

講究録「流体における波動現象の数理」

粉体流動場に於ける非線形波動

東北大理 小松 輝久¹

(*Department of Physics, Tohoku Univ.*)
(*Komatsu, Teruhisa S.*)

粉体流動場は、適当な容器に粉体粒子を詰めた状態で容器の下から流体を流し込んで、粉体を流動化させることによって作られる。この時、下からの流速が小さいと粉体は一様に膨潤した状態（一様流動層；左）になっているが、流速を増すと密度の揺らぎは緩和せずバブルを形成し（右、但し模式的に大きく書いてある）、出来たバブルは浮き上がっていくという現象が見られる。[1]

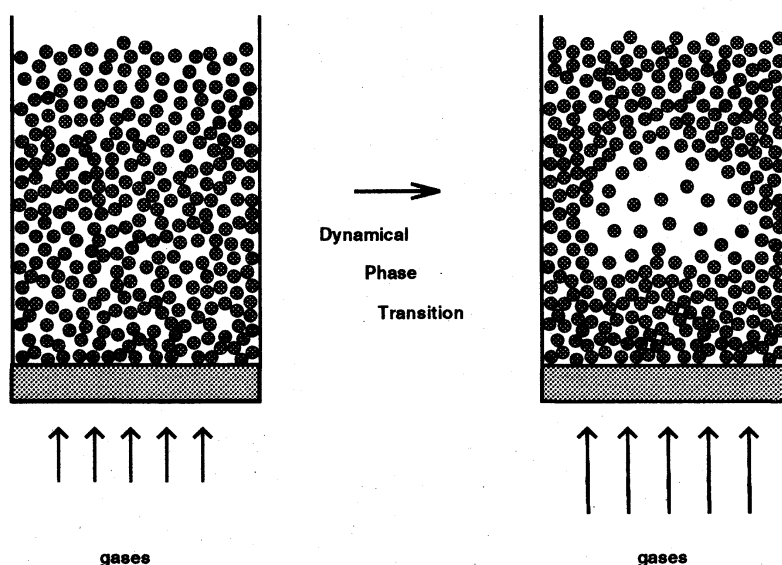


図 1: 粉体流動層のバブリング転移

われわれの目的はこのバブリング（相転移?）の起こるメカニズムを知り、本質的にどのような方程式によってダイナミクスが支配されるのかを知ることにある。この非平衡相転移を起こす系を記述するのに、我々の解析では粉体粒子の一つ一つを追いかける記述法をとらずに、粉体を粗視化して流体と見なせると仮定して、粉体流体と気体流体（空気）が混ざった二流体系として記述した。モデルは以下のようなものである。[2, 3]

¹東北大学理学部物理学教室物性理論講座、〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉

E-mail: komatsu@cmpt01.phys.tohoku.ac.jp

二流体モデル

質量保存則

$$\begin{cases} \partial_t \phi = -\text{div}(\phi \mathbf{v}) \\ \partial_t \bar{\phi} = -\text{div}(\bar{\phi} \mathbf{u}) \end{cases}$$

運動量保存則

$$\begin{cases} \rho_p \phi [\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\phi \nabla \left(p + \frac{\delta A}{\delta \phi} \right) + \rho_p \phi \mathbf{g} \\ \quad - \zeta(\phi) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ \quad + \text{Div} \left[\phi \mu(\phi) \left(\frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t}{2} \right) \right] \\ \rho_g \bar{\phi} [\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} = -\bar{\phi} \nabla p + \rho_g \bar{\phi} \mathbf{g} \\ \quad - \zeta(\phi) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \end{cases}$$

ϕ は粉体の体積占有率で $\bar{\phi}$ は $1 - \phi$ と定義される気体の体積占有率である。また、粉体の速度を $\mathbf{v}$ 、気体の速度を $\mathbf{u}$ とした。 $A[\phi]$ 、 $\zeta(\phi)$ 、 $\mu(\phi)$ はそれぞれ粉体が微視的な運動により均一になろうとする効果、気体の粘性によって粉体が曳きずられる効果、粉体同士の衝突による（ズリに対する）粘性の効果である。これらの関数の ϕ 依存性の特殊さが粉体の特性を表している。解析に用いた具体形は以下の通りである。

$$A[\phi] = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\kappa}{2} (\nabla \phi)^2 + f(\phi) \right], \quad f(\phi) \propto (\phi - \phi_0)^2 / (\phi_{cp} - \phi), \quad \zeta \propto \bar{\phi}^{-5}, \quad \mu \propto (\phi_{cp} - \phi)^{-1}$$

ϕ_{cp} は最密状態での粉体の体積占有率であり、この値で特異な振舞いをする。 ϕ_0 は平均の ϕ であり、気体の流入速度に負の相関があるのでコントロールパラメーターと見れば良い。

上の二流体モデルの特殊なケースとして気体の比重（対粉体）をゼロとし、さらに体積流束（ $\equiv \phi \mathbf{v} + \bar{\phi} \mathbf{u}$ ）が水平成分を持たない場合を考えると、モデルは次の形になる。

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= -\text{div}(\phi \mathbf{v}) \\ (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \zeta(\phi) (V \mathbf{e}_z - \mathbf{v}) - \nabla \frac{\delta A}{\delta \phi} - \frac{\mathbf{e}_z}{Fr} \\ &\quad + \frac{1}{\phi} \text{Div} \left[\phi \mu(\phi) \left(\frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

V は体積流束で、非圧縮条件より定数になる。但し、体積流束を一次元的であるとするのは二次元以上では正しくない。しかし、このモデルを粉体の挙動を解析する上での出発点として使った。

このモデルには次の一様定常解がある。

$$(\phi, \mathbf{v}, \mathbf{u}, p) = (\phi_0, \mathbf{0}, \mathbf{e}_z, p_0 - \frac{\phi_0 + \theta \bar{\phi}_0}{Fr} z)$$

この定常解の線形安定性を調べると

$$\bar{\phi}_0^2 \phi_0 \left[\frac{\zeta_0'}{\zeta_0} \right]^2 - f''(\phi_0)$$

の正負によって安定性が決まることが判る。(正の時、不安定化するモードがある。) 第一項は粉体気体間のドラッグによって系が不安定化する効果であり、第二項は内部エネルギー(エントロピックな効果)が系の安定化に寄与する効果である。この二つの効果の競合が系の安定性を決めている。

線形のモードを $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\sigma_{\pm}t)$ と書く時、 $\sigma_{\pm}$ を長波長展開すると

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\sigma_{+}] \simeq \frac{\phi_0}{\tilde{\zeta}_0} \left[\left(\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0} \right)^2 \bar{\phi}_0^2 \phi_0 - f_0'' \right] k_z^2 - \frac{\phi_0}{\tilde{\zeta}_0} f_0'' k_{\perp}^2 \\ \operatorname{Re}[\sigma_{-}] \simeq -\tilde{\zeta}_0 \\ \operatorname{Im}[\sigma_{\pm}] \simeq \mp \left(\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0} \right) \bar{\phi}_0 \phi_0 k_z \end{cases}$$

となる。 $k_{\perp}$ は横方向の波数である。虚部を見ると不安定化する波(σ_{+} に相当)は速度 $c_0 \equiv (\tilde{\zeta}_0'/\tilde{\zeta}_0)\bar{\phi}_0\phi_0 > 0$ で上昇することが判る。もしも、 $\tilde{\zeta}$ が ϕ の減少関数であった場合には不安定化した波は下降することになる。

逆に短波長で展開すると κ の存在のために実部が $-k^2$ に比例し、安定なことが判る。短波長不安定(物理的に考えにくいこと)を避けるには自由エネルギーの拡散項が必須である。

今、コントロールパラメタが線形不安定の閾値直上にある場合を考えれば、系を特徴付ける小さなパラメタとして、縦方向に現れる負の拡散係数が考えられる。これを ϵ^2 と置いて、通減摂動に手法に沿って長波長弱非線形モードを取り出すことを考える。一次元の場合に話を限れば、上の線形分散関係より次のGM変換を行なうべきことがわかる。

$$\begin{cases} \tau \equiv \epsilon^3 t \\ \xi \equiv \epsilon(z - c_0 t) \end{cases} \quad (2)$$

物理量の展開は任意性があるが一意には定まらないが、展開の初項が一番弱い非線形効果が時間発展を決めるとして決め、その後の展開は ϵ で行なえたと仮定すると

$$\begin{cases} \phi - \phi_0 = \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \epsilon^4 \phi_4 + \epsilon^5 \phi_5 + \cdots \\ v_z = \epsilon^2 v_{z2} + \epsilon^3 v_{z3} + \epsilon^4 v_{z4} + \epsilon^5 v_{z5} + \cdots \end{cases}$$

となる。これらの展開と変数のスケールを元の二流体モデルに代入して、同じ ϵ の中揃えることを行なえば、effectiveな方程式を得る。

$O(\epsilon^5)$ の式からは

$$\partial_{\tau} \phi_2 + \lambda \partial_{\xi} \phi_2^2 + \gamma \partial_{\xi}^3 \phi_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda \equiv \left(\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0} \right) \bar{\phi}_0 \left[1 + \frac{\phi_0}{2} \left(\frac{\tilde{\zeta}_0''}{\tilde{\zeta}_0'} \right) - \phi_0 \left(\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0} \right) \right] \\ \gamma \equiv \frac{c_0 \mu_0}{\tilde{\zeta}_0} \end{cases}$$

という、 ϕ_2 で閉じた式を得る。
また、 $O(\epsilon^6)$ の式を使うと

$$\begin{aligned} \partial_\tau \psi + \lambda \partial_\xi \psi^2 + \gamma \partial_\xi^3 \psi \\ = -\epsilon [\partial_\xi^2 \psi + \lambda' \partial_\xi^2 \psi^2 + \gamma' \partial_\xi^4 \psi] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \psi \equiv \phi_2 + \epsilon \phi_3 \\ \lambda' \equiv \frac{2c_0}{\zeta_0} \lambda - \frac{3\phi_0}{2\zeta_0} \left(\frac{c_0}{\phi_0} \right)^2 - \frac{\phi_0 f_0'''}{2\zeta_0} \\ \gamma' \equiv \frac{2c_0}{\zeta_0} \gamma + \frac{\phi_0 \kappa}{\zeta_0} \end{cases}$$

この通減された方程式の有効性については ϵ を含むために疑問であるが、計算機によって(3)と二流体モデル(1)のそれぞれに対し、2ソリトン解を初期値とする解を比較するとほぼ同様の振舞いを見せることがわかる。従って、ソリトンの衝突するくらいの時間スケールでは二流体モデルの解はより簡単な(3)によって支配される非線形波動と考えて良い。さらに(3)の様な方程式に支配される波動は分散項(∂_ξ^3)の効果が強い場合にはほぼソリトンとして振舞い、弱い散逸効果によって周期境界条件のもとでは安定な周期パルス解を持つことが分かっている。

上の弱非線形解析で見られる粉体密度のパルスは、この研究の興味の対象でもあった粉体流動場中のバブリングを説明するにはパルスの振幅が非常に小さい為に満足に行くものではない。そこで二流体モデルもしくは単純化した二流体モデル(1)に戻って、コントロールパラメタ(流し込む流体の速度に対応)の値を一様流動層が強く線形不安定化するような値に設定して調べてみる必要があるだろう。現在までに、(1)の一次元と二次元モデルについて計算機実験を行なった結果、線形不安定点近傍での解とは定性的に異なると思われる解を得た。

一次元では典型的に図2のような解がある。この場合、粉体密度(particle fraction)の薄い領域はバブルに対応すると思われるくらいに小さい値をとっている。² 但し、コントロールパラメタの値によって、このような解と前に述べたソリトンの解が完全に分離されるのではなく、初期条件に依存して両方の解が存在する領域もあるので必ずしも相転移描像が使えないようである。しかし、計算機実験によって得られた粉体密度のプロファイルは二つの安定なプラトーをインターフェースが繋いでいるように見えることから、このバブルを相分離過程として理解したくなる。³ しかしながら、この安定なプラトーの値が何によって決まるのかは今だに良く分からないし、さらに長波長極限で粉体密度の濃い方のプラトーの値は線形安定な領域にあるのに対し、薄い方のプラトーの値

²本来、一次元モデルの仮定からバブルというよりスラグといった方が正しいだろうが、ここではとりあえずバブルと呼ぶことにする。

³尚、この計算に用いた境界条件は周期的なものである為、バブルの前後の密度の濃い領域のプラトーは同じ値である。本来このような必然性は無いと考えられる。

は線形不安定な領域にある為、このような相分離(?)が起こるのはバブルが有限サイズである場合のみに限られる可能性もある。(この観点からの研究は非常に興味深い、まだ進展していない。) また、バブルが複数存在する場合、引きあって合体するのか反発しあうのかという点も興味深い。計算機によって合体するプロセスを確認することは、まだ出来ていない。しかし、このことは必ずしもバブルが合体しないことを意味しない。何故なら一般に一次元の相分離系ではインターフェースの合体に非常に時間が掛かることが十分に予想されるからである。

二次元ではさらに計算能力の限界から計算量が限られるため、非常に特殊な初期条件(粉体密度のみに長波長の揺らぎを与える)からの発展しか見ていない。この場合にもバブル的な解がある。(図3)ただし、このバブルが本当に安定に存在しうるかどうかは、まだ計算時間の制約等によって充分調べられていない。粉体の流れ場(図4)を見るとバブル中で粉体が下降し、バブルの周りではほぼ止まっているような感じである。この理由はドラッグ係数の粉体密度依存性が効いていると考えることで理解できる。粉体密度の薄いところでは粉体はあまりドラッグを受けない為に自由落下しているのである。しかし現実にはどうであろうか、実験でそういった点にはあまり着目されていないので(バブル中にほとんど粒子が無いので無理もないが、)良く分からないが、多くの人が信じているのはバブル中心で粉体が吹き上がって、バブルの周りに沿って下降するような対流が起こり、さらにこの対流がバブルを安定化させているというものである。では、ここで得た結果はこれと全く反対の結果と思われるが、これは何を意味するのであるだろうか?単純化したモデル(1)では、平均体積流速($\phi \mathbf{v} + \bar{\phi} \mathbf{u}$)を一次元であると仮定していた。従って、水平方向に体積流速が著しく変化する場合にはモデル(1)は正確な記述を与えないであろう。そしてバブルが存在する場合というのは、この水平方向に著しい変化のある場合である可能性がある。何故ならバブル中は外と比べ空気が流れ易いことから、空気の流れがバブル中に集中する可能性が高いからである。このためモデル(1)ではうまく記述できていない可能性が高い。この是非を確認するにはモデル(1)だけを調べていても駄目で、最初の二流体モデルに立ち帰って、二次元におけるバブルの形成を見なければいけない。この最初の二流体モデルは二次元以上では不可避免的に非局所的な圧力の効果が入ってきてしまう為に、数値的にも理論的にもアプローチを困難にしている。⁴ところで二次元のモデル(1)に逡減摂動を適用した場合には、水平方向には拡散の効果が入ってくる[3]だけで、横方向に不安定化する要因は無かった。しかし、もしも上の非局所効果をうまくとり入れて解析することが出来れば横方向に不安定化する可能性も出てくるのではないかと考えられる。非局所効果が著しくパターン形成の性質を変えるといった話しはあまり無いので、こういった観点からの研究も面白いのではないだろうか。

以上、我々の行なっている粉体流動場の解析について述べた。弱非線形解析以降の部分については、今だ進行中で非常にまとまりに欠けた内容となってしまったが、もしも少しでも粉体流動場の研究に面白みを感じて頂ければ幸いである。

⁴モデル(1)ではこの非局所効果を排除する為に、敢えて平均体積流速を一次元的であると仮定していた。

参考文献

- [1] Jackson, J.F., Clift, R. and Harrison, D. ed. *Fluidization 2nd ed.* (1985, Academic Press)
- [2] Batchelor, G.K. *J. Fluid. Mech.* 193 (1988) 75
 Sasa, S. and Hayakawa, H. *Europhys. Lett.* 17 (1992) 685
- [3] Komatsu, T.S. and Hayakawa, H. *Phys. Lett. A* 183 (1993) 56
 Hayakawa, H., Komatsu, T.S. and Tsuzuki, T. *Physica A* (to be published)
 小松 輝久 物性研究 60 (1993/5) 103
 及び、上記に含まれる参考文献。

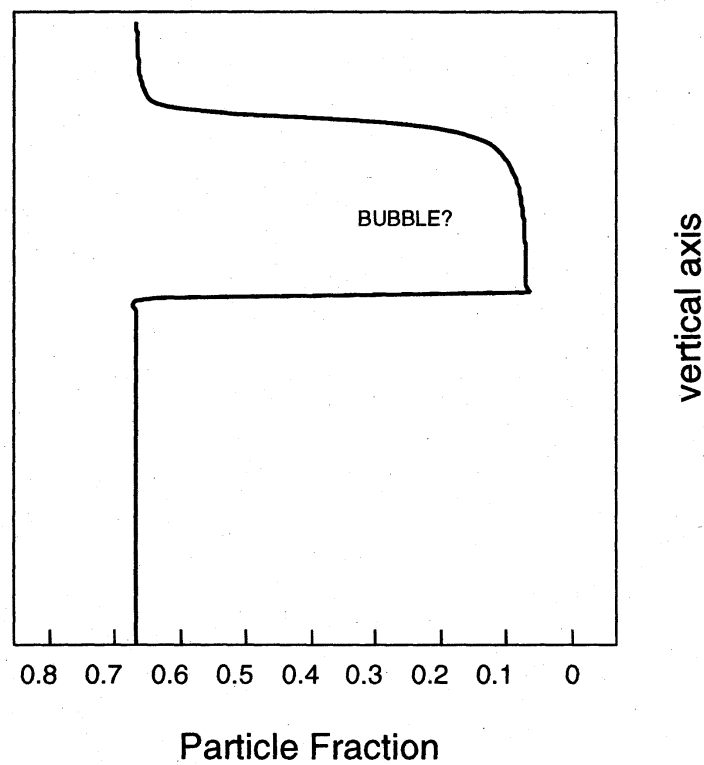


図 2: 一次元バブル解

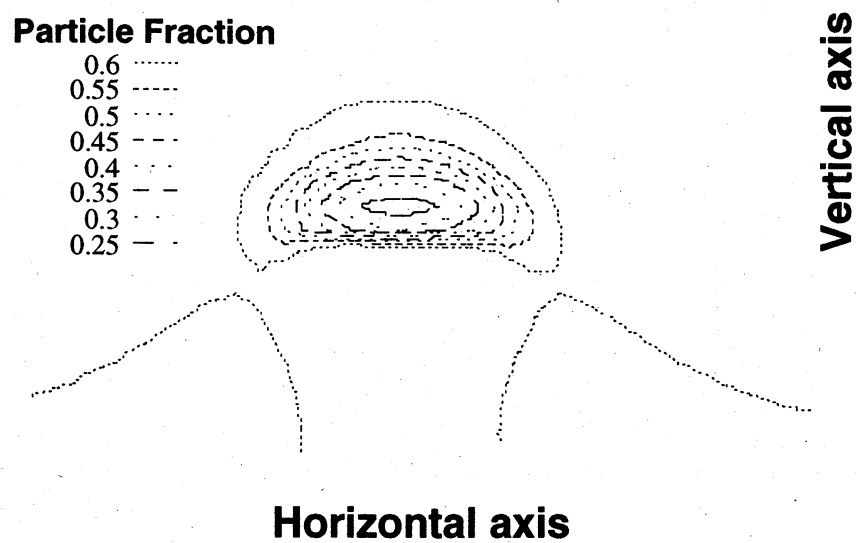


図 3: 二次元バブル解(等高線)

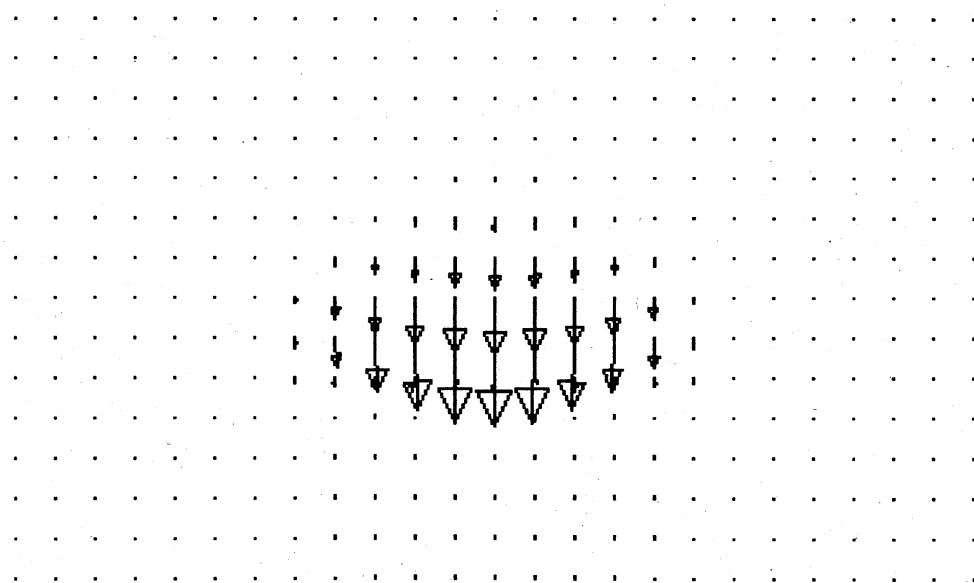


図 4: 二次元バブル解(粉体の流れ場)