sY_k)|}{\sqrt{f(x)}} ds Y_k; Y_k \leq x, Y_k \leq \varepsilon \right]^2 dx \right\} \\ &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k)^2 f(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \mathbf{E}_\sigma[Y_k; Y_k \leq \varepsilon]^2 \right\} < +\infty \quad \square \end{aligned}$$

さて, 必要条件について考えよう.

補題 6.2 任意の  $\varepsilon > 0$  について

$$(A.10) \quad \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon)^2 < +\infty$$

が成り立つとする. また  $f'$  は連続関数とする.  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であれば (A.9)<sub>1</sub> が成り立つ.

{証明} ある  $\delta > 0$  が存在して (A.9) $_{\delta}$  が成り立つことを示せば任意の  $\varepsilon > 0$  について (A.10) が成り立つことから (A.9) $_1$  が示せる.

$\varepsilon > 0$  を  $L \stackrel{\text{def}}{=} f(\varepsilon) > 0$  と取る. 仮定からこの  $\varepsilon > 0$  について (A.10) が成り立つ.

$$\alpha = \inf \left\{ x \geq 0; |f(\varepsilon + x) - f(\varepsilon)| \geq \frac{L}{2} \right\}$$

とおく ( $f$  の連続性と可積分性から  $0 < \alpha < +\infty$ ).  $[x_1, x_2] \subseteq [\varepsilon, \varepsilon + \alpha]$  を,

$$l \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)| > 0$$

ととれる ( $f' \neq 0$  on  $[\varepsilon, \varepsilon + \alpha]$  であることと  $f'$  の連続性から).

$K = \sup_{0 \leq x \leq \varepsilon + \alpha} f(x)$  ( $0 < K < +\infty$ ), また  $M = 2\frac{K}{L}$  とおく.  $\varepsilon \leq x \leq \varepsilon + \alpha$  のとき,

$$\chi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k)]}{f(x)} \quad (= Z_k(x) + 1) \leq M$$

いま  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  を仮定すると定理 6.1 (D-2) から,

$$+\infty > \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[Z_k(X_k)^2; Z_k(X_k) \leq M] \geq \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \{\chi_k(x) - 1\}^2 f(x) dx.$$

従って,  $\delta < \varepsilon$  であれば,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); Y_k \leq \delta]^2 \frac{dx}{f(x)} \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \{ \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); Y_k \leq x] \\ & \quad - \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); \delta < Y_k \leq x] \}^2 \frac{dx}{f(x)} \\ &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); Y_k \leq x]^2 \frac{dx}{f(x)} + [8MK\alpha] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \{ \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k)] - f(x) + f(x)\sigma(Y_k > x) \}^2 \frac{dx}{f(x)} \\ & \quad + [8MK\alpha] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 1} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} [\chi_k(x) - 1]^2 f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \sigma(Y_k > x)^2 f(x) dx \right\} \\ & \quad + [8MK\alpha] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \{\chi_k(x) - 1\}^2 f(x) dx + 4K\alpha[2M + 1] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 < +\infty \end{aligned}$$

以上から  $\delta < \min\{\varepsilon, \frac{x_2 - x_1}{2}\}$  のとき,

$$\begin{aligned}
 +\infty &> \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \alpha} \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); Y_k \leq \delta]^2 \frac{dx}{f(x)} \\
 &\geq \sum_{k \geq 1} \int_{x_1 + \delta}^{x_2} \mathbf{E}_{\sigma}\left[\int_0^1 |f'(x - sY_k)ds| Y_k; Y_k \leq \delta\right]^2 \frac{dx}{f(x)} \\
 &\geq \frac{\delta l}{K} \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_{\sigma}[Y_k; Y_k \leq \delta]^2.
 \end{aligned}$$

$\delta > 0, l > 0, 0 < K < +\infty$  だから,

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_{\sigma}[Y_k; Y_k \leq \delta]^2 < +\infty \quad \square$$

**補題 6.3** 任意の  $\varepsilon > 0$  について (A.10) が成り立つとする.  $f(0) > 0$  で, さらに  $f'$  は連続関数. また  $\delta > 0$  が存在して,

$$\sup_{0 < t \leq \delta} |f'(t)| \leq 1$$

が成り立つとする.  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であれば (A.8) が成り立つ.

{証明} 補題 6.2 から, (A.9)<sub>1</sub> が成り立っていることに注意する.  $M = f(0)$  とする ( $M > 0$ ).

$$\gamma = \inf\{x \geq 0; |f(x) - f(0)| \geq \frac{M}{4}\}$$

とおく ( $f$  の連続性と可積分性から  $0 < \gamma < +\infty$  に注意する).  $0 \leq x \leq \gamma$  のとき,

$$\chi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k)]}{f(x)} (= Z_k(x) + 1) \leq 2.$$

いま  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  を仮定すると定理 6.1 (D-2) から,

$$\begin{aligned}
 +\infty &> \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_{\mathbf{p}}[Z_k(X_k)^2; Z_k(X_k) \leq 1] \\
 &\geq \sum_{k \geq 1} \int_0^{\gamma} \{\chi_k(x) - 1\}^2 f(x) dx.
 \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k \geq 1} \int_0^{\gamma} \sigma(Y_k > x)^2 f(x) dx \\
 &= \sum_{k \geq 1} \int_0^{\gamma} \left\{ \left[ \mathbf{E}_{\sigma}\left[\frac{f(x - Y_k)}{f(x)}\right] - 1 \right] f(x) - \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); x \geq Y_k] \right\}^2 \frac{dx}{f(x)} \\
 &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \left\{ \int_0^{\gamma} [\chi_k(x) - 1]^2 f(x) dx + \int_0^{\gamma} \mathbf{E}_{\sigma}[f(x - Y_k) - f(x); x \geq Y_k]^2 \frac{dx}{f(x)} \right\}.
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \geq 1} \int_0^\gamma \mathbf{E}_\sigma [f(x - Y_k) - f(x); x \geq Y_k]^2 \frac{dx}{f(x)} \\
 & \leq \frac{4}{3M} \int_0^\gamma \mathbf{E}_\sigma \left[ \int_0^1 |f'(x - sY_k)| ds Y_k; x \geq Y_k \right]^2 dx \\
 & \leq \frac{4}{3M} \gamma \left\{ \sup_{0 < x \leq \gamma} |f'(x)| \right\}^2 \mathbf{E}_\sigma [Y_k; Y_k \leq \gamma]^2 < +\infty.
 \end{aligned}$$

以上から,

$$\sum_{k \geq 1} \int_0^\gamma \sigma(Y_k > x)^2 f(x) dx < +\infty.$$

これと仮定 (A.10) によって (A.8) が導かれる.  $\square$

定理 6.5, 補題 6.2, 補題 6.3 から次が示せる.

**定理 6.6**  $\lim_{k \rightarrow +\infty} Y_k = 0$   $\sigma$  a.s. また密度関数  $f$  は  $f(0) > 0$  と, ある  $\varepsilon > 0$  と  $\mathbf{R}_+$  上の可積分関数  $\varphi$  について (A.7) をみたすとする. さらに  $f'$  が連続関数で, 実数  $M \geq 0$  が存在して  $|f'(x)| \leq M$  ( $0 < \forall x \leq 1$ ) が成り立つとする. 次の (A), (B) は同値になる.

(A)  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$ .

(B) (A.8), (A.9)<sub>1</sub> が成り立つ.

最後に Kakutani の定理から得られる結果を示す.

**定理 6.7**

$$\sum_{k \geq 1} Y_k^2 < +\infty \quad \sigma \text{ a.s.}$$

とする. (A.8) が成り立てば,  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$ .

{証明}  $\sum_{k \geq 1} Y_k^2 < +\infty$   $\sigma$  a.s. を仮定すると Kolmogolov の三級数定理によって,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > 1) < +\infty \\ \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\sigma [Y_k^2; Y_k \leq 1] < +\infty \end{array} \right.$$

が成り立っている. さらに (A.5) を考慮すると,

$$(II.9) \quad a = \inf_{k \geq 1} \sigma(Y_k \leq 1) > 0$$

としてよい. さて Kakutani の定理から,  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  が成り立つことと

$$(II.10) \quad \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma [f(x - Y_k)]} - \sqrt{f(x)} \right)^2 dx < +\infty$$



が成り立つことが同値であることに注意する.

$k \in \mathbf{N}$  を固定する. 非負実数  $a, b, c, d$ , が与えられたとき  $(\sqrt{a+b} - \sqrt{c+d})^2 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{d})^2$  が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}
 & \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k)]} - \sqrt{f(x)} \right)^2 \\
 = & \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k > 1] + \mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k \leq 1]} \right. \\
 & \quad \left. - \sqrt{f(x)\sigma(Y_k > 1) + f(x)\sigma(Y_k \leq 1)} \right)^2 \\
 \leq & \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k > 1]} - \sqrt{f(x)\sigma(Y_k > 1)} \right)^2 \\
 & \quad + \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k \leq 1]} - \sqrt{f(x)\sigma(Y_k \leq 1)} \right)^2 \\
 \leq & 2 \{ \mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k > 1] + f(x)\sigma(Y_k > 1) \} \\
 & + 2 \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k \leq 1]} - \sqrt{f(x)\sigma(Y_k \leq 1, Y_k \leq x)} \right)^2 \\
 & + 2 \left( \sqrt{\sigma(Y_k \leq 1)} - \sqrt{\sigma(Y_k \leq 1, Y_k \leq x)} \right)^2 f(x)
 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで Fubini の定理に注意すると,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \{ \mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k > 1] + f(x)\sigma(Y_k > 1) \} dx \\
 = & 2 \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > 1) < +\infty
 \end{aligned}$$

また Taylor 展開, Schwarz の不等式から,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \left( \sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k); Y_k \leq 1]} - \sqrt{f(x)\sigma(Y_k \leq 1, Y_k \leq x)} \right)^2 dx \\
 = & \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} dx \left\{ \int_0^1 \frac{\mathbf{E}_\sigma[f'(x - tY_k)(-Y_k); Y_k \leq 1, Y_k \leq x]}{2\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[f(x - tY_k); Y_k \leq 1, Y_k \leq x]}} dt \right\}^2 \\
 \leq & \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 \frac{1}{4} \frac{1}{\mathbf{E}_\sigma[f(x - tY_k); Y_k \leq 1, Y_k \leq x]} \\
 & \quad \times \mathbf{E}_\sigma \left[ \frac{f'(x - tY_k)Y_k}{\sqrt{f(x - tY_k)}} \sqrt{f(x - tY_k)}; Y_k \leq 1, Y_k \leq x \right]^2 dt \\
 \leq & \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 \mathbf{E}_\sigma \left[ \frac{f'(x - tY_k)^2}{f(x - tY_k)} Y_k^2; Y_k \leq 1, Y_k \leq x \right] dt \\
 \leq & \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\sigma[Y_k^2; Y_k \leq 1] < +\infty
 \end{aligned}$$

さらに (II.9) と (A.8) から,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \left( \sqrt{\sigma(Y_k \leq 1)} - \sqrt{\sigma(Y_k \leq 1, Y_k \leq x)} \right)^2 f(x) dx \\
 &= \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sigma(Y_k \leq 1) - \sigma(Y_k \leq 1, Y_k \leq x)}{\sqrt{\sigma(Y_k \leq 1)} + \sqrt{\sigma(Y_k \leq 1, Y_k \leq x)}} \right)^2 f(x) dx \\
 &\leq \frac{1}{a} \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k)^2 f(x) dx < +\infty
 \end{aligned}$$

以上から (II.10) が示され  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  がわかった。  $\square$

### 6.3 $f(x) = e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$ のとき

最後に  $f(x) = e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$  のときについて考えよう。

**補題 6.4**  $f(x) = e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$  とする。  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であれば任意の  $\varepsilon > 0$  について,

$$\sum_{k \geq 1} \{ \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; Y_k \leq x] - \sigma(Y_k > x) \}^2 < +\infty. \quad a.e \ x \in [0, \varepsilon]$$

{証明} 任意の  $\varepsilon > 0$  を固定し  $M = e^\varepsilon$  とおく。  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であれば定理 6.1 (D-2) から

$$\begin{aligned}
 +\infty &> \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_p[Z_k(X_k)^2; Z_k(X_k) \leq M] \\
 &= \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_p \left[ \{ \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k}; x \geq Y_k] - 1 \}^2; \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k}; X_k \geq Y_k] \leq M + 1 \right] \\
 &\geq \sum_{k \geq 1} \int_0^\varepsilon \{ \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k}; x \geq Y_k] - 1 \}^2 e^{-x} dx \\
 &= \int_0^\varepsilon \sum_{k \geq 1} \{ \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; Y_k \leq x] - \sigma(Y_k > x) \}^2 e^{-x} dx
 \end{aligned}$$

これより結論が得られる。  $\square$

**定理 6.8**  $f(x) = e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$  とする。 またある  $\varepsilon > 0$  について (A.6) が成り立つとする。 このとき次の (A), (B) は同値である。

(A)  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  .

(B) (A.8), (A.9) $_\varepsilon$  が成り立つ。

{証明} (B) $\implies$ (A) は 定理 6.5 より.

(A) $\implies$ (B).  $\varepsilon > 0$  を仮定のものとする. 補題 6.4 と (A.6) より (A.9) $_{\varepsilon}$  が成り立つことに注意すれば (A.8) を示せばよいことがわかる.  $M = e^{\varepsilon}$  とおく.  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であれば 定理 6.1 (D-2) から

$$\begin{aligned} +\infty &> \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_p[Z_k(X_k)^2; Z_k(X_k) \leq M] \\ &\geq \sum_{k \geq 1} \int_0^{\varepsilon} \{ \mathbf{E}_{\sigma}[e^{Y_k} - 1; Y_k \leq x] - \sigma(Y_k > x) \}^2 e^{-x} dx. \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} &\sum_{k \geq 1} \int_0^{\varepsilon} \sigma(Y_k > x)^2 e^{-x} dx \\ &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \int_0^{\varepsilon} \{ \mathbf{E}_{\sigma}[e^{Y_k} - 1; Y_k \leq x] - \sigma(Y_k > x) \}^2 e^{-x} dx \\ &\quad + 2 \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_{\sigma}[e^{Y_k} - 1; Y_k \leq \varepsilon]^2 \\ &< +\infty \end{aligned}$$

このことと (A.6) から (A.8) が導かれる. □

さて, 上の定理では最初にある  $\varepsilon > 0$  について (A.6) が成り立つと仮定して議論を進めた. しかし次に示すように  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$  であっても任意の  $\varepsilon > 0$  について (A.6) が成り立たない例が存在することに注意する.

**例 6.1**  $f(x) = e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$  とする.

$\alpha > 0$  を固定し,  $a_k = \log(k^{\frac{\alpha}{2}} + 1)$  ( $k \geq 1$ ) とする.  $Y = \{Y_k\}_{k \geq 1}$  を,

$$\sigma(Y_k = a_k) = k^{-\alpha}, \quad \sigma(Y_k = 0) = 1 - k^{-\alpha}$$

で与える.

$$Z_k(X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}_{\sigma}[e^{Y_k}; X_k \geq Y_k] - 1 = \begin{cases} -k^{-\alpha} & \text{if } X_k < a_k \\ k^{-\alpha}(e^{a_k} - 1) = k^{-\frac{\alpha}{2}} & \text{if } X_k \geq a_k \end{cases}$$

となる.  $-1 < Z_k(X_k) \leq 1$  a.s. ( $\forall k \in \mathbf{N}$ ), また  $\{Z_k(X_k)\}_{k \geq 1}$  が独立な平均 0 の確率変数列であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \mu_X \sim \mu_{X+Y} &\stackrel{\text{同値}}{\iff} \sum_{k \geq 1} Z_k(X_k) \text{ は概収束} \stackrel{\text{同値}}{\iff} \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_p[Z_k(X_k)^2] < +\infty \\ &\stackrel{\text{同値}}{\iff} \sum_{k \geq 1} k^{-\frac{3}{2}\alpha} < +\infty \end{aligned}$$

である. ところで  $\varepsilon > 0$  について  $k_\varepsilon = \inf\{k; a_k > \varepsilon\}$  とおけば

$$\sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) = \sum_{k \geq k_\varepsilon} k^{-\alpha}$$

だから, 任意の  $\varepsilon > 0$  について,

$$\alpha > 1 \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) < +\infty \\ \mu_X \sim \mu_{X+Y} \end{array} \right.$$

$$1 \geq \alpha > \frac{2}{3} \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) = +\infty \\ \mu_X \sim \mu_{X+Y} . \end{array} \right.$$

ちなみにこの場合は,

$$\sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; \varepsilon < Y_k \leq x]^2 e^{-x} dx = \sum_{k \geq k_\varepsilon} k^{-\alpha} \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$

となり,

$$\mu_X \sim \mu_{X+Y} \iff \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; \varepsilon < Y_k \leq x]^2 e^{-x} dx < +\infty \quad \square$$

**定理 6.9**  $f(x) = e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$  とする. ある  $\varepsilon > 0$  について (A.10) が成り立つとする. この  $\varepsilon > 0$  について,

$$(A.11) \quad \sum_{k \geq 1} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; \varepsilon < Y_k \leq x]^2 e^{-x} dx < +\infty,$$

と, さらに (A.8), (A.9)<sub>ε</sub> が成り立てば,  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$ .

{証明} (II.8) (p.12 参照) において (A.10), (A.11) に注意すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_P[V_\varepsilon(X_k)^2] &= \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} \left\{ \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; \varepsilon < Y_k \leq x] - \sigma(Y_k > x, Y_k > \varepsilon) \right\}^2 e^{-x} dx \\ &\leq 2 \sum_{k \geq 1} \left\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[e^{Y_k} - 1; \varepsilon < Y_k \leq x]^2 e^{-x} dx + \sigma(Y_k > \varepsilon)^2 \right\} < +\infty \end{aligned}$$

$\{V_\varepsilon(X_k)\}_{k \geq 1}$  は独立で平均 0 の確率変数列だから  $\sum_{k=1}^{+\infty} V_\varepsilon(X_k)$  は概収束する. 他方 (A.8) と (A.9)<sub>ε</sub> を考慮すると定理 6.5 の証明から  $\sum_{k=1}^{+\infty} W_\varepsilon(X_k)$  も概収束していることがわかり定理 6.1 の命題 (C) が示せた. 従って  $\mu_X \sim \mu_{X+Y}$ .

## 参考文献

- [1] X.Fernique. Ecole d'Ete de Probabilities de Saint-Flour IV. *Lect. Note Math*, **480**, 1974.
- [2] J.P.Kahane. *Some random series of functions* 1'st ed. Heath, **1968**. 2'nd ed. Cambridge Univ. **1985**
- [3] J.P.Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, **9**(2):105–150, 1985.
- [4] J.P.Kahane. and J.Peyrière. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. in Math*, **22**:131–145, 1976.
- [5] S.Kakutani. On equivalence of infinite product measures. *Ann. Math* , **49**:214–224, 1948.
- [6] K.Kitada. and H.Sato. On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution. *Probab.Th. Rel.Fields*, **81**:609–627, 1989.
- [7] S.Kusuoka. Høegh-Krohn's model of quantum fields and the absolute continuity of measures. *Res. Inst. Math. Sci. ( Preprint )* , 1988.
- [8] Yu. A. Rozanov. On the density of one Gaussian measure with respect to another. *Th. Probab. Appl*, **7**:82–87, 1962.
- [9] H. Sato. On the convergence of the product of independent random variables. *J. Math. Kyoto. Univ*, **27**:381–385, 1987.
- [10] L.A.Shepp. Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. *Ann.Math.Stat*, **36**:1107–1112, 1965.