

2 階非包合的多重特性作用素に対する 特異 CAUCHY 問題

東大 理 打越敬祐

$(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ として, 2 階
の偏微分作用素

$$P = \sum_{z' + |k| \leq 2} x^{k(z', \alpha)} a_{z', \alpha}(x, y) \frac{\partial^{z'}}{\partial x^{z'}} \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$$

を扱う。但し, $k(z', \alpha)$ は, $0 \leq \alpha' \leq \alpha - 2$ を満たす整数
 α, α' によって

$$k(z', \alpha) = \begin{cases} \alpha & |k| \\ \alpha' & z' = 0, |k| = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \begin{matrix} z' + |k| = 2 \\ z' = 0, |k| = 1 \\ \text{その他} \end{matrix}$$

により定められる整数とする。更に, $a_{z', \alpha}$ は原点で正則な函
数とし, $a_{2, 0}(x, y) \equiv 1$ とする。このような作用素に対し,
特異 Cauchy 問題

$$(SCP) \begin{cases} Pu(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0, y) = \dot{u}_2(y) \end{cases} \quad z' = 0, 1$$

を考察する。但し, $\dot{u}_2(y)$ は十分小さい $R > 0$ に対し

$$\{ y \in \mathbb{C}^n; |y_1| < R, y_1 \neq 0 \}$$

で定義された多価正則函数で, ある $C > 0$ に対し

$$|\dot{u}_2(y)| \leq C \exp \{ C |y_1|^{-(g-1-g')/(g+1)} \}$$

を満たしているとする。

ゆえゆえは次の仮定を置く:

仮定 (x, y) の双対変数 (ξ, η) に対し,

$$\begin{aligned} \sigma_2(P)(x, y, \xi, \eta) &= \sum_{i'+k'=2} x^{k(z, \alpha)} a_{i\alpha}(x, y) \xi^i \eta^\alpha \\ &= \sum_{i'+k'=2} x^{gk'} a_{i\alpha}(x, y) \xi^i \eta^\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

の根を, $\xi = x^g \lambda_i(x, y, \eta)$, $i' = 1, 2$, とするとき,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{at } x=0, y=0, \eta=(1, 0, \dots, 0)$$

このとき, (SCP) の解 $u(x, y)$ で, $\{x=y_1=0\}$ を通る二つの特性曲線以外で多価正則なものを構成することができる。正確に述べるため, 少し準備をおこなう。

$\varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2$, を

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) - x^2 \lambda_i(x, y, \nabla_y \varphi_i(x, y)) = 0 \\ \varphi_i(0, y) = y_i \end{cases}$$

の解とする。 $\varphi_i(x, y)$ は原点で正則で、逆函数定理により、

$$\varphi_i(x, y) = 0$$

を y_i について解くことができる。その解を、

$$y_i = \psi_i(x, y')$$

とする。 $\omega_{r, \theta} = \omega_{r, \theta}' \cup \omega_{r, \theta}''$ を、

$$\omega_{r, \theta}' = \{ (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n;$$

$$|x| < r, |y_j| < r, 1 \leq j \leq n,$$

$$|\arg(y_i - \psi_i(x, y')) - \theta| < \frac{\pi}{2} + r,$$

$$i = 1, 2 \}$$

$$\omega_{r, \theta}'' = \{ (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n;$$

$$|x| < r, |y_j| < r, 1 \leq j \leq n,$$

$$|\arg(y_i - \psi_i(x, y')) - \theta - \pi| < \frac{\pi}{2} + r,$$

$$i = 1, 2 \}$$

とする。このとき、次のことがわかる:

定理. $r > 0$ を十分小とすると, 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,
 $\omega_{\theta, r}$ で正則な (SCP) の解 $u(x, y)$ が一意的に存在し,

$$|u(x, y)| \leq \sum_{i=1,2} \exp \left\{ \sum_{i=1,2} |y_i(x, y)|^{-(\beta+1-\beta')/(\beta+1)} \right\} C$$

を満たす。

注意. $(x, y') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ を任意に選んで固定する。 $\theta \in \mathbb{R}$ を,

$$\theta = \arg(y_1(x, y') - y_2(x, y')) + \frac{\pi}{2}$$

とすれば, 右図に見る通り,

$\omega_{r, \theta}$ は,

$$\omega_r = \{ (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n;$$

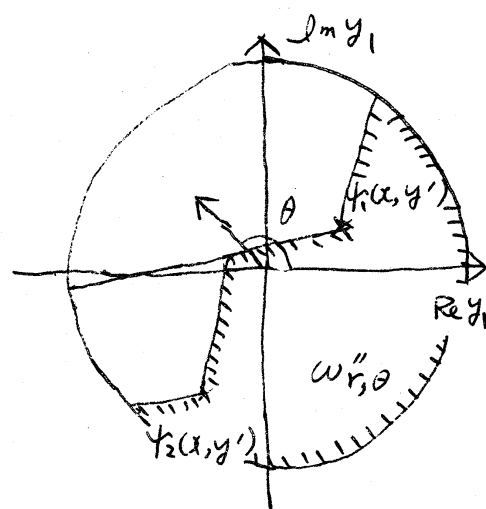
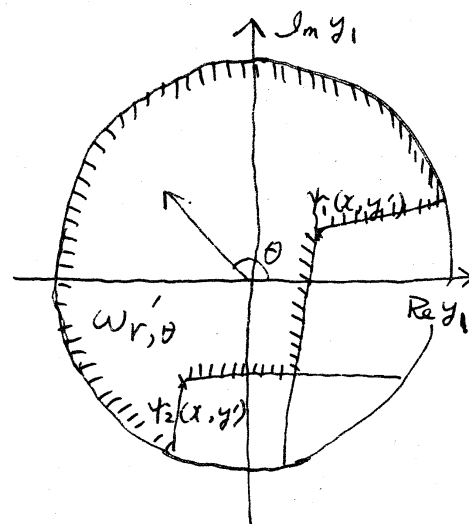
$$|x| < r,$$

$$|y_j| < r, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$y_1 \neq y_2(x, y'), \quad 1 = 1, 2 \}$$

の普遍被覆の領域で, ω_r の全体をおおっている。従って, (SCP) の解

$u(x, y)$ の, ω_r におけるひとつの枝が完全に求められたことになる。 $\omega_{r, \theta}$ の任意の領域で 解を求めることができる



かどうか，今のところはわからない。

注意．より精密には次のことがわかる。 θ_0 を，

$$\theta_0 = -\arg([\lambda_2(x, y, \gamma) - \lambda_1(x, y, \gamma)]_{x=0, y=0, \gamma=(1, 2, \dots, n)})$$

とする。任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}$ に対し, $V_{r, \theta, l}^i$, $i = 1, 2$, を,

$$V_{r, \theta, l}^i = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n;$$

$$|x| < r, |y_j| < r, 1 \leq j \leq n,$$

$$|(l+1)(\arg x) - (\theta_0 + \pi l + \theta) - \frac{\pi}{2}| < \frac{3}{4}\pi,$$

$$|\arg(y_1 - \psi_2(x, y')) - \theta| < \frac{\pi}{2} + r\}$$

で定める。 $\omega_{r, \theta} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} (V_{r, \theta, l}^1 \cap V_{r, \theta, l}^2)$ である。このとき, $V_{r, \theta, l}^i$ で正則な $u_{\theta, l}^i(x, y)$ が存在して,

$$|u_{\theta, l}^i(x, y)| \leq \exists C \exp \{ \exists C |y_1 - \psi_2(x, y')|^{-\delta - (1-\delta)(l+1)} \}$$

を満たし, $V_{r, \theta, l}^1 \cap V_{r, \theta, l}^2$ で (SCP) の解 $u(x, y)$ は

$$u = u_{\theta, l}^1 + u_{\theta, l}^2$$

の形で与えられる。同様の分解が $\omega_{r, \theta}$ でもできる。すなわち, $u(x, y)$ は, y_1 と $\psi_1(x, y')$ で正則な函数と, y_1 と $\psi_2(x, y')$ で正則な函数の和の形で与えられ, その分解は, $\arg x$ 及び

$\arg(y_1 - y_2(x, y'))$, $i = 1, 2$, に依存する。特に, $\arg x$ に対する依存は, 常微分方程式論における Stokes 現象によるものである。